A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

X. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1960

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVISMERTETÉSEK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

X. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1960

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

X. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

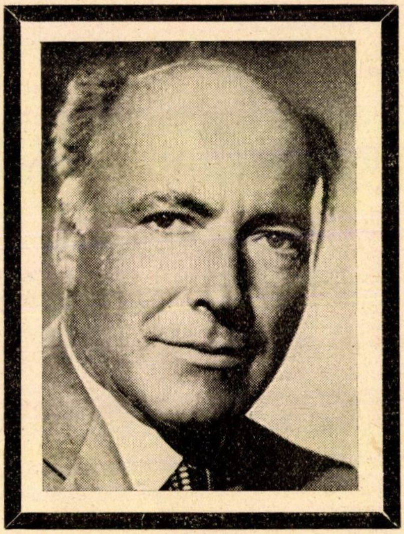
Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.



EGERVÁRY JENŐ

1891—1958

Egerváry Jenő akadémikus, egyetemi tanár, 1958. november 30-án elhunyt. Halálával nagy veszteség érte a hazai és a nemzetközi matematikai életet.

Egerváry Jenő 1891. április 16-án született Debrecenben. A debreceni főreáliskolában tett érettségit 1909-ben. Egyetemi tanulmányait Budapesten, a Tudományegyetemen végezte, ahol 1914-ben doktori képesítést szerzett. Ezután a budapesti Felsőipariskola tanára, majd 1941-től a Műegyetem nyilvános rendes tanára. Az első világháború után néhány évig a szegedi Tudományegyetemen, 1938-tól a budapesti Tudományegyetemen magántanár. 1932-ben tudományos munkásságának elismeréseképpen Kőnig Gyula-jutalomban részesült. 1943-ban a Tudományos Akadémia levelező tagjai sorába választotta. A felszabadulás után nagy érdemeket szerzett az alkalmazott matematika jelentőségének elterjesztése érdekében kifejtett tevékenységével. Jelentős szerepe volt a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének megalapításában. Ebben az Intézetben a „Mechanikai és Szilárdságtani Osztály" vezetője, majd az Intézetnek Matematikai Kutató Intézetté való átszervezése után a „Matrixelmélet és Alkalmazásai Osztály" vezetője volt. Tudományos munkásságáért 1949-ben és 1953-ban Kossuth-díjjal tüntették ki.

Egerváry Jenő sokoldalú, színes matematikai egyéniség volt. Csaknem fél évszázados munkássága során közel 80 dolgozata jelent meg. Első tudományos eredményei főleg Fejér Lipót munkásságához kapcsolódnak; ő inspirálta doktori disszertációját is, amely az integrálegyenletek tárgykörébe vág.

További dolgozatai a Legendre- és a Csebisev-féle polinomok jellemző geometriai tulajdonságaival és nem-negatív trigonometrikus polinomokra vonatkozó szélsőérték feladatokkal foglalkoznak. Ezekben a munkáiban Fejér Lipót több eredményét általánosítja. Jelentős eredményeket ért el a trinom egyenlet gyökeinek elhelyezkedésével kapcsolatos vizsgálataival; ezekkel kapcsolatos a Kakeya-tétel általánosításáról írt dolgozata.

Egerváry munkái között különleges helyet foglal el egy dolgozata, amelyben Kőnig Dénes egy gráfelméleti tételét általánosítja. Ennek a dolgozatnak a jelentőségét az adja meg, hogy több mint húsz évvel később H. W. Kuhn az Egyesült Államokban felismerte a dolgozatban közölt tétel alkalmazási lehetőségét az ekonometriában. Eljárását, amelyet az úgynevezett hozzárendelési probléma megoldására használt, Kőnig és Egerváry tiszteletére „magyar módszer"-nek nevezte el. Egerváry, amikor 1957-ben tudomást szerzett Kuhn és mások munkáiról, azok eredményeinek felhasználásával alkalmazta a módszert az úgynevezett szállítási probléma megoldására. — Az az út, amelyet Kőnig és Egerváry tételei a gráfelméleti megfogalmazástól a szállítási probléma megoldásáig befutottak, igen szépen és meggyőzően példázza az elmélet és gyakorlat egységét és kölcsönhatását, amelynek Egerváry egész életében szószólója és lelkes hirdetője volt.

Egerváry nagy érdeklődéssel fordult a geometria, a differenciálegyenletek elmélete és alkalmazásai felé. Geometriai tárgyú munkáiban az ortocentrikus (magasságponttal bíró) tetraéderek, illetve szimplexek tulajdonságaival, az ortocentrikus koordináta-rendszer alkalmazásaival foglalkozik. Különösen kiemelkednek differenciálgeometriai vizsgálatai: két fontos dolgozata jelent meg az n-méretű euklideszi tér görbéiről. Ezekben az n-edik görbületet geometriai úton definiálja s ezzel Blaschke csupán formális úton nyert formuláját geometriai tartalommal töltötte meg. Alexits Györggyel együtt írt dolgozatában lefektette a lineáris görbületek általános elméletének az alapjait félmetrikus terekben.

A differenciálegyenletek tárgykörébe tartozó munkái közül különösen kiemelkednek a háromtest-probléma differenciálegyenletének egy új alakjára és annak speciális esetben való megoldására vonatkozó eredményei. A későbbiekben foglalkozott még forgó rendszerek kritikus szögsebességének megállapításával, valamint a hővezetés speciális kerületi feltételek esetén való megoldásával. Turán Pállal közösen írt dolgozataiban a kinetikus gázelmélet alapjaival foglalkoznak.

Egerváry életének utolsó hat évében jórészt matrixelméleti kutatásokkal és azok alkalmazásaival foglalkozott. Matrixelméleti munkáiban nagy szerepe van a matrixok diadikus felbontásának. Fő érdeme, hogy elsőnek látta meg a diadikus felbontás alkalmazásában rejlő lehetőségeket, amelynek révén új irányt szabott mind az elméleti vizsgálatoknak, mind pedig a numerikus számítási módszerek egyszerűsítésének. A diadikus felbontás alkalmazásával bizonyítja a projektor matrixok egy érdekes tulajdonságára vonatkozó tételét, általánosítja Stieltjesnek egy matrixelméleti lemmáját, majd általánosítva a diadikus felbontást, az úgynevezett általános rangcsökkentő eljárásával különböző véges iterációs módszereket dolgoz ki tetszőleges lineáris egyenletrendszerek megoldására. Érdemes megemlíteni, hogy a matematika ezen sokak által teljesen lezártnak vélt területét Egerváry számos új eredménnyel gazdagította. Egyik legutolsó munkájában konstruktív módszert ad kvadratikus matrixok Jordan-féle normálalakra való redukciójára. Ezzel sikerült a matrixelmélet egy önmagában zárt fejezetének problémakörét egységes módszerrel tárgyalni és megoldani. Egy másik problémakört tárgyalnak a felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról írt dolgozatai, amelyekben egyrészt általánosítja az addigi eredményeket, másrészt rámutat az alkalmazási lehetőségekre a rácsdinamikában és a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásánál. A matrixelmélet alkalmazásaival foglalkozó munkái közül kiemelkednek a függőhidak általános elméletének megalapozásáról és felépítéséről írt dolgozatai. Végül Turán Pállal együtt írt interpolációról szóló cikkei elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt igen nagy jelentőségűek.

Egerváry kiváló előadó volt, mind egyetemi, mind pedig tudományos előadásai maradandó élményt jelentettek hallgatóinak. Mindig arra törekedett, hogy az előadott anyagot áttekinthetővé tegye, a szerteágazó kérdéseket egységesen tárgyalja és a mélyebb, általánosabb összefüggéseket megvilágítsa. Dolgozatait és előadásait egyaránt a világos és szabatos stílus jellemezte, matematikai módszereire pedig leginkább az a jelző illik, hogy elegánsak. Egyik legfőbb eszköze, amellyel mindig közel tudta hozni a hallgatót vagy olvasót a tárgyhoz, a szemléltetés. Végül ki kell emelni, hogy egész munkásságán végigvonul az az igény, hogy eredményeinek az alkalmazási területét megtalálja és megmutassa, még ha azok a legelvontabb területről valók is.

Ha végigtekintünk életművén, lehetetlen észre nem venni, hogy munkásságának nagyobbik része (több mint 40 dolgozat!) a felszabadulás óta eltelt 14 évre esik. A tudományos munka anyagi és erkölcsi megbecsülése hatalmas mértékben bontakoztatta ki alkotókedvét. Életének utolsó éveiben is állandóan új eredményekkel gazdagította a hazai és a nemzetközi matematikai irodalmat, és megbecsülést szerzett a magyar matematikának világszerte. Kétszeres veszteség számunkra, hogy alkotóerejének teljében távozott el körünkből. Emlékét kegyelettel megőrizzük.

Rózsa Pál

EGERVÁRY JENŐ
tudományos munkáinak jegyzéke

1. Az integrálegyenletek egy osztályáról. *Mathematikai és Physikai Lapok* 23 (1914) 301—355.
2. A seismikus trajektóriákról s az azokkal kapcsolatos Bertrand-féle problémáról. *Mathematikai és Physikai Lapok* **26** (1917) 1—18.
3. Über die seismischen Trajektorien und über das Bertrandsche Problem in der Seismologie, *Gerlands Beiträge zur Geophysik* 14 (1918) 284—299.
4. Über die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome, *Archiv der Mathematik und Physik* (3) **27** (1918) 17—24.
5. On a maximum-minimum problem and its connexion with the roots of equations, *Acta Litterarum ac Scientiarum* 1 (1922) 39—45.
6. Egy a symmetrikus multilineáris formára vonatkozó minimum föladat, *Mathematikai és Physikai Lapok* **29** (1922) 21—43.
7. Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie, *Mathematische Annalen* **99** (1928) 542—561.
8. Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome, *Mathematische Zeitschrift* **27** (1928) 641—652 (*Szász Ottó*val együtt)
9. A trinom egyenletről. *Matematikai és Fizikai Lapok* **37** (1930) 36—57.
10. On a generalisation of a theorem of Kakeya, *Acta Litterarum ac Scientiarum* **5** (1931) 78—82.
11. Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok* **38** (1931) 16—28.
12. Verschärfung eines Harnackschen Satzes und anderer Abschätzungen für nichtnegative harmonische Polynome, *Mathematische Zeitschrift* **34** (1932) 741—757.
13. Jelentés az 1934. évi König Gyula-jutalomról, *Matematikai és Fizikai Lapok* **41** (1934) 93—102.
14. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei (Könyvismertetés), *Matematikai és Fizikai Lapok* **42** (1935) 247—248.
15. Abbildungseigenschaften der arithmetischen Mittel der geometrischen Reihe. *Mathematische Zeitschrift* **42** (1937) 221—230.
16. A tetraéderről, *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* **14** (1937) 1—4.
17. A magasságponttal bíró tetraéderről, *Matematikai és Fizikai Lapok* **45** (1938) 18—35.
18. Über ein Minimumproblem der Elementargeometrie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **178** (1938) 174—186.
19. Az elektromágneses térben elektronmozgás differenciálegyenleteiről. *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítő* **57** (1938) 968—987.
20. On Orthocentric Simplexes, *Acta Litterarum ac Scientiarum* **9** (1940) 218—226.
21. Über ein räumliches Analogon des Sehnenvierecks. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **182** (1940) 122—128.
22. Az *n*-méretű euklidesi tér görbéiről. *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítő* **59** (1940) 787—797.
23. Az *n*-méretű euklidesi tér görbéinek simulógömbjeiről. *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítő* **59** (1940) 775—786.
24. Fondements d'une théorie générale de la courbure linéaire. *Commentarii Mathematici Helvetici* **13** (1940) 257—276. (*Alexits György*-gyel együtt.)
25. Azonosságok alkalmazásairól. *Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok* (1943) 33—41.

26. Seismikus méréseknél alkalmazandó geometriai szerkesztésekről. *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítő* **61** (1943) 1109—1114. (*Gerő L.*, *Pogány B.* és *Vargha B.*-val együtt.)
27. Forgattyús hajtómű keresztfejsebességének maximuma. *Technika* **25** (1944) 297—298.
28. *Differenciálegyenletek.* Mérnöktovábbképző Intézet Kiadványai, 1945.
29. A remark on the length of the circle and on the exponential function. *Acta Scientiarum Mathematicarum* **11** (1946) 114—118.
30. On a new form of the differential equations of the problem of three bodies. *Hungarica Acta Mathematica* **1** (1946) 1—18.
31. Об одном обобщении решения Лагранжа задачи трех тел, Доклады Академии Наук СССР **55** (1947) 805—807.
32. Sur une nouvelle solution particulière du problème des trois corps. *Commentarii Mathematici Helvetici* **24** (1950) 1—3.
33. On a generalisation of a theorem of Sylvester, *Hungarica Acta Mathematica* **1** (1947) 53—57.
34. *A mechanika differenciálegyenleteiről.* Mérnöktovábbképző Intézet Kiadványai, 1948.
35. A Rayleigh-módszer alkalmazása forgó rendszerek kritikus szögsebességének megállapitásánál. *Matematikai Lapok* **1** (1949) 16 26.
36. On the smallest convex cover of a simple arc of space-curve. *Publicationes Mathematicae* **1** (1949) 65—70.
37. On the mapping of the unit-circle by polynomials, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **12** (1950) 226—230.
38. A remark on the curvature and tortuosity of space-curves. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **1** (1950) 46—47.
39. On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **1** (1950) 5—16.
40. Eine Bemerkung über definite quadratische Formen, *Publicationes Mathematicae* **1** (1950) 193—195.
41. Az ortocentrikus koordináta-rendszerről és annak néhány alkalmazásáról, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1952) 387—396.
42. A matematika gyakorlati alkalmazásai, különös tekintettel a technika differenciálegyenleteire. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **1** (1951) 101—115.
43. On a certain point of the kinetical gas theory, *Studia Mathematica* **12** (1951) 170—180. (*Turán Pál*lal együtt.)
44. A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiről. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **1** (1951) 303—314.
45. A hővezetési differenciálegyenlet megoldása az időtől lineárisan függő kerületi feltétel mellett. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **1** (1952) 11—22. (*Lovass-Nagy Viktor*ral együtt.)
46. Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417—458.
47. On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions. *Acta Scientiarum Mathematicarum* **15** (1953) 1—6.
48. On a lemma of Stieltjes on matrices, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **15** (1953) 99—103.
49. Stieltjesnek egy mátrixelméleti lemmájáról. *Matematikai Lapok* **7** (1956) 271—276.

50. On the hermitian normalform of a matrix and Sylvester's law of nullity. *Publicationes Mathematicae* 3 (1953) 144—149.
51. Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 11—32.
52. On the contractive linear transformations of n-dimensional vector space. *Acta Scientiarum Mathematicarum* 15 (1954) 178—182.
53. On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. *Acta Scientiarum Mathematicarum* 15 (1954) 211—222.
54. Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 31—47.
55. Über die Faktorisation von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 35 (1955) 111—118.
56. On the Application of the Matrix Theory to the Calculation of Chain-bridges, *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 11 (1955) 241—256.
57. A matrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 9—23.
58. A matrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 5 (1955) 301—313.
59. A Hunyadi—Scholtz-féle mátrixok alkalmazása a rácsos szerkezetek elméletében. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 289—300.
60. Auflösung eines homogenen linearen diophantischen Gleichungssystems mit Hilfe von Projektormatrizen. *Publicationes Mathematicae* 4 (1955—56) 481—483.
61. Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff, II., *Publicationes Mathematicae* 5 (1957) 60—71. (*Aczél János*sal együtt.)
62. Régi és új módszerek lineáris egyenletrendszerek megoldására. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 1 (1956) 109—122.
63. Az inverz matrix általánosítása. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 1 (1956) 315—324.
64. Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung. *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau (Zürich)* 16 (1956) 149—184.
65. A függőhidak általános elméletének megalapozása és felépítése matrix-számítás segítségével. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 2 (1957) 3—32.
66. A differenciálokról. *Matematikai Lapok* 8 (1957) 79—85.
67. Über einige Anwendungen von Hypermatrizen, deren Blöcke vertauschbar sind. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 37 (1957) 1—2.
68. Über eine Verallgemeinerung der Purcellschen Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. *Österreichisches Ingenieur—Archiv* 11 (1957) 249—251.
69. On rank-diminishing operations and their applications to the solution of linear equations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 11 (1960).
70. Bemerkungen zum Transportproblem, *MTW-Mitteilungen (Mathematisches Labor der Technischen Hochschule in Wien)* 5 (1958) 278—284.

71. Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 4 (1959) 15—28.
72. Notes on interpolation V. (On the stability of interpolation). *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 9 (1958) 259—267. (*Turán Pál*lal együtt.)
73. Notes on interpolation VI. (On the stability of the interpolation on an infinite interval). *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 10 (1959) 55—62. (*Turán Pál*lal együtt.)
74. On the application of matrices and hypermatrices in engineering analysis. *Mémoires et Publications de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut* (1959) 44—57.
75. Über eine konstruktive Methode zur Reduktion einer Matrix auf die Jordansche Normalform. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 10 (1959) 31—54.
76. Über eine Eigenschaft der Parabel und des Paraboloids. *Publicationes Mathematicae* 6 (1959).
77. Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzengleichung für beliebige Gebiete. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 11 (1960).

NÉHÁNY ÁLTALÁNOSABB MÓDSZER AZ EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK ELMÉLETÉBEN ÉS A FÜGGVÉNYEGYENLETEK EGYES ÚJABB ALKALMAZÁSAI, II.*

Írta: ACZÉL JÁNOS

II. 3 § Egyparaméteres transzformációk és inhomogén általánosításuk

A további itt tárgyalandó alkalmazások többváltozós függvényegyenletrendszerek, vektorfüggvényegyenletek, matrixfüggvényegyenletek megoldásait használják fel. Ezen egyenletek az általunk tárgyalt típusokhoz tartozó alakra hozható függvényegyenletek, vagy pedig az I. részben szerepelt feltételi függvényegyenletek általánosításai.

Először az n-dimenziós, egy paraméteres transzformációseregekkel foglalkozunk (vö. [37]). Ezeket az jellemzi, hogy két transzformáció „szorzata" (egymásutáni alkalmazása) is a sereghez tartozik. Ha az n-dimenziós vektortér vektorait nagy betűkkel ($X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, stb.), az egydimenziós paramétereket kis betűkkel és így az n-dimenziós térre értelmezett egyparaméteres transzformációt

$$Y=f(X, t)$$

-vel jelöljük, akkor a seregtulajdonság így írható:

$$F[F(X, s), t]=F(X, w)=F[X, g(s, t)]. \tag{8}$$

$F(X, t)$-ről feltesszük, hogy folytonos és „leosztható", vagyis, hogy

$$F(X, t_1)=F(X, t_2) \quad \text{csak akkor, ha} \quad t_1=t_2$$

és

$$F(X_1, t)=F(X_2, t) \Longrightarrow X_1=X_2.$$

Ebből már következik, hogy a $w=g(s, t)$ függvény, melyet a kényelmesebb írásmód kedvéért

$$w=g(s, t)=s \circ t$$

-nek is fogunk jelölni, folytonos és eleget tesz a leoszthatósági törvénynek,

* A dolgozat I. része az MTA III. Osztályának Közleményei IX/4. számában (1959. 375—422. old.) jelent meg. A paragrafusok és a tételek számozása az előző részek számozásához kapcsolódik. A teljes irodalomjegyzéket az I. rész tartalmazza.

vagyis

$$s\circ t_1 = s\circ t_2\text{-ből}\quad t_1 = t_2,$$

$$s_1\circ t = s_2\circ t\text{-ből}\quad s_1 = s_2$$

következik. Első állításunk a következő (vö. [21])

9_1. TÉTEL: *Ha az* $Y = F(X, t)$ *n-dimenziós egy paraméteres transzformációk seregtulajdonságát kifejező*

$$F[F(X, s), t] = F[X, s\circ t] \tag{8}$$

egyenlet akárcsak egy X-re (és minden s, t-re) teljesül, és ha az $F(X, t)$ *függvény leosztható és t-ben ennél az egy X-nél folytonos, akkor mindig bevezethető additív paraméter, azaz mindig van olyan folytonos és szigorúan monoton* $g(t)$ *függvény, mellyel*

$$F(X, t) = G[X, g(t)]$$

és

$$G[G(X, u), v] = G[X, u+v].$$

(A (8)*-on kívül feltett feltételeink helyettesíthetők* $F(X, t)$ *baloldali és* $s\circ t$ *jobboldali leoszthatóságával,*

$$F(X, t_1) = F(X, t_2),\ \textit{csak akkor, ha}\ \ t_1 = t_2$$

$$s_1\circ t = s_2\circ t\ \ \textit{csak akkor, ha}\ \ s_1 = s_2,$$

és $s\circ t$ *folytonosságával.)*

BIZONYÍTÁS: (8)-ból következik, hogy

$$w = s\circ t$$

asszociatív:

$$(s\circ t)\circ u = s\circ(t\circ u).$$

Valóban, (8)-ból

$$F(X, (s\circ t)\circ u) = F[F(X, s\circ t), u] = F\{F[F(X, s), t], u\} =$$
$$= F[F(X, s), t\circ u] = F[X, s\circ(t\circ u)],$$

tehát

$$(s\circ t)\circ u = s\circ(t\circ u)$$

a leoszthatóság miatt. Másrészt $w = s\circ t$ (ill. $F(X, t)$) folytonosságából és leoszthatóságából következik, hogy mindkét változóban *szigorúan monoton,* mert pl. az

$$f(s) = s\circ t_0$$

függvény folytonos és

$$f(s_1)=f(s_2) \text{ csak akkor, ha } s_1=s_2,$$

tehát $f(s)$ szigorúan monoton is.

Ezen túlmenően kimutatjuk, hogy

$$w=s\circ t$$

csak *növekvő* lehet mindkét változójában (vö. [17], [37]). Először is, ha pl. valamely $t=t_0$-ra $s\circ t_0$ az s-ben fogy (vagy nő), akkor minden t-re fogy, ill. nő (és hasonlóan a másik változónál). Mert ha $s_1<s_2$-re

$$s_1\circ t_0-s_2\circ t_0>0$$

és

$$s_1\circ t-s_2\circ t<0,$$

akkor van t_0 és t közt olyan τ, melyre

$$s_1\circ\tau-s_2\circ\tau=0,$$

tehát a leoszthatóság miatt $s_1=s_2$, ellentétben a feltett $s_1<s_2$-vel. — Ha mármost állításunkkal szemben $s\circ t$ pl. s-ben fogyó lehetne, akkor minden t-re $s_1<s_2$-nél

$$s_1\circ t>s_2\circ t$$

és

$$s_2\circ(t\circ u)<s_1\circ(t\circ u)=(s_1\circ t)\circ u<(s_2\circ t)\circ u=s_2\circ(t\circ u),$$

ami lehetetlen.

Kimutattuk tehát, hogy $s\circ t$ folytonos, szigorúan növekvő és asszociatív művelet (függvény), tehát az I. 1. § 1°. tétele szerint létezik oly folytonos és szigorúan monoton $g(t)$ függvény, melyre

$$s\circ t=g^{-1}[g(s)+g(t)].$$

De akkor (8)-ból

$$F[F(X,s),t]=F(X,g^{-1}[g(s)+g(t)]),$$

vagy a $g(s)=u$, $g(t)=v$ jelöléssel

$$F\{F[X,g^{-1}(u)],g^{-1}(v)\}=F[X,g^{-1}(u+v)].$$

Tehát bevezetve az

$$F(X,g^{-1}(u))=G(X,u),\quad F(X,s)=G[X,g(s)]$$

jelölést, éppen az állított

$$G[G(X,u),v]=G(X,u+v)$$

összefüggést kapjuk; qu. e. d. Ez az egyenlet egyébként n-dimenziós általánosítása az I. 4. § (26) egyenletének.

Most már az ilyen additív paraméterű transzformációseregekre bizonyítjuk az alábbi tételt.

9_2. TÉTEL. *Ha az $Y=F(X,t)$ transzformáció seregtulajdonságát és a paraméter additivitását kifejező*

$$F[F(X,u),v]=F[X,u+v] \tag{42}$$

vektor függvényegyenlet legalább egy $x_1=x_1^0$-ra és minden $x_2,\ldots,x_n,u,v$ érték mellett, tehát egy $(n-1)$ dimenziós $X^{(n-1)}=\{x_1^0,x_2,\ldots,x_n\}$ koordináta hipersíkról kiindulva teljesül, és ott a

$$\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n\}=\bar{X}=F(X^{(n-1)},u)=\bar{H}(X_n) \tag{43}$$

egyenlet $X_n=\{u,x_2,\ldots,x_n\}$-re nézve mindig egyértelműen megoldható, akkor (42) *az egész térben minden X-re szintén teljesül, és*

$$F(X,t)=\bar{H}[\bar{G}(X)+t],$$

ahol a $\bar{G}(X)$ vektor-vektorfüggvény a $\bar{H}$ inverze. A (42) *függvényegyenlet általános megoldása tehát*

$$F(X,t)=H[G(X)+t], \tag{44}$$

ahol $G(X)$ tetszőleges invertálható vektor-vektorfüggvény, H az inverze és az

$$X'+t=\{x_1',x_2',\ldots,x_n'\}+t=\{x_1'+t,x_2',\ldots,x_n'\}$$

vektor-skalár összeadáson azt értjük, hogy a vektor első komponenséhez adjuk a skalárt.

Vagyis feltevéseink mellett mindig létezik olyan

$$X'=G(X)$$

koordinátatranszformáció, amellyel az $Y=F(X,t)$ transzformációsereg az

$$\{y_1',y_2',\ldots,y_n'\}=Y'=X'+t=\{x_1'+t,x_2',\ldots,x_n'\} \tag{45}$$

koordinátapárhuzamos eltolásseregbe megy át.

Ilyen tételek eddig (ld. pl. [12]) differenciálhatósági feltételek mellett voltak ismeretesek.

Hogy az állítás két fogalmazása ekvivalens, az azonnal világos: (44)-ből

$$Y'=G(Y)=G(X)+t=X'+t$$

és ez éppen (45) és viszont.

A vektor és skalár összeadásának fenti értelmezése talán kissé szokatlan, de az itteni jó felhasználhatóságán (koordinátapárhuzamos eltolás leírására) kívül gondoljunk pl. arra, hogy komplex számokhoz és kvaternióhoz is így adunk skalárokat (valós számokat).

A tételt így *bizonyítjuk:*

Ha (42) teljesül $X = X^{(n-1)}$-re, akkor (43) jelölésével

$$F[\overline{H}(X_u), v] = \overline{H}(X_{u+v}) = \overline{H}(X_u + v)$$

a vektor-skalár összeadás értelmezése szerint. De a megoldhatósági feltétel szerint minden $\overline{X}$-hez van oly

$$X_u = \overline{G}(\overline{X}),$$

hogy

$$\overline{X} = \overline{H}(X_u),$$

tehát

$$F(\overline{X}, v) = \overline{H}[\overline{G}(\overline{X}) + v]$$

és ez a jelöléstől eltekintve éppen (44).

Fordítva, ha (44) fennáll, akkor (42) minden X-re (nemcsak az $X^{(n-1)}$-ekre) teljesül, mert G és H egymás inverzei lévén,

$$G[H(X')] = X'$$

és

$$F[F(X, u), v] = H\{G[F(X, u)] + v\} = H(G\{H[G(X) + u]\} + v) =$$
$$= H[G(X) + u + v] = F(X, u + v),$$

qu. e. d. Látjuk ebből azt is, hogy ha (42) egy $(n-1)$ dimenziós koordinátahipersíkon teljesül, akkor mindenütt teljesül az egész térben, és éppen ezt állítottuk.

Természetesen az x_1 helyett bármely más koordinátát is tarthatunk állandónak, ha arra könnyebben kimutatható a (42), (43) feltételek teljesülése.

A 9_1 és 9_2 tétel összekapcsolásával a (8) vektor függvényegyenlet általános megoldásául a 9_1 tétel feltételei és a (43) megoldhatóság feltevése mellett

$$F(X, t) = H[G(X) + g(t)]$$

adódik.

A (42) függvényegyenlet a stacionárius pont-mozgásokat is jellemzi, ha X-el jelöljük a pont helyét elindulásakor, t-vel (u-val, v-vel) az eltelt időt és $Y = F(X, t)$-vel a pont helyzetét a t időpontban.

Nem stacionárius mozgásoknál

$$Y = F(X, s, t)$$

-vel jelölve az s időpontban az X helyen levő pont helyét a t időpontban, a megfelelő függvényegyenlet

$$F[F(X, s, t), t, u] = F[X, s, u]. \tag{46}$$

Erre vonatkozik a

9_3. TÉTEL. *Ha a nem stacionárius mozgás* (46) *függvényegyenlete teljesül egy* $(n-1)$ *dimenziós* $X = X^{(n-1)} = \{x_1^0, x_2, \ldots, x_n\}$ *koordinátahipersíkon és ott bármely* t *mellett minden* $\overline{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$*-hez van oly* $(s, x_2, \ldots, x_n) = X_s = \bar{G}(\overline{X}, t)$ *vektor, hogy*

$$\overline{X} = F(X^{(n-1)}, s, t) = \overline{H}(X_s, t), \tag{47}$$

akkor (46) *minden* X*-re teljesül és*

$$F(X, t, u) = \overline{H}[\bar{G}(X, t), u].$$

A (46) *függvényegyenlet általános megoldása*

$$F(X, t, u) = H[G(X, t), u], \tag{48}$$

ahol $G(X, t)$ *tetszőleges függvény, melynek* $H(X', t)$ *az* X*-re vonatkozó inverze.*

Vagyis feltevéseink mellett létezik a tér egy önmagába való egy paramétertől függő

$$X'(t) = G(X, t)$$

transzformációja, mely tehát a tér minden X *pontjához egy mozgó* $X'(t)$ *pontot rendel, úgyhogy az*

$$Y = F(X, t, u)$$

nem stacionárius pontmozgásnak a mozgó $Y'(t)$ *és* $X'(t)$ *pontok közti, az*

$$Y'(u) = X'(t)$$

egyenlettel leírható megfelelkezés felel meg. (Az Y*-nak megfelelő* $Y'(t)$ *mozgópont az* u *időpontban ott van, ahol* $X'(t)$ *a* t *időpontban).* ($n=1$-re vö. [18].)

Világos, hogy a 9_2 tételben tárgyalt homogén esetben az $X'(t)$ pontmozgás éppen egy koordinátatengellyel párhuzamos eltolás.

Az állítás két alakjának ekvivalenciája itt is nyilvánvaló: (48)-ból és $H(X, t)$ értelmezéséből következik

$$Y'(u) = G(Y, u) = G(X, t) = X'(t)$$

és viszont.

A BIZONYÍTÁS menete a 9_2 tételéhez teljesen hasonló: (46) $X = X^{(n-1)}$-re (47) figyelembevételével

$$F[\overline{H}(X_s, t), t, u] = \overline{H}(X_s, u)$$

és így a megoldhatósági feltétel szerint minden $\overline{X}$-re

$$F(\overline{X}, t, u) = \overline{H}[\overline{G}(\overline{X}, t), u]$$

és ez éppen (48). Fordítva, (48)-ból

$$F[F(X, s, t), t, u] = H\{G[F(X, s, t), t], u\} =$$
$$= H(G\{H[G(X, s), t], t\}, u) = H[G(X, s), u] = F(X, s, u),$$

— ugyanis $H(X', t)$ a $G(X; t)$-nek X-re vonatkozó inverze lévén $G[H(X', t), t] = X'$, — tehát (46) minden X-re teljesül, qu. e. d.

Figyelemre méltó, hogy itt nem volt szükség semmiféle művelet definiálásra vektorok és skalárok közt.

Megemlíthető, hogy a (42), ill. (46) függvényegyenletnek az időben homogén, ill. inhomogén láncreakciók generátorfüggvényei is eleget tesznek (l. pl. [24]), bár eredményeinknek olyan valószínűségszámítási értelmezései, mint a fenti geometriai és mechanikai interpretációk, nem állnak rendelkezésre.

II. 4. § Többparaméteres transzformációk

Az előző §-ban tárgyalt

$$F[F(X, s), t] = F(X, s \circ t) \tag{8}$$

egyenlet megoldásának így is nekifoghattunk volna:

Feltételezzük a 9_1 tétel feltevésein túlmenőleg, hogy (8) egy $(n-1)$ dimenziós $X = X^{(n-1)} = \{x_1^0, x_2, \ldots, x_n\}$ koordinátahipersíkon teljesül, és hogy ott az

$$\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n\} = \overline{X} = F(X^{(n-1)}, s) = \overline{H}(X_s)$$

egyenlet $X_s = \{s, x_2, \ldots, x_n\}$-re mindig megoldható: $X_1 = \overline{G}(\overline{X})$.

Akkor megismételve a 9_1 tételből $s \circ t$ asszociativitásának bizonyítását, a gondolatmenetet így folytatjuk:

(8)-ból $\qquad X = X^{(n-1)}$-re

$$F[\overline{H}(X_s), t] = \overline{H}(X_s \circ t).$$

Ha $X' \circ t$-n ismét az

$$X' \circ t = \{x_1', x_2', \ldots, x_n'\} \circ t = \{x_1' \circ t, x_2', \ldots, x_n'\}$$

vektort értjük (természetesen ez az új művelet is asszociatív marad), akkor a feltételezett megoldhatóság figyelembevételével minden X-re

$$F(\overline{X}, t) = \overline{H}(X_s \circ t) = \overline{H}[\overline{G}(\overline{X}) \circ t].$$

A

(49) $$F(X, t) = H[G(x) \circ t]$$

függvénynek, ahol G tetszőleges invertálható vektor-vektorfüggvény és H az inverze $(G[H(X')] = X')$, behelyettesítése (8)-ba

$$F[F(X, s), t] = H\{G[F(X, s)] \circ t\} = H(G\{H[G(X) \circ s]\} \circ t) =$$
$$= H\{[G(X) \circ s] \circ t\} = H[G(X) \circ (s \circ t)] = F(X, s \circ t),$$

befejezi annak bizonyítását, hogy a (49) alakú függvények (8) általános megoldásai, és hogy fentebbi feltételeink mellett (8)-nak egy $(n-1)$ dimenziós koordinátahipersíkon való teljesüléséből mindenütt való teljesülése is következik.

(49)-ből természetesen az $s \circ t$ asszociatív folytonos függvény szigorúan növekvő voltát bizonyító meggondolás megismétlésével, (lásd a 9_1 tétel bizonyítását) az

$$s \circ t = g^{-1}[g(s) + g(t)]$$

előállítást adó 1° tétel alkalmazása ismét az előző §-ban is kimutatott

$$F(X, t) = H[G(X) + g(t)]$$

megoldáshoz visz el.

Másrészt a (49) megoldás ismét úgy is fogalmazható, hogy van oly

$$X' = G(X)$$

koordinátatranszformáció, mely az

$$Y = F(X, t)$$

egyparaméteres (n-dimenziós) transzformációt az egy koordinátatengellyel párhuzamos

$$Y' = X' \circ t$$

transzformációba viszi át, amely utóbbi koordinátatengellyel párhuzamos transzformációnál az $x_2', \ldots, x_n'$ komponensek változatlanul maradnak, míg az első x_1' komponens, mintha paraméter volna, „összeszorzódik" az $\circ$ művelet értelmében a t paraméterrel.

Ez nyilván közvetlen általánosítása a 9_2 tételben kapott eredménynek, ahol az $\circ$ művelet egyszerűen az összeadás volt.

Ezt az eredményt, illetve a vele ekvivalens (49)-et akarjuk most többparaméteres transzformációkra általánosítani (vö. [40]).

Különösen egyszerű a helyzet akkor, ha a paraméterek száma egyenlő a vektortér dimenziószámával, n-nel. Ekkor a (8)-at általánosító

(50) $$F[F(X, S), T] = F[X, G(S, T)] = F(X, S \circ T)$$

egyenlet (most már az S, T paraméterek is n-dimenziósak) teljesülését elég egy $X=A$-ra megkívánni, továbbá feltételezzük az

$$X=F(A,S)=H(S) \tag{51}$$

egyenlet egyértelmű megoldhatóságát, azt, hogy minden X-hez létezik egy oly

$$S=G(X),$$

melyre (51) teljesül ($G[H(S)]=S$).

Ekkor ugyanis (50)-ből $X=A$-ra

$$F[H(S),T]=H(S\circ T)$$

és megoldhatósági feltételünk szerint minden X-re

$$Y=F(X,T)=H[G(X)\circ T]. \tag{52}$$

Másrészt itt is megkapjuk $S\circ T$ asszociativitását:

$$\begin{aligned} F(A,(S\circ T)\circ U] &= F[F(A,S\circ T),U]=F\{F[F(A,S),T],U\}= \\ &= F[F(A,S),T\circ U]=F[A,S\circ(T\circ U\}, \end{aligned} \tag{53}$$

tehát az (egyértelmű) megoldhatósági feltétel miatt

$$(S\circ T)\circ U=S\circ(T\circ U).$$

Ebből már következik, hogy az (52) függvények minden X-re kielégítik az (50) függvényegyenletet:

$$\begin{aligned} F[F(X,S),T] &= H\{G[F(X,S)]\circ T\}=H(G\{H[G(X)\circ S]\}\circ T)= \\ &= H\{[G(X)\circ S]\circ T\}=H[G(X)\circ(S\circ T)]=F(X,S\circ T). \end{aligned} \tag{54}$$

Tehát az (50) függvényegyenletnek (52) az általános megoldása és a fenti megoldhatósági feltétel mellett, ha (50) egy $X=A$-ra (és minden $S\circ T$-re) fennáll, akkor az egész X vektortérben is teljesül.

(52) itt is átírható a következőképpen:

$$Y'=X'\circ T,\quad [X'=G(X)].$$

Mindezen speciális eredményeket tartalmazza a

10. TÉTEL. *Ha $Y=F(X,T)$ m paraméterű transzformáció ($T=\{t_1,t_2,\ldots,t_m\}$) az $n\geqq m$ dimenziós térben és a seregjelleget kifejező*

$$F[F(X,S),T]=F(X,S\circ T) \tag{50}$$

függvényegyenlet legalább egy $X=X^{(n-m)}=\{\overset{0}{x}_1,\ldots,\overset{0}{x}_m,x_{m+1},\ldots,x_n\}$ $(n-m)$

dimenziós koordinátahipertérben teljesül, továbbá $[X^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}]$

(55) $$F(X^0, T_1) = F(X^0, T_2)\text{-ből } T_1 = T_2 \text{ következik,}$$

végül az

(56) $$\overline{X} = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\} = F(X^{(n-m)}, S) = \overline{H}(X_S)$$

egyenlet $X_S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$*-re mindig egyértelműen megoldható:*

$$X_S = \overline{G}(\overline{X}),$$

akkor (50) *minden X-re teljesül és*

(57) $$F(X, T) = \overline{H}[\overline{G}(\overline{X}) \circ T].$$

Itt

$$S \circ T = \{g_1(s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m), \ldots, g_m(s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)\}$$

mellett az n-dimenziós X' *vektor és az* $m \leq n$ *dimenziós* T *paraméter közötti* $X' \circ T$ *műveletet így értelmezzük:*

(58) $$X' \circ T = \{g_1(x'_1, \ldots, x'_m; t_1, \ldots, t_m), \ldots \\ \ldots, g_m(x'_1, \ldots, x'_m; t_1, \ldots, t_m), x'_{m+1}, \ldots, x'_n\}.$$

(50) *általános megoldása feltételeink mellett*

(52) $$F(X, T) = H[G(X) \circ T],$$

ahol $G(X)$ *tetszőleges invertálható vektor-vektorfüggvény, melynek* H *az inverze* $(G[H(X')] = X')$.

Vagyis feltevéseink mellett létezik olyan

$$X' = G(X)$$

koordinátatranszformáció, amellyel $Y = F(X, T)$

$$Y' = X' \circ T$$

-be megy át, ahol $X' \circ T$ *a fentebb értelmezett vektorparaméter művelet.*

Az állítás két alakjának ekvivalenciája itt is nyilvánvaló.

A BIZONYÍTÁS is az eddigiekkel teljesen analóg:

1. $S \circ T$ asszociatív, mert (50)-ből $X = X^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\}$-ra

$$F[X^0, (S \circ T) \circ U] = F[X^0, S \circ (T \circ U)],$$

ahogy azt előbb (53) alatt bizonyítottuk és az (55) feltételből

$$(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U).$$

Vele az (58) vektor-paraméter-művelet is asszociatív.

2. (57) bizonyítása: (50)-ből $X = X^{(n-m)}$-re az (56) jelöléssel

$$F[\overline{H}(X_S), T] = \overline{H}(X_{S \circ T}),$$

vagy az (58) műveletdefiníció figyelembevételével

$$F[\overline{H}(X_S), T] = \overline{H}(X_S \circ T).$$

Az (56) megoldhatósági feltételből minden X-re

$$F(\overline{X}, T) = \overline{H}[G(\overline{X}) \circ T]$$

és ez éppen (57). Egyúttal látjuk, hogy (50) megoldása csak (52) alakú lehet.

3. Másrészt (52) mindig kielégíti (50)-et (minden G, X, S, T mellett); ez pontosan megegyezik az (54) meggondolással. Így az (52) alakú függvények feltételeink mellett az (50) egyenlet általános megoldásai.

2.—3.-ból az is következik, hogy feltevéseink mellett, ha (50) $X = X^{(n-m)}$-re teljesül, akkor minden X-re is érvényes.

Ezzel a 10. tételt bebizonyítottuk.

Más feltevések mellett hasonló tétel bizonyítható az $m \geqq n$ esetben is. A 9_3. tétel kérdésköre is általánosítható több paraméterre.

II. 5. § Inhomogén összetett Poisson-eloszlások

A még hátralevő alkalmazások valószínűségszámítási vonatkozásúak. Ilyen pl. a következő (vö. [30]):

Jelölje $p_k(t, u)$ $(a \leqq t \leqq u \leqq b$, pl. $b = +\infty$ is lehet) annak a valószínűségét, hogy egy esemény a (t, u) időszakaszban k-szor következik be. Feltételezzük, hogy az (s, t) időszakaszban bekövetkező események száma független az (u, v) $(s \leqq t \leqq u \leqq v)$ szakaszbeli eseményszámtól (inhomogén MARKOV-folyamat), és hogy az is lehetséges, hogy az esemény nem fordul elő $(p_0(a, b) \neq 0)$.

Akkor

$$(59) \qquad p_n(s, u) = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(s, t) p_k(t, u), \quad (a \leqq s \leqq t \leqq u \leqq b;\; n = 0, 1, 2, \ldots),$$

mert az esemény az (s, u) időszakaszban úgy fordulhat elő n-szer, hogy már (s, t)-ben n-szer és (t, u)-ban 0-szor, vagy (s, t)-ben $(n-1)$-szer és (t, u)-ban egyszer, vagy ..., vagy (s, t)-ben $(n-k)$-szor és (t, u)-ban k-szor, vagy ..., vagy (s, t)-ben 0-szor és (t, u)-ban n-szer következik be.

A következőben az (59) függvényegyenletrendszert oldjuk meg a $p_0(a, b) \neq 0$ feltétel mellett.

11. TÉTEL. *Az (59) függvényegyenletrendszer általános megoldása a $p_0(a, b) \neq 0$ feltétel mellett*

$$p_k(t, u) = \frac{\pi(u)}{\pi(t)} \sum_{r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k} \prod_{j=1}^{k} \frac{[f_j(u)-f_j(t)]^{r_j}}{r_j!}. \tag{60}$$

BIZONYÍTÁS: Függvényegyenleteinket szukcesszíve oldjuk meg. (59) $n=0$-ra

$$p_0(s, u) = p_0(s, t) p_0(t, u). \tag{61}$$

Mivel $p_0(a, b) \neq 0$, a fortiori $p_0(s, t) \neq 0$ és így

$$p_0(t, u) = \frac{p_0(s, u)}{p_0(s, t)},$$

vagy $s=a$ fixen tartásával és a $p_0(a, t) = \pi(t)$ jelöléssel

$$p_0(t, u) = \frac{\pi(u)}{\pi(t)}. \tag{62}$$

Tehát (61) megoldása csak (62) alakú lehet. Fordítva is (62)-ből (61) következik:

$$p_0(s, t) p_0(t, u) = \frac{\pi(t)}{\pi(s)} \frac{\pi(u)}{\pi(t)} = \frac{\pi(u)}{\pi(s)} = p_0(s, u),$$

tehát (61)-nek (minden folytonossági stb. feltevés nélkül) (62) az általános megoldása. (Egyébként a mi $0 < p_0(t, u) \leqq 1$ feltételeink mellett $\pi(t)$ nem vált jelet, nem tűnik el, pozitív és csökkenő.)

Szükségünk lesz még a

$$g(s, u) = g(s, t) + g(t, u) \tag{63}$$

függvényegyenlet megoldására (mely egyébként ekvivalens (61)-gyel). Az $s=a$ helyettesítéssel

$$g(t, u) = g(a, u) - g(a, t) = f(u) - f(t)$$

és (63) általános megoldása (szintén mindennemű folytonossági vagy monotonitási, mérhetőségi stb. feltétel nélkül) valóban

$$g(t, u) = f(u) - f(t),$$

mert fordítva is

$$g(s, t) + g(t, u) = f(t) - f(s) + f(u) - f(t) = f(u) - f(s) = g(s, u).$$

A (61), (63) függvényegyenletek szemmelláthatóan az I. 1. §-ban tárgyalt CAUCHY-féle ([2])

$$f(x+y) = f(x) f(y) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

egyenletek általánosításai.

Meggondolásainkat folytatva, most $n=1$-re végezzük el (59) megoldását:

$$p_1(s, u)=p_1(s, t)p_0(t, u)+p_0(s, t)p_1(t, u).$$

Ezt az egyenletet (61)-gyel osztva és a

$$\frac{p_1(t, u)}{p_0(t, u)}=g_1(t, u)$$

jelölést vezetve be a

$$g_1(s, u)=g_1(s, t)+g_1(t, u) \tag{63}$$

függvényegyenlethez jutunk, tehát

$$g_1(t, u)=f_1(u)-f_1(t),$$

amiből

$$p_1(t, u)=p_0(t, u)[f_1(u)-f_1(t)]=\frac{\pi(u)}{\pi(t)}[f_1(u)-f_1(t)]. \tag{64}$$

($p_1(t, u)\geqq 0$-ból $f_1(u)$ növekvőnek adódik.)

Hasonlóan, $n=2$-re

$$p_2(s, u)=p_2(s, t)p_0(t, u)+p_1(s, t)p_1(t, u)+p_0(s, t)p_2(t, u).$$

Ismét (61)-gyel osztva és (64)-et figyelembe véve,

$$\frac{p_2(s, u)}{p_0(s, u)}=\frac{p_2(s, t)}{p_0(s, t)}+[f_1(t)-f_1(s)]\;[f_1(u)-f_1(t)]+\frac{p_2(t, u)}{p_0(t, u)}.$$

Mindkét oldalból

$$\frac{[f_1(u)-f_1(s)]^2}{2}=\frac{[f_1(u)-f_1(t)]^2}{2}+[f_1(u)-f_1(t)]\;[f_1(t)-f_1(s)]+\frac{[f_1(t)-f_1(s)]^2}{2}$$

-t levonva, a

$$g_2(t, u)=\frac{p_2(t, u)}{p_0(t, u)}-\frac{[f_1(u)-f_1(t)]^2}{2}$$

jelöléssel a (63) függvényegyenletet kapjuk:

$$g_2(s, u)=g_2(s, t)+g_2(t, u),$$

tehát

$$p_2(t, u)=\frac{\pi(u)}{\pi(t)}\left\{f_2(u)-f_2(t)+\frac{[f_1(u)-f_1(t)]^2}{2!}\right\}. \tag{65}$$

Továbbá, $n=3$-ra

$$p_3(s, u)=p_3(s, t)p_0(t, u)+p_2(s, t)p_1(t, u)+p_1(s, t)p_2(t, u)+p_0(s, t)p_3(t, u).$$

(61)-gyel osztva és (64), (65)-öt behelyettesítve

$$\frac{p_3(s,u)}{p_0(s,u)}=\frac{p_3(s,t)}{p_0(s,t)}+\left\{f_2(t)-f_2(s)+\frac{[f_1(t)-f_1(s)]^2}{2}\right\}[f_1(u)-f_1(t)]+$$

$$+[f_1(t)-f_1(s)]\left\{f_2(u)-f_2(t)+\frac{[f_1(u)-f_1(t)]^2}{2}\right\}+\frac{p_3(t,u)}{p_0(t,u)},$$

ami a

$$g_3(t,u)=\frac{p_3(t,u)}{p_0(t,u)}-[f_1(u)-f_1(t)][f_2(u)-f_2(t)]-\frac{[f_1(u)-f_1(t)]^3}{3!}$$

jelöléssel ismét a

$$g_3(s,u)=g_3(s,t)+g_3(t,u),\quad g_3(t,u)=f_3(u)-f_3(t)$$

egyenlet adja. Így

$$p_3(t,u)=\frac{\pi(u)}{\pi(t)}\left\{f_3(u)-f_3(t)+[f_1(u)-f_1(t)][f_2(u)-f_2(t)]+\frac{[f_1(u)-f_1(t)]^3}{3!}\right\}, \tag{66}$$

és így tovább.

A (62), (64), (65), (66) képletek igazolják (60)-at, $n=0, 1, 2, 3$-ra. — Természetesen elég lett volna (60)-at $n=0$-ra (azaz a (62) képletet) igazolni és alkalmazni a teljes indukciót. Azonban a bonyolultabb eredmény és indukciós okoskodás előkészítésére igazoltuk a (64), (65), (66) képleteket is.

Ha (60)-at érvényesnek tesszük fel minden $k<n$-re, akkor az (59) és (61) egyenletekből

$$\frac{p_n(s,u)}{p_0(s,u)}=\frac{p_n(s,t)}{p_0(s,t)}+\frac{p_n(t,u)}{p_0(t,u)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k\\ \varrho_1+2\varrho_2+\cdots+(n-k)\varrho_k=n-k}}\prod_{j=1}^{k}\frac{[f_j(u)-f_j(t)]^{r_j}}{r_j!}\prod_{j=1}^{n-k}\frac{[f_j(t)-f_j(s)]^{\varrho_j}}{\varrho_j!}.$$

A

$$g(t,u)=\frac{p_n(t,u)}{p_0(t,u)}-\sum_{r_1+2r_2+\ldots+(n-1)r_{n-1}=n}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{[f_j(u)-f_j(t)]^{r_j}}{r_j!}$$

jelöléssel ismét

$$g(s,u)=g(s,t)+g(t,u),\ g(t,u)=f_n(u)-f_n(t),$$

$$p_n(t,u)=p_0(t,u)\left\{\sum_{r_1+2r_2+\ldots+(n-1)r_{n-1}=1}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{[f_j(u)-f_j(t)]^{r_j}}{r_j!}+f_n(u)-f_n(t)\right\}$$

és ez éppen a (60) képlet $k=n$-re, qu. e. d.

Ezzel a 11. tételt igazoltuk.

Valószínűségszámítási problémánkat tovább nem részletezzük, mert egyrészt megtalálható a [30] dolgozatban, másrészt a további eljárás a régebbi [25] dolgozat gondolatmenetéhez teljesen hasonló. Pl. a

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t, u) = 1 \tag{67}$$

függvényegyenlet is teljesül, mert az nyilván biztos, hogy a (t, u) időszakaszban az esemény vagy 0-szor, vagy 1-szer, vagy 2-szer, ..., vagy valahányszor, de előfordul. Ekkor (lásd [30])

$$\sum_{j=1}^{\infty} [f_j(u) - f_j(t)] = \ln \pi(t) - \ln \pi(u). \tag{68}$$

Az összeg értékét pl. a (60) és (67)-ből következő

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t, u) = \frac{\pi(u)}{\pi(t)} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{[f_j(u) - f_j(t)]^r}{r!} \right) =$$

$$= \frac{\pi(u)}{\pi(t)} \prod_{j=1}^{\infty} e^{f_j(u) - f_j(t)} = \frac{\pi(u)}{\pi(t)} e^{\sum_{j=1}^{\infty} [f_j(u) - f_j(t)]}$$

egyenletből nyerjük. Logaritmálással $(\pi(t) > 0)$ éppen a bizonyítandó (68)-at kapjuk. Így végül is

$$p_k(t, u) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} [f_n(t) - f_n(u)]} \sum_{r_1 + 2r_2 + \ldots + kr_k = k} \prod_{j=1}^{k} \frac{[f_j(u) - f_j(t)]^{r_j}}{r_j!} \geqq 0, \tag{69}$$

ahol az $f_n(t)$ függvények tetszőlegesek, de a kitevőben szereplő végtelen sor konvergens (inhomogén összetett POISSON eloszlás). Ha még a

$$\lim_{u \to t} \frac{1 - p_0(t, u)}{p_1(t, u)} = 1$$

ritkasági feltételt is kikötjük (rövid időszakaszban annak a valószínűsége, hogy az esemény egyszer következik be, aszimptotikusan egyenlő annak valószínűségével, hogy legalább egyszer fordul elő: közönséges POISSON folyamat), akkor

$$p_k(t, u) = e^{f(t) - f(u)} \cdot \frac{[f(u) - f(t)]^k}{k!}. \tag{70}$$

Így az általános esetben

$$p_k(t, u) = \sum_{r_1+2r_2+\ldots+kr_k=k} p_{r_1}^{(1)}(t, u)p_{r_2}^{(2)}(t, u)\ldots p_{r_k}^{(k)}(t, u) \prod_{j=k+1}^{\infty} p_0^{(j)}(t, u),$$

ahol $p_n^{(j)}(t, u) = e^{f_j(t)-f_j(u)} \frac{[f_j(u)-f_j(t)]^n}{n!}$, tehát az általános inhomogén MARKOV-folyamat végtelen sok független közönséges POISSON-folyamat összegének tekinthető, melynél az n-dik folyamatban „eseményen” n darab esemény bekövetkezését értjük. (Ezt A. N. KOLMOGOROV egy szóbeli közlésben 1950-ben homogén folyamatokra sejtésként mondta ki.)

(69)-hez hasonló eredményt bizonyított RÉNYI A. korábban ([26]) egy második ritkasági feltétel mellett. A (70) képletet differenciálhatósági feltételek mellett, a homogén esetben lásd pl. [11]-ben.

A homogén esetben a p_k valószínűség k-n kívül csak az időszakasz hosszától függ. Itt egyenleteink így módosulnak:

$$p_n(t+u) = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k}(t)p_k(u) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1$$

([22]). Ezen egyenletrendszer egyenletei (1) típusú egyenletekre vezethetők vissza. A megoldás a homogén esetben ([25]):

$$p_k(t) = e^{-\sum_{n=1}^{\infty} c_n t} \sum_{r_1+2r_2+\ldots kr_k=k} \prod_{j=1}^{k} \frac{(c_j t)^{r_j}}{r_j!}.$$

II. 6. § Inhomogén átmeneti valószínűségek

Az előző §-ban tárgyalttal rokon a következő probléma (vö. pl. [34], [10], [39]):

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ legyenek egy részecske lehetséges állapotai. Annak valószínűségét, hogy a t időpontban az E_i állapotban levő részecske az u időpontban az E_j állapotban lesz, jelöljük

$$p_{ij}(t, u) \qquad (t \leq u;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

-vel.

Itt is legyenek függetlenek az (s, t) időben történő átmenetek a (t, u) időközben történőktől. Feltesszük továbbá, hogy a

$$P(s, t) = \| p_{ij}(s, t) \|$$

matrix reguláris legalább $s = a$-nál, $|p_{ij}(a, t)| \neq 0$.

Ekkor nyilván az előző §-ban részletezett gondolatmenethez teljesen hasonlóan

$$p_{ij}(s,u)=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(s,t)p_{kj}(t,u) \qquad (a\leqq s\leqq t\leqq u;\ i,j=1,2,\dots,n), \tag{9}$$

mert az s időpontbeli E_i állapotból az u időpontbeli E_j állapotba a részecske úgy mehet át, hogy a közbenső t időpontban az E_k állapotban $(k=1,2,\dots,n)$ van. Továbbá

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t,u)=1, \tag{10}$$

mert a t időpontbeli E_i állapotból valamelyik E_j $(j=1,2,\dots,n)$ állapotba biztosan átmegy a részecske (beleértve az E_i állapotban maradást, illetve oda visszatérést is).

A (9) függvényegyenletrendszer nyilván ekvivalens a

$$P(s,u)=P(s,t)\,P(t,u) \tag{71}$$

matrixfüggvényegyenlettel, mely az előző §-beli (61) függvényegyenletnek matrix-általánosítása, tehát az (1) típusú CAUCHY [2]-féle $f(x+y)=f(x)+f(y)$ függvényegyenlet inhomogén matrix-általánosítása.

Ezeknek az egyenleteknek a megoldásával foglalkozunk a jelen §-ban.

12_1. TÉTEL. *Ha a* $P(s,t)=\|p_{ij}(s,t)\|$ *függvénymatrix reguláris, legalábbis az* $s=a$ *pontban, és ott teljesül a* (71) *matrixfüggvényegyenlet, illetve a vele ekvivalens* (9) *függvényegyenletrendszer, akkor és csakis akkor P mindenütt reguláris, és* (71) *mindenütt teljesül.* (71) *általános megoldása*

$$P(t,u)=\Pi(t)^{-1}\Pi(u), \tag{72}$$

ahol $\Pi(t)$ *tetszőleges* $\Pi_{ij}(t)$ *függvényekből álló reguláris matrix. Ennek megfelelően*

$$p_{ij}(t,u)=\sum_{k=1}^{n}\Pi_{ki}(t)\pi_{kj}(u) \qquad (i,j=1,2,\dots,n), \tag{73}$$

ahol $\Pi_{ki}(t)$ *a* $\pi_{ki}(t)$ *elem algebrai minora, osztva a* $|\Pi_{ki}(t)|$ *determinánssal.*

BIZONYÍTÁS: (71)-ből $s=a$-val

$$P(t,u)=P(a,t)^{-1}P(a,u)=\Pi(t)^{-1}\Pi(u),$$

$[\Pi(t)=P(a,t)]$ mert $P(a,t)$ reguláris lévén, van inverze, és avval szoroztuk jobbról (71)-et. De ez éppen (72). Látjuk, hogy $P(t,u)$ mindenütt reguláris. Fordítva (72)-ből (71) következik minden s-re:

$$P(s,t)P(t,u)=\Pi(s)^{-1}\Pi(t)\Pi(t)^{-1}\Pi(u)=\Pi(s)^{-1}\Pi(u)=P(s,u)$$

qu. e. d.

(72)-t kifejtve kapjuk a (73) képletet. Ez tartalmazza a fenti 11. tételt is, ha

$$p_{ij}(t, u) = \begin{cases} p_{j-i}(t, u), & \text{ha} \quad j \geqq i \\ 0 & \text{ha} \quad j < i \end{cases}$$

vagyis, ha

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots & p_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & p_0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a megoldás (73)-ból,

$$p_k(t, u) = \sum_{j=0}^{k} \Pi_j(t) \pi_{k-j}(u),$$

ahol $\pi_n(u)$ tetszőleges, hacsak $\pi_0(u) \neq 0$ és

$$\Pi_0(t) = \frac{1}{\pi_0(t)}, \quad \Pi_j(t) = \frac{(-1)^j}{\pi_0(t)^{j+1}} \begin{vmatrix} \pi_1(t) & \pi_2(t) & \cdots & \pi_j(t) \\ \pi_0(t) & \pi_1(t) & \cdots & \pi_{j-1}(t) \\ 0 & \pi_0(t) & & \pi_{j-2}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \pi_1(t) \end{vmatrix}.$$

Pl.

$$p_2(t, u) = \frac{\pi_0(t)^2 \pi_2(u) - \pi_0(t) \pi_1(t) \pi_1(u) + [\pi_1(t)^2 - \pi_0(t) \pi_2(t)] \pi_0(u)}{\pi_0(t)^3} =$$

$$= \frac{\pi_0(u)}{\pi_0(t)} \left[\frac{\pi_2(u)}{\pi_0(u)} - \frac{\pi_1(t)}{\pi_0(t)} \frac{\pi_1(u)}{\pi_0(u)} + \left(\frac{\pi_1(t)}{\pi_0(t)} \right)^2 - \frac{\pi_2(t)}{\pi_0(t)} \right] =$$

$$= \frac{\pi_0(u)}{\pi_0(t)} \left\{ f_2(u) - f_2(t) + \frac{[f_1(u) - f_1(t)]^2}{2!} \right\}$$

$$\left[f_1(u) = \frac{\pi_1(u)}{\pi_0(u)}, \; f_2(u) = \frac{\pi_2(u)}{\pi_0(u)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi_1(u)}{\pi_0(u)} \right)^2 \right]$$

vagyis visszakaptuk a (65) formulát, és ugyanígy megkaphatjuk (60)-at, majd

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(t, u) = 1, \quad p_j(t, u) \geqq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(t) = 1, \quad \pi_j(t) \geqq 0$$

-ból

(68) $$\sum_{j=1}^{\infty} [f_j(u) - f_j(t)] = \ln \pi_0(t) - \ln \pi_0(u)$$

-t is.

12_2. TÉTEL. *Ha a* $\|p_{ij}(s,t)\|$ *matrix legalábbis az* $s=a$ *pontban reguláris, és ott teljesülnek a*

$$p_{ij}(s,u)=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(s,t)p_{kj}(t,u), \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s,t)=1 \tag{10}$$

függvényegyenletek, akkor ezek minden s-re teljesülnek és

$$p_{ij}(t,u)=\sum_{k=1}^{n} \Pi_{ki}(t)\pi_{kj}(u) \qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

-ben

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_{kj}(t)=\text{konstans} \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

BIZONYÍTÁS: A 12_1. tétel szerint a feltételekből következő (73) képletet behelyettesítve (10)-be $s=a$ mellett látjuk, hogy

$$1=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(a,t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Pi_{ki}(a)\pi_{kj}(t) \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Ezen egyenleteket $\pi_{li}(a)$-val szorozva és i-re összegezve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_{li}(a)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \pi_{li}(a)\Pi_{ki}(a)\pi_{kj}(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{kl}\pi_{kj}(t)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\pi_{lj}(t) \qquad (l=1,2,\ldots,n),$$

($\delta_{kl}=0$, ha $l\neq k$ és $\delta_{kk}=1$), tehát valóban

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_{kj}(t)=\text{konstans} \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Fordítva, ha $\sum_{j=1}^{n}\pi_{kj}(t)$ minden k-ra konstans, akkor

$$\sum_{j=1}^{n}\pi_{kj}(t)=\sum_{j=1}^{n}\pi_{kj}(s)$$

és minden i-re

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s,t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Pi_{ki}(s)\pi_{kj}(t)=\sum_{k=1}^{n}\Pi_{ki}(s)\sum_{j=1}^{n}\pi_{kj}(s)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Pi_{ki}(s)\pi_{kj}(s)=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}=1,$$

vagyis (10) minden s-re teljesül, qu. e. d.

Így annak valószínűsége, hogy egy részecske, mely a t időpontban az E_i állapotban volt, az u időpontban az E_i állapotban lesz, a valószínűségmatrix regularitása esetén mindig ilyen alakba írható:

$$p_{ij}(t, u) = \sum_{k=1}^{n} \Pi_{ki}(t)\pi_{kj}(u) \geqq 0,$$

ahol a $\pi_{kj}(t)$ függvényekre a $|\pi_{kj}(t)| \neq 0$ és a $\sum_{j=1}^{n} \pi_{kj}(t) = \text{konstans}$ megkötés áll, különben tetszőlegesek és $\Pi_{kj}(t)$ a $\pi_{kj}(t)$ algebrai minora, osztva a $|\pi_{kj}(t)|$ determinánssal. $\left(\sum_{k=1}^{n} \Pi_{ki}(t) \text{ is konstans}\right)$.

Vázoljuk a megfelelő meggondolást a szinguláris esetben is.

Azokra a t-kre, ahol $P(a, t)$ reguláris, ott a $P(t, u)$ matrixra vonatkozó (72)—(73) képletek változatlanul érvényesek, ill. $\sum_{j=1}^{n} \pi_{kj}(t)$ is konstans.

Ha $\Pi(t) = P(a, t)$ szinguláris és r-edrangú, akkor legyen pl. első $r \cdot r$-es főminora $\Pi^1(t)$ reguláris. Vezessük be a

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi^1 & \Pi^3 \\ \Pi^2 & \Pi^4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

jelöléseket (P_1, Π_1, r soros, n oszlopos, P_2, Π_2 $(n-r)$ soros, n oszlopos, Π^1 r soros r oszlopos, Π^2 $(n-r)$ soros r oszlopos, Π^3 r soros $(n-r)$ oszlopos, Π^4 $(n-r)$ soros $(n-r)$ oszlopos matrixok).

Így (71)-ből

$$\begin{pmatrix} \Pi^1(t) & \Pi^3(t) \\ \Pi^2(t) & \Pi^4(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t, u) \\ P_2(t, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1(u) \\ \Pi_2(u) \end{pmatrix}.$$

Balról szorozva $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ -\Pi^2(t)\Pi^1(t)^{-1} & \mathrm{I} \end{pmatrix}$-gyel (0 a nulla-, I az egységmatrix) és figyelembe véve, hogy a $\Pi(t)$ matrix rangja r, a

$$\begin{pmatrix} \Pi^1(t) & \Pi^3(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t, u) \\ P_2(t, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi^1(t)P_1(t, u) + \Pi^3(t)P_2(t, u) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Pi_1(u) \\ -\Pi^2(t)\Pi^1(t)^{-1}\Pi_1(u) + \Pi_2(u) \end{pmatrix}$$

egyenletet kapjuk.

Tehát a *megoldás*

$$\Pi^1(t)P_1(t,u)+\Pi^3(t)P_2(t,u)=\Pi_1(u),$$

$$P_1(t,u)=\Pi^1(t)^{-1}\Pi_1(u)-\Pi^1(t)^{-1}\Pi^3(t)P_2(t,u)$$

$$p_{ij}(t,u)=\sum_{k=1}^{r}\Pi_{ki}(t)\pi_{kj}(u)-\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=r+1}^{n}\Pi'_{ki}(t)\pi_{km}(t)p_{mj}(t,u)$$

$$(i=1,2,\ldots,r;\ j=1,2,\ldots,r,\ldots,n),$$

ahol $\Pi'_{ki}(t)$ *a* $\pi_{ki}(t)$ *algebrai minora* $\Pi^1(t)$*-ben, osztva* $|\Pi^1(t)|$*-vel, tehát* $p_{ij}(t,u)$ $p_{mj}(t,u)$*-val van kifejezve* $(m=r+1,\ldots,n)$, *és a kompatibilitási feltétel*

$$\Pi_2(u)=\Pi^2(t)\Pi^1(t)^{-1}\Pi_1(u),$$

tehát

$$\pi_{mj}(u)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\pi_{mi}(t)\Pi'_{ki}(t)\pi_{kj}(u) \qquad (m=r+1,\ldots n;\, j=1,\ldots r,\ldots n)$$

vagyis *a jobboldal itt független t-től.*

Ezen egyenletek közül a $j=1,2,\ldots,r$-re vonatkozókat $\Pi'_{lj}(u)$-val szorozva és j-re összegezve

$$\sum_{j=1}^{r}\pi_{mj}(u)\Pi'_{lj}(u)=\sum_{i=1}^{r}\pi_{mi}(t)\Pi'_{li}(t),$$

tehát $\sum_{i=1}^{r}\pi_{mi}(t)\Pi'_{li}(t)=a_{ml}=$ konstans $(m=r+1,\ldots n;\ l=1,\ldots r)$. Fordítva, ha ez teljesül, akkor a kompatibilitási feltétel ki van elégítve:

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\pi_{mi}(t)\Pi'_{ki}(t)\pi_{kj}(u)=\sum_{k=1}^{r}a_{mk}\pi_{kj}(u)$$

tényleg független t-től. A kompatibilitási feltétel harmadik alakja: a $(\Pi(t))$ és a $(\Pi(t)\,\Pi(u))$ matrix *egyenlő rangú.*

(10)-ből

$$1=\sum_{j=1}^{u}p_{ij}(t,u)=\sum_{j=1}^{u}\sum_{k=1}^{r}\Pi'_{ki}(t)\pi_{kj}(u)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=r+1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\Pi'_{ki}(t)\pi_{km}(t)p_{mj}(t,u).$$

Megszorozva $\pi_{li}(t)$-vel $(l=1,2,\ldots,r)$ és i-re összegezve

$$\sum_{i=1}^{r}\pi_{li}(t)=\sum_{j=1}^{u}\pi_{lj}(u)-\sum_{j=1}^{u}\sum_{m=r+1}^{u}\pi_{lm}(t)p_{mj}(t,u),$$

tehát *a jobboldal független u-tól*, amiből fordítva is következik (10) $i=1,2,\ldots,r$-re.

* * *

Meggondolásainkban nem törekedtünk maximális általánosságra. Az általánosítási lehetőségekre példának itt röviden tárgyalunk még három általános függvényegyenletet általános terekben.

Az (1) és (71) egyenletek általánosításaként az

$$f(x, z) = G[f(x, y), f(y, z)] = f(x, y) \circ f(y, z)$$

függvényegyenletet vizsgáljuk teljesen általános terekben.

13. TÉTEL. *Az $f(x, y)$ egyértékű függvények értelmezési tartománya és értékkészlete legyen egy-egy teljesen tetszőleges A ill. B sokaság. Továbbá a B sokaságban legyen a $G(u, v) = u \circ v$ művelet (függvény) értelmezve, melynek értékei is B-be esnek. Ha az $u \circ v$ művelet a B sokaságban csoportot alkot, akkor létezik olyan $f(x, y)$ függvény, melyre a*

$$f(x, z) = f(x, y) \circ f(y, z) \tag{74}$$

függvényegyenlet minden A-beli x, y, z-re teljesül.

Ha $u \circ v$ csoport-művelet és a (74) függvényegyenlet egy z-re (vagy x-re) és minden x, y-ra (ill. y, z-re) fennáll, akkor minden x, y, z-re teljesül és általános megoldása

$$f(x, y) = g(x) \circ g(y)^{-1},$$

ahol u^{-1} az u elem inverze az $\circ$ művelet értelmében és $g(x)$ tetszőleges függvény, melynek értelmezési tartománya A és értékkészlete B-ben van.

BIZONYÍTÁS: Ha (74) $z = z_0$-ra teljesül, akkor

$$f(x, z_0) = f(x, y) \circ f(y, z_0)$$

és az $\circ$ művelet csoporttulajdonsága miatt $f(y, z_0)$-nak létezik $f(y, z_0)^{-1}$ inverz eleme, amellyel egyenletünket „megszorozzuk" (az $\circ$ művelet értelmében):

$$f(x, y) = f(x, z_0) \circ f(y, z_0)^{-1},$$

vagy a $g(x) = f(x, z_0)$ jelöléssel

$$f(x, y) = g(x) \circ g(y)^{-1}.$$

Fordítva, ha tetszőleges $g(x)$ függvénnyel

$$f(x, y) = g(x) \circ g(y)^{-1},$$

akkor a művelet asszociativitását és az inverz elem értelmezését felhasználva,

$$f(x, y) \circ f(y, z) = [g(x) \circ g(y)^{-1}] \circ [g(y) \circ g(z)^{-1}] =$$
$$= g(x) \circ g(y)^{-1} \circ g(y) \circ g(z)^{-1} = g(x) \circ g(z)^{-1} = f(x, z),$$

tehát (74) minden z-re teljesül.

Többek közt a (63) egyenlet is speciális esete (74)-nek.

Fordítva könnyű látni, hogy *a* (74) *egyenlet megoldhatóságából B csoportjellege következik.*

Hasonló általánosságban tárgyalható pl. a

$$(75) \qquad H\{f[g(x,y)], f[h(x,y)], f[h_1(x,y)], \ldots, f[h_n(x,y)], x, y\} = 0$$

függvényegyenlet, ha a

$$g(x,y) = u$$
$$h(x,y) = v$$

rendszer x és y-ra feloldható:

$$x = \varphi(u,v),$$
$$y = \psi(u,v)$$

és a $h_i(x,y)$ függvények a következő két tételben kimondott feltételek egyikét kielégítik.

14. TÉTEL. *Ha az*

$$u = g(x,y)$$
$$v = h(x,y)$$

rendszer x, y-ra nézve feloldható:

$$x = \varphi(u,v)$$
$$y = \psi(u,v)$$

és

$$h_i(x,y) = k_i[h(x,y)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

továbbá a

$$H[f(u), a, a_1, \ldots, a_n, \varphi(u,0), \psi(u,0)] = 0$$

egyenletből $f(u)$ kifejezhető, akkor csak az így kapott $f(u)$ függvény lehet (75) *megoldása.*

Ezt (75)-ből az $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ helyettesítéssel, majd a kapott

$$H\{f(u), f(v), f[k_1(v)], \ldots, f[k_n(v)], \varphi(u,v), \psi(u,v)\} = 0$$

egyenletbe $v = 0$-t helyettesítve kapjuk meg.

15. TÉTEL. *Ha az*

$$u = g(x,y)$$
$$v = h(x,y)$$

rendszer x, y-ra nézve feloldható:

$$x = \varphi(u,v),$$
$$y = \psi(u,v)$$

és létezik oly v_0, melyre

$$h_i[\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0)] = c_i = \text{konstans},$$

továbbá a

$$H[f(u), a, a_1, \ldots, a_n, \varphi(u, v_0), \psi(u, v_0)] = 0$$

egyenletből $f(u)$ kifejezhető, akkor csak az így kapott $f(u)$ függvény lehet (75) *megoldása.*

Ezt (75)-ből ismét az $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ helyettesítéssel és a kapott

$$H\{f(u), f(v), f[h_1[\varphi(u, v), \psi(u, v)], \ldots, f(h_n[\varphi(u, v), \psi(u, v)]), \varphi(u, v), \psi(u, v)\} = 0$$

egyenletbe $v = v_0$-t téve kapjuk meg.

Például oldjuk meg az

$$f(x+y) + f(x-y) = 2x^2 + 2y^2$$

egyenletet. Az $u = x+y$, $v = x-y$; $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ helyettesítéssel

$$f(u) + f(v) = u^2 + v^2.$$

Ebbe $v = 0$-t téve,

$$f(u) = u^2 - a.$$

Ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve, látjuk, hogy

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 - 2a = 2x^2 + 2y^2$$

csak akkor teljesül, ha $a = 0$. Egyenletünk általános megoldása tehát

$$f(u) = u^2.$$

Itt említem meg, hogy nem kívántam függvényegyenleteknek differenciál- és integrálegyenletekre való visszavezetésével foglalkozni, ami nem is illett volna bele meggondolásaink elemi jellegébe.

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem
Matematikai Intézete

MEGJEGYZÉS ERDŐS PÁL ÉS FEJES TÓTH LÁSZLÓ EGY DOLGOZATÁHOZ

Írta: HEPPES ALADÁR

ERDŐS PÁL és FEJES TÓTH LÁSZLÓ [1] dolgozatában szerepel a következő, FEJES TÓTH LÁSZLÓ által már korábban [2] felvetett probléma. Tekintsünk egy rögzített korlátos T tartományt a síkban (jelöljük területét is T-vel) és benne n pontot. Jelölje h a pontok által meghatározott háromszögek közül a legkisebb kerületű kerületét, h_n pedig a különböző pont-n-esekhez tartozó h értékek felső határát. ERDŐS PÁL és FEJES TÓTH LÁSZLÓ kimutatták, hogy

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt{n}\, h_n \geqq \sqrt{12\,T} \sim \sqrt{T}\cdot 3{,}46\cdots, \tag{1}$$

s úgy látszik, hogy eredményük nem javítható. A $\sqrt{12}$ állandó, amely $\sqrt{T}$ együtthatójaként akkor lép fel, ha a pontok egy $3:4$ oldalhosszarányú téglaláprács rácspontjaiban helyezkednek el, jobb (nagyobb), mint az egyébként számos szélsőértéktulajdonsággal rendelkező szabályos háromszögrács által szolgáltatott érték.

Alábbiakban $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\; h_n$ értékére az (1) alatti alsó becsléssel szemben egy felső becslést adunk, kimutatva, hogy

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt{n}\; h_n \leqq \sqrt{\frac{54}{\pi}\,T} \sim \sqrt{T}\cdot 4{,}146\cdots. \tag{2}$$

(A jobboldali felső korlát mintegy 120%-a az (1) alatti alsó korlátnak.)

BIZONYÍTÁS: Feltehetjük, hogy a T tartomány négyzet, minthogy h_n aszimptotikus viselkedését ez nem befolyásolja. Tekintsünk egy n pontból álló pontrendszert T-ben, és írjunk valamennyi pontja köré egy-egy kongruens kört, amelyek sugarát r-rel jelöljük. E körök mind egy $\sqrt{T}+2r$ oldalú T^* négyzetben helyezkednek el. Válasszuk r-et úgy, hogy a körök területösszege T^* területének kétszerese legyen:

$$n r^2 \pi = 2\,[T + 4r\sqrt{T} + 4r^2]. \tag{3}$$

Ekkor — minthogy a körök T^*-ot pontosan kétszeresen befedni nem tudják — lesz T^*-ban olyan pont, amely három körnek is belsejében fekszik, más szóva lesz az n pont között három olyan pont, amelyek egy r sugarú kör belsejében vannak. Tekintettel arra, hogy egy körben elhelyezett háromszögek közül a körbe írt szabályosnak a kerülete a legnagyobb, e három pont által meghatározott háromszög kerülete, s így h_n is kisebb $3\sqrt{3}\,r$-nél. (3) alapján azonban

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, r = \sqrt{\frac{2}{\pi} T},$$

amiből következik a (2) alatti egyenlőtlenség.

Hasonló módon adható felső becslés egy korlátos tartományban elhelyezett n pont által meghatározott k-szögek kerületének vagy a k pont közt fellépő távolságok összegének minimumára $k>3$ esetben is, ezek a becslések azonban — a fentihez hasonlóan — természetüknél fogva sohasem adják a becsült kerületminimum felső határát.

Alkalmazható ez az eljárás térben és magasabb dimenziós terekben is hasonló jellegű mennyiségek felső becslésére. Kimutatható például, hogy egy K köbtartalmú térbeli korlátos tartományban elhelyezett n pont által meghatározott tetraéderek közül a legkisebb élhosszösszegűnek élhosszösszegére, t_n-re fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\, t_n \leq \sqrt{54} \sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}} \sqrt[3]{K}.$$

IRODALOM

[1] Erdős Pál és Fejes Tóth László: Pontok elhelyezése egy tartományban, *MTA III. Oszt. Közl.* 1956. VI/2. 185—190.

[2] Fejes Tóth, L.: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum,* Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

(Beérkezett: 1959. X. 20.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

AZ OPERÁTORMODULUSOK KERTÉSZ-FÉLE RADIKÁLJÁRÓL

Írta: SZÁSZ FERENC

Mint ismeretes, a végességi feltételek nélküli asszociatív gyűrűk elméletében alapvető szerepe van a JACOBSON-féle radikálnak és féligegyszerűségnek, mert a gyűrűkben az eddig megadott radikáltípusok közt éppen a JACOBSON-féle radikál bizonyult — több hibája ellenére is — a legtermészetesebbnek és a leghasználhatóbbnak. FUCHS LÁSZLÓ egy észrevétele szerint egy A balegységelemes gyűrűben a $J(A)$ JACOBSON-féle radikálnak megadható egy moduluselméleti jellemzése is: ha ugyanis *az A gyűrűt A-jobbmodulusként tekintjük, akkor a $J(A)$ radikál, amely az összes maximális jobbideál metszete, éppen A-nak mint A-jobbmodulusnak a* FRATTINI-*féle részmodulusa* [2]. A FRATTINI-féle részmodulus az összes olyan x elem halmaza, amely a modulus minden generátorrendszeréből elhagyható. Jól ismert az is, hogy nem balegységelemes gyűrűkben a JACOBSON-féle radikál az összes moduláris maximális jobbideál metszete, ahol az A gyűrűben az R jobbideál akkor moduláris, ha létezik olyan $a \in A$, hogy bármely $x \in A$ elemmel $x - ax \in R$.

Kétoldali egységelemes A gyűrű feletti M unitér A-jobbmodulusokban ($m \cdot 1 = m, m \in M, 1 \in A$) már BOURBAKI [1] bevezetett egy radikálfogalmat. Megjegyezzük azonban, hogy A egységelemének létezése és M unitérsége aránylag erős kikötés.

KERTÉSZ ANDOR a [4] cikkéhez csatolt függelékben megad egy radikáltípust tetszőleges A asszociatív gyűrűk feletti M tetszőleges A-modulusokban. Ez a radikál bizonyos tekintetben hasonló az A gyűrűk $J(A)$ JACOBSON-féle radikáljához. KERTÉSZ ANDOR a [4] cikk függelékében felvet egy problémát is, amelyet mi ebben a kis cikkben megoldunk.

Gyűrűn asszociatív gyűrűt, moduluson jobbmodulust értünk. A felhasznált fogalmakat illetően elsősorban JACOBSON [3] könyvére utalunk. Egy M tetszőleges A-modulusban a $K(M)$ KERTÉSZ-féle radikál: $K(M) = \{m \mid m \in M, mA \subseteq \bigcap_{\alpha} M_{\alpha}, M_{\alpha}$ maximális részmodulus$\}$, ahol M_{α} befutja M összes maximális részmodulusát. Ha M maximális részmodulus nélküli, akkor definíció szerint $K = M$, és ekkor M-et radikálmodulusnak nevezzük. Ha M nem radikálmodulus, akkor K egyrészt az összes olyan $m \in M$ halmaza, amelyekre ma elhagyható minden $a \in A$ mellett M minden generátorrendszeréből (ez a halmaz nem feltétlenül esik egybe a FRATTINI-féle részmodulussal, hiszen m elhagyása helyett ma elhagyásáról van szó), másrészt K az összes homoperfekt maximális részmodulus metszete. Definíció szerint az N részmodulus akkor homoperfekt M-ben, ha $(M/N)A = M/N$. Minden A gyűrűben mint A-jobbmodulusban a $K_r(A)$ KERTÉSZ-féle radikál része a $J(A)$ JACOBSON-féle radikálnak, mert minden moduláris maximális jobbideál nyilván homoperfekt is, továbbá $K_r(A)$ az összes homoperfekt maximális jobbideál metszete és $J(A)$ az összes moduláris maximális jobbideál metszete[1]. Abban a speciális esetben, amikor A-ban minden homoperfekt maximális jobbideál moduláris, érvényes az is, hogy egyszersmind $J(A)$ is része $K_r(A)$-nak, amiből ez esetben $J(A) = K_r(A)$ folyik.

Mármost KERTÉSZ ANDOR [4] cikke függelékében azt veti fel nyílt problémaként, hogy vajon szükségképpen teljesül-e egy tetszőleges A gyűrűben $J(A) \subseteq K_r(A)$, amiből $J(A) = K_r(A)$ is következik.

Mi most konstruálunk egy egész sereg olyan A gyűrűt, amelyben léteznek homoperfekt maximális, de nem moduláris jobbideálok, és amelyekben nem érvényes $J(A) \subseteq K_r(A)$ sem. Sőt, seregünk bármely A gyűrűjében, mint A-balmodulusban a $K_l(A)$ radikálra $K_l(A) \neq K_r(A)$ teljesül.

Érvényes az élesebb állítást kimondó következő

TÉTEL. *Egy* $\mathfrak{m}$ *tetszőleges számossághoz akkor és csak akkor létezik olyan* $\mathfrak{m}$*-számosságú* A *gyűrű, amelyben* $0 = K_r(A) \neq J(A) = K_l(A)$, *ha* $\mathfrak{m}$ *nem négyzetmentes véges szám.*

BIZONYÍTÁS. Legyen először $\mathfrak{m}$ véges és négyzetmentes szám és A egy $\mathfrak{m}$-számosságú gyűrű. Ekkor A mint a p-komponenseinek a gyűrűelméleti direkt összege ciklikus, tehát kommutatív, mert minden p-komponens ciklikus. Tartozzék a p_j prímszámhoz, amely $\mathfrak{m}$ osztója, az $\{a_j\}$ ciklikus p_j-komponens $(j = 1, 2, \ldots, n)$ és legyen $a_1^2 = \cdots = a_k^2 = 0$, valamint $a_l^2 = a_l$ $(k+1 \leqq l \leqq n)$. Belátható, hogy a kommutatív A gyűrűben a $J(A) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ radikál egybeesik a $K_r(A) = K_l(A)$ KERTÉSZ-féle modulus-radikállal. Ha ugyanis M olyan A-modulus, amely bizonyos részmodulusainak a diszkrét direkt összege, akkor M Kertész-féle $K(M)$ radikálja egyenlő a direkt összeadandók Kertész-féle radikáljainak a diszkrét direkt összegével.

Legyen másodszor $\mathfrak{m}$ véges, de nem négyzetmentes szám. Ekkor $\mathfrak{m} = p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$, ahol pl. $\alpha \geqq 2$. Most bevezetjük a következő gyűrűt: $B = \{x, y\}$, ahol $px = py = xy - x = x^2 = yx = y^2 - y = 0$. Belátható, hogy B számossága p^2, és hogy az $(x)_r$ és $(y)_r$ főjobbideálok direkt összege éppen

[1] Erre az állításra KERTÉSZ ANDOR egy hosszasabb indirekt bizonyítást adott [4]-ben, de KERTÉSZ elegáns tárgyalásmódjában $J(A)$-nak a történetileg eredeti PERLIS—JACOBSON-féle jellemzése szerepelt a moduláris maximális jobbideálok metszeteként való előállítás felhasználása nélkül.

B. Könnyen igazolható továbbá, hogy $(x)_r$ és $(y)_r$ homoperfekt maximális jobbideál B-ben, de $(y)_r$ nem moduláris jobbideál. Ezekből folyik az is, hogy bár a JACOBSON-féle radikál $J(B)=(x)_r\neq 0$, és szintén $K_l(B)=(x)_r\neq 0$, de B-nek mint B-jobbmodulusnak a $K_r(B)$ KERTÉSZ-féle radikálja $(x)_r\cap(y)_r=0$ miatt 0. Tehát $J(B)=K_l(B)\neq K_r(B)=0$. Legyen mármost C a p-rendű testek $(\alpha-2)$ példányának és a p_j-rendű testek α_j példányának a gyűrűelméleti direkt összege. Továbbá, ha A definíció szerint B-nek és C-nek a gyűrűelméleti direkt összege, akkor A számossága $|A|=\mathfrak{m}$ és nyilván $J(A)=$ $=K_l(A)=(x)_r\neq K_r(A)=0$.

Legyen harmadszor $\mathfrak{m}$ egy végtelen számosság. Ekkor az A gyűrűt úgy adjuk meg speciálisan, mint a B gyűrűnek és egy $\mathfrak{m}$-számosságú tetszőleges testnek a gyűrűelméleti direkt összegét. Ekkor $|A|=\mathfrak{m}$ és nyilvánvalóan $J(A)=K_l(A)=(x)_r\neq K_r(A)=0$ is teljesül.

MEGJEGYZÉSEK[2]. A végtelen $\mathfrak{m}$ esetében konstruált A gyűrű mint A-jobbmodulus teljesen reducibilis. Tehát A-ra teljesedik bizonyos ekvivalens tulajdonságok egy egész sorozata (pl. A egybeesik a jobbsocle-jával; A jobbideálhálója komplementumos; A bármelyik elemének az A' kanonikus legszűkebb egységelemes (DORROH-féle) bővítésben vett jobbannullátora véges sok maximális jobbideál metszete; A-nak bármely maximális A-lineárisan független elemrendszere egy jobbideálbázis A-ra nézve stb.). Ugyanakkor A nem balegységelemes, és bár $(x)_r\neq 0$ az A-nak jobbannullátora, A mégis balannullátormentes. Belátható, hogy egy jobbannullátormentes tetszőleges gyűrűre akkor és csak akkor teljesül a fenti ekvivalens tulajdonságok sorozatából az egyik tulajdonság, ha A olyan JACOBSON-féle radikált nem tartalmazó gyűrű, amelyben teljesül a főjobbideáloknak a minimum-feltétele, de nem feltétlenül teljesül a jobbideálok minimum-feltétele. Ilyen tulajdonságú egyszerű gyűrű pl. az összes olyan, racionális koordinátájú végtelen matrixokból álló gyűrű, amelyekben csak véges sok sorvektor és véges sok oszlopvektor $\neq 0$.

[2] A szerzőnek a kézirat lezárása után KERTÉSZ ANDOR közléséből jutott tudomására az, hogy W. G. LEAVITT is adott meg olyan négyelemű nem kommutatív gyűrűt, amelyben a JACOBSON-féle és KERTÉSZ-féle radikál különbözik. LEAVITT példája, amelyet KERTÉSZ ANDORral levélben közölt, lényegében abban az időben keletkezhetett, (1959. október 15. körül), amikor a szerző kézirata már kész volt. LEAVITT azonban nem adott meg kritériumot $\mathfrak{m}$-re nézve a levélben, hogy $K_r(A)\neq J(A)$, $|A|=\mathfrak{m}$ legyen, és $K_l(A)\neq K_r(A)$ teljesülését sem vizsgálta. LEAVITT és a szerző eredménye egymástól teljesen függetlenül oldja meg a [4] cikkben felvetett problémát. — Azt is megemlítjük, hogy bevezettünk egy $W_{\mathfrak{m}}(M)$ radikált, ahol $\mathfrak{m}$ egy számosság és M egy A-jobbmodulus. Az $\mathfrak{m}=2$ eset éppen a KERTÉSZ-féle modulus-radikált adja meg tetszőleges számosságú modulusokban.

IRODALOM

[1] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématiques, Algèbre, Ch. VIII. Modules et anneaux semisimples. Actualités scientifiques et industrielles 1261, Hermann, Paris. (1958).
[2] FUCHS, L.: A remark on the Jacobson radical. *Acta Sci. Math. Szeged* 14 (1952) 167—168.
[3] JACOBSON, N.: *Structure of rings*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 37 (1956).
[4] KERTÉSZ A.: Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, III., *MTA III. Oszt. Közl.* 9 (1959) 105—120.

(Beérkezett: 1959. X. 30.)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete

A MATEMATIKA KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSÁNAK EGY KLASSZIKUS MUNKÁJÁRÓL

L. V. KANTOROVICS: „A TERMELÉS SZERVEZÉSÉNEK ÉS TERVEZÉSÉNEK MATEMATIKAI MÓDSZEREI" CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

Írta: BOD PÉTER

Ismeretes, hogy a lineáris programozás elméletét az irodalom HITCHCOCK és KOOPMANS nevéhez kapcsolja; 1941-ben, illetve 1945-ben megjelent cikkeik alapján, amelyekben — egymástól függetlenül — az ún. szállítási problémát vetették fel. Az irodalom tanúságai szerint ez az elmélet a legutóbbi évekig a kapitalista közgazdaságtudomány ösztönzésére fejlődött. Napjainkban mindinkább növekvő érdeklődés mutatkozik a programozási számításoknak a szocialista gazdaság feltételei közötti alkalmazása iránt. Ezért nem érdektelen talán bizonyos — eléggé feledésbe merült — tudománytörténeti tényekre rámutatni, amelyekből kiderül, hogy

1. a programozási számítások gondolata történelmileg elsőnek a szocialista tervgazdaság fejlődésének bizonyos szakaszában vetődött fel és így

2. legalábbis pontatlan az irodalomban elterjedt állásfoglalás a prioritás kérdésében.

Úgy gondoljuk, hogy ennek a ténynek nagy elvi jelentősége van és hangoztatni is kell nem utolsósorban azért, mert a matematikai módszerek közgazdasági alkalmazásával szemben nem oldódott fel még nálunk teljesen a múltbeli fenntartás.

Köztudomású, hogy a Szovjetunióban az első két ötéves terv idején feszített ütemű iparosítás folyt. A szovjet állam előtt ekkor az a történelmi feladat állott, hogy példátlanul rövid idő alatt saját erőből erős, korszerű nehézipart hozzon létre. Ezt követelte a nemzetközi helyzet, ezt követelte a szovjethatalom megvédésének az érdeke. Teljesen érthető, hogy ilyen feltételek között nem volt lehetőség a gazdaságossági szempontok jelentős mértékű érvényesítésére.

1938 táján azonban bizonyos fokig megváltozott a helyzet. Az iparosítás sikerei az első két ötéves tervben lehetővé tették, hogy a harmadik ötéves terv célkitűzései között fokozottabb hangsúlyt nyerjenek olyan módszerek, amelyek pótlólagos beruházások nélkül teszik lehetővé a termelés bővítését. Ilyen eszközök voltak mindenekelőtt a tervezés és az ipar szervezésének megjavítása.

Ezek között a körülmények között indult meg kutatómunka a Leningrádi Állami Egyetemen KANTOROVICS professzor vezetésével olyan matematikai módszerek kidolgozására, amelyek hathatós segítséget nyújtanak a tervező szerveknek, a szovjet népgazdaság előtt álló újabb hatalmas feladatok megoldásában.

A kutatás során kiderült, hogy ezek a gazdasági, tervezési problémák elsősorban olyan szélsőértékfeladatokhoz vezetnek, amelyek az analízis klasszikus módszereivel általában nem oldhatók meg. A nehézségeket elsősorban a változók nagy száma, másodsorban az okozza, hogy a felállított modellekben gazdasági szempontból csak a nem negatív extrémumoknak van értelmük.

A kutatások eredményeként sikerült KANTOROVICS professzornak bizonyos gazdasági problémák olyan matematikai modelljeit megfogalmazni, amelyek a fenti problémákra vezetnek és sikerült e feladatok megoldására megfelelő — ebben az időben tisztára matematikai szempontból is említésre méltó — algoritmust adni.

Az eredményeket először a Leningrádi Állami Egyetem matematikai tanszékén vitatták meg, majd az egyetem rendezésében nyilvános kollokviumot szerveztek, amelyen nagy számban részt vettek az ipar felelős munkatársai is. A viták után látott napvilágot az egyetem kiadójának kiadásában 1939 őszén: L. V. KANTOROVICS „A termelés szervezésének és tervezésének matematikai módszerei" című könyve.

A könyv elsősorban közgazdászoknak szól. A matematikai elméleti megfontolásokat három függelék tartalmazza. A vizsgált tervezési és szervezési problémák főleg ipari és üzemgazdasági jellegűek, ami, ha figyelembe vesszük az akkori szovjet népgazdasági tervezési metodikát, teljesen érthető. Az akkori tervezési rendszerben az optimum problémák szükségképpen nem népgazdasági szinten, hanem ipari és vállalati szinten jelentkeztek, mint az adott népgazdasági terv legkedvezőbb teljesítésének, illetve maximális túlteljesítésének a problémái.

KANTOROVICS professzor könyvében három alapfeladatot fogalmaz meg. Mind a három a gépi termelőberendezések bizonyos feltételek melletti optimális kihasználására ad választ. Azonban számos más probléma is megfogalmazható ezeknek a kapacitás kihasználási modelleknek a segítségével.

Az első feladat a következő: n megmunkáló gépből álló géppark segítségével olyan teljes (komplett) szerelvényeket kell maximális mennyiségben termelni, amelyek mindegyike m különböző alkatrészből áll. Kérdés, hogyan kell ennek érdekében az m alkatrész gyártását a rendelkezésre álló gépekre elosztani. A feladat megoldásához ismeretesek az egyes gépeknek a különböző alkatrészekre vonatkozó teljesítményadatai: jelölje $\alpha_{i,k}$ az i-edik gépen a k-adik alkatrészből az egy műszak alatt előállítható alkatrészek darabszámát. (Ha az i-edik gépen a k-adik alkatrész nem munkálható meg, akkor $\alpha_{i,k} = 0$.)

Jelölje $h_{i,k}$ (a teljes műszak hányadában kifejezve) azt az egyelőre ismeretlen időt, amelyet az i-edik gépen a k-adik alkatrész megmunkálására fordítunk. Mivel a gépeket a teljes műszakban működtetni kell, ezért

$$\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

és nyilván

$$h_{i,k} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Ilyen feltételek mellett műszakonként a k-adik alkatrészből

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \cdot h_{i,k}$$

darabot gyárthatunk. Mivel azonban a terv szerint nem egyszerűen a legtöbb alkatrész gyártására kell törekedni, hanem maximális számú komplett szerelvényt kell előállítani — meg kell követelni, hogy műszakonként az összes alkatrészből azonos mennyiséget termeljenek, vagyis, hogy

$$Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_m$$

legyen. Ezeknek a Z számoknak a közös értéke jelzi a legyártott komplett szerelvények számát.

Az első alapfeladatot matematikailag tehát így lehet megfogalmazni:[1]

Meghatározandók a $h_{i,k}$ számok $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m)$ úgy, hogy a $\left(Z_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \cdot h_{i,k}\right.$ jelölés mellett$\left.\right)$ a $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ mennyiségek egymással egyenlők legyenek és közös értékük legyen maximális az alábbi feltételek mellett:

$$\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$h_{i,k} \geqq 0.$$

[1] Kantorovics professzor könyvében nem tér ki az egyes gazdasági problémák megoldására javasolt modellek ki nem mondott feltételezéseinek az ismertetésére, illetve elemzésére. Mivel minden modell szükségképpen leegyszerűsítése a teljes valóságnak — az ilyen természetű feltételezések elkerülhetetlenek. Természetesen esetenként, konkréten el kell bírálni, hogy ezek a feltevések, illetve egyszerűsítések milyen mértékben térnek el a gazdasági valóságtól és mennyiben befolyásolják a számított optimumok tényleges felhasználhatóságát. Az említett első alapfeladatnál pl. az a — ki nem mondott — feltételezés szerepel, hogy műszak közben időveszteség nélkül át lehet állni valamely adott gépen az egyik munkadarab megmunkálásáról a másikra. Hasonló feltételezés, hogy valamely gép teljesítménye egy bizonyos munkadarabból független attól, hogy milyen szériában termelik az illető darabot (kis vagy nagy sorozat) stb. Mivel a könyv bizonyos módszerek ismertetésére íródott és nem a konkrét problémák megoldása volt a feladata — a szerző eltekinthetett ilyen részletek megvilágításától. Azonban az explicit és implicit feltételezések gondos vizsgálatának a szükségességére minden közgazdasági alkalmazással kapcsolatban fontosnak tartjuk felhívni a figyelmet.

Pontosan ugyanerre a feladatra vezet, ha n számú gép segítségével egy adott fajta alkatrészen m számú különböző műveletet kell elvégezni és a rendelkezésre álló gépparkkal adott idő alatt maximális számban akarunk munkadarabokat teljesen megmunkálni (vagyis elvégezni rajtuk az összes szükséges műveletet). Ebben az esetben azonban $a_{i,k}$ azt jelenti, hogy az i-edik gép hány munkadarabon képes egy műszak alatt a k-adik megmunkálási műveletet elvégezni; $h_{i,k}$ pedig az erre a műveletre fordított időt fejezi ki, szintén a teljes műszak hányadában.

Ha a fenti feladatot bizonyos pótlólagos feltételekkel kiegészítjük, eljutunk a *második alapfeladat*hoz. Tegyük fel, hogy a fentiekben ismertetett termelési feladatot egy gyárnak úgy kell megoldania, hogy közben bizonyos, a termeléshez szükséges anyagi erőforrásokat csak előre meghatározott korláton belül vehet igénybe (pl. munkaerőt, elektromos energiát, valamilyen import anyagot stb.). Legyen mondjuk $C_{i,k}$ az i-edik gép energiafogyasztása műszakonként, ha a gép a k-adik alkatrészt gyártja és jelöljük C-vel az üzem rendelkezésére bocsátott és ennél a munkánál műszakonként túl nem léphető elektromos energia összmennyiségét. Ebben az esetben az első alapfeladatnál kitűzött optimumot az ott jelzett feltételeken kívül még a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} C_{i,k} \cdot h_{i,k} \leqq C$$

feltétel figyelembevételével kell meghatározni.

Előfordul a gyakorlatban olyan bonyolultabb kapacitáskihasználási feladat is, amikor ugyanazon a gépen egyidejűleg több alkatrész is megmunkálható. Ilyenkor a termelés megszervezésének nagyon sok kombinatív lehetősége van. Tegyük fel, hogy a termelést n különböző gépen r-féle módon lehet megszervezni és ismét m alkatrészből álló komplett szerelvényeket kell előállítani. Ha a termelést az l-edik módszer szerint szervezzük meg, akkor az i-edik gépen $\gamma_{i,k,l}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ alkarészt munkálhatunk meg műszakonként egyidejűleg. Az optimum feladat most így hangzik:

Meghatározandók a $h_{i,l}$ értékek $(i = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, r)$ úgy, hogy $(Z_k = \sum_{i,l} \gamma_{i,k,l} \cdot h_{i,l}$ jelölés mellett) $Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_m$ közös értéke maximális legyen az alábbi feltételek mellett:

$$\sum_{l=1}^{r} h_{i,l} = 1,$$

$$h_{i,l} \geqq 0.$$

Ez a könyvben ismertetett *harmadik alapfeladat*.

A bemutatott három alapfeladatra számos gyakorlati gazdasági probléma vezethető vissza. Nézzünk ezek közül néhányat.

n gépen m különböző terméket állítanak elő. Legyen az i-edik gép teljesítménye a k-adik termékből $\alpha^*_{i,k}$ darab naponta. A termelőberendezést úgy kell kihasználni, hogy maximális termékkibocsátást kapjunk, de az egyes termékek aránya előre meghatározott $p_1:p_2:\cdots:p_m$ legyen. A feladat most úgy szól, hogy meghatározandók a $h_{i,k}$ számok úgy, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} h_{i,1}\cdot\alpha^*_{i,1}}{p_1}=\frac{\sum_{i=1}^{n} h_{i,2}\cdot\alpha^*_{i,2}}{p_2}=\cdots=\frac{\sum_{i=1}^{n} h_{i,m}\cdot\alpha^*_{im}}{p_m}$$

legyen és e hányadosok közös értéke legyen maximális az alábbi feltételekkel:

$$\sum_{k=1}^{m} h_{i,k}=1,$$

$$h_{i,k}\geqq 0.$$

Látható, hogy az $\alpha_{i,k}=\frac{1}{p_k}\alpha^*_{i,k}$ jelölés bevezetésével a probléma közvetlenül az első alapfeladatba megy át. Ha ugyanebben a feladatban még bizonyos kikötéseket teszünk, egyes termelőeszközök felhasználási lehetőségeinek korlátozására, akkor a második alapfeladattal van dolgunk.

A harmadik alapfeladatra vezet az anyagkiszabási hulladék minimumra szorításának alábbi problémája.

Rendelkezésünkre áll n tétel anyag (pl. üveglapok, gerendák stb.), amiből adott méretű idomokat kell kiszabni úgy, hogy a különböző méretű idomok aránya előre meghatározott $p_1:p_2=\cdots=p_m$ legyen. Arra törekszünk, hogy a rendelkezésre álló anyagból a lehető legtöbb „komplett szettet" szabhassuk le a legkisebb szabási hulladék mellett. Feltesszük, hogy a rendelkezésre álló anyag i-edik tétele q_i azonos méretű darabból áll. (Pl. meghatározott nagyságú üvegtáblák.) Minden tétel egységét többféle módon lehet felszabdalni. Az i-edik tétel l-edik módon való kiszabásánál az alábbi idomokat nyerjük: $\gamma_{i,1,l}$ első számú, $\gamma_{i,2,l}$ második számú, ..., $\gamma_{i,m,l}$ m-edik számú idomot (egyes $\gamma_{i,k,l}$ értékek zérusok is lehetnek). Jelöljük $h_{i,l}$-el azt a számot, amely megmutatja, hogy az i anyagtételből hány egységet szabunk ki az l-edik módon. Akkor (a $Z_k=\frac{\sum_{i,l}\gamma_{i,k,l}\cdot h_{i,l}}{p_k}$ jelölés mellett) keressük a $Z_1=$ $=Z_2=\cdots=Z_m$ közös értékek lehetséges maximumát az alábbi feltételekkel:

$$\sum_{l=1}^{r} h_{i,l}=1$$

és

$$h_{i,l}\geqq 0;\ \sum_{l} h_{i,l}=q_i.$$

Látható, hogy a változók megfelelő megválasztásakor ez a feladat a harmadik alapfeladatba megy át.

A bemutatott példák távolról sem merítik ki azoknak a gazdasági problémáknak a körét, amelyek a vázolt alapfeladatokra visszavezethetők. Ilyen jellegű problémák — hogy még néhányat felsoroljunk — a többféle módon feldolgozható vegyipari alapanyagok leggazdaságosabb hasznosítása, különböző fűtőértékű üzemanyagok leghatékonyabb elosztása ismert fűtőanyagfelhasználási adottságokkal rendelkező különböző tüzelőberendezések között, vetésterületek legelőnyösebb kihasználása, legkisebb költséget igénylő szállítások tervezése stb.

KANTOROVICS könyvében a bemutatott alapfeladatok megoldására, mint már említettük — algoritmust ad. A megoldási eljárást a „megoldó együtthatók" módszerének nevezi. Nézzünk erre egy példát.

Vizsgáljuk meg az első alapfeladat megoldásának a menetét abban a legegyszerűbb esetben, amikor n különböző gépen két alkatrészből álló szerelvényeket kell termelni. Keressük tehát azokat a $h_{i,1}$ és $h_{i,2}$ értékeket, amelyekre a

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \cdot h_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} \cdot h_{i,2}$$

közös érték maximális azzal a feltétellel, hogy

$$h_{i,1} + h_{i,2} = 1 \quad \text{és}$$

$$h_{i,1}, \quad \text{valamint} \quad h_{i,2} \geqq 0.$$

Tekintsük az $\frac{a_{i,2}}{a_{i,1}} = K_i$ hányadosokat minden i-re. Feltételezhetjük, hogy ezek az értékek növekvő sorrendben állnak (ami a gépek sorszámának megfelelő átszámozásával mindig elérhető), azaz, hogy

$$K_1 \leqq K_2 \leqq K_3 \leqq \cdots \leqq K_n.$$

Világos, hogy ilyen körülmények között az alacsony sorszámú gépeken érdemes az első és a magasabb sorszámú gépeken a második alkatrészt gyártani. Tehát az alacsony sorszámú gépeken a

$$h_{i,1} = 1 \quad \text{és} \quad h_{i,2} = 0,$$

míg a magas sorszámú gépeken a

$$h_{i,1} = 0 \quad \text{és} \quad h_{i,2} = 1$$

megoldás lesz a kedvező. Azonban a feltételek szerint a két alkatrészből azonos darabszámot kell gyártani. Ennek érdekében a $0 < S < n$ számot úgy választjuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{S-1} \alpha_{i,1} < \sum_{i=S}^{n} \alpha_{i,2},$$

de

$$\sum_{i=1}^{S} \alpha_{i,1} \geqq \sum_{i=S+1}^{n} \alpha_{i,2}.$$

Ez a két egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy az első (s—1) gépen kevesebb első alkatrész készülne el, mint ahány második a többi gépen. Viszont az első S számú gépen már éppen annyi, vagy több első alkatrész készíthető, mint amennyi második alkatrészt a fennmaradó (n—S) gép gyártani tud.

Ha S értékét így választjuk meg, akkor nyilván

$$h_{i,1}=1;\ h_{i,2}=0 \qquad [i=1,2,\ldots,(S-1)]$$

és

$$h_{i,1}=0;\ h_{i,2}=1 \qquad [i=(S+1),(S+2),\ldots,n].$$

Míg $h_{S,1}$ és $h_{S,2}$ értékeit az alábbi két egyenletből kell meghatározni:

$$h_{S,1}+h_{S,2}=1$$

$$\sum_{i=1}^{S-1} \alpha_{i,1}+h_{S,1}\cdot\alpha_{S,1}=\sum_{i=S+1}^{n} \alpha_{i,2}+h_{S,2}\cdot\alpha_{S,2}.$$

Alkalmazzuk ezeket a meggondolásokat egy konkrét példán. Tegyük fel, hogy három különböző forgácsológépen (esztergapad, revolverpad és automata) két különböző alkatrészből álló szerelvényt kell megmunkálni. A gépeknek az egyes alkatrészekre vonatkozó műszakteljesítményeit az alábbi táblázat foglalja össze. (Az adatok db/műszakban adottak.)

Alkatrész	Gép		
	Eszterga	Revolver	Automata
I	30	60	30
II	60	90	80

A szükséges arányok most így alakulnak:

$$\frac{60}{30}=2;\quad \frac{90}{60}=1{,}5 \quad \text{és} \quad \frac{80}{30}=\frac{8}{3}.$$

Növekvő sorrendbe rendezve:

$$\frac{2}{3}<2<\frac{8}{3}.$$

Ennek megfelelően átsorszámozzuk a gépeket:

1. revolverpad,
2. esztergapad,
3. automata.

A számításhoz szükséges $\alpha_{i,k}$ értékek tehát
$$\begin{matrix} \alpha_{11}=60 & \alpha_{21}=30 & \alpha_{31}=30 \\ \alpha_{1,2}=90 & \alpha_{22}=60 & \alpha_{32}=80. \end{matrix}$$
$S=2$ értéket véve:

$$\sum_{i=1}^{S-1} \alpha_{i,1}=\alpha_{11}=60<\sum_{i=S}^{n} \alpha_{i,2}=\alpha_{22}+\alpha_{32}=140$$

$$\sum_{i=1}^{S} \alpha_{i,1}=\alpha_{11}+\alpha_{21}=90>\sum_{i=S+1}^{n} \alpha_{i,2}=\alpha_{32}=80.$$

Az optimális programot szolgáltató $h_{i,k}$ értékek közül azonnal felírhatjuk a következőket:

$$\begin{matrix} h_{1,1}=1; & h_{3,1}=0 \\ h_{1,2}=0; & h_{3,2}=1, \end{matrix}$$

míg $h_{2,1}$ és $h_{2,2}$ a

$$h_{2,1}+h_{2,2}=1$$

$$60+30h_{2,1}=80+60h_{2,2}$$

egyenletekből határozhatók meg.

Innen:

$$h_{2,1}=\frac{8}{9} \quad \text{és} \quad h_{2,2}=\frac{1}{9}.$$

A revolverpadon tehát teljes műszakban az első, az automatán csak a második alkatrészt kell gyártani; az esztergapad munkaidejét ezzel szemben meg kell osztani 8:1 arányban az első és a második alkatrész megmunkálása között.

A példán megfigyelhettük, hogy a megoldás lényege annak az S-nek megfelelő K_S aránynak a meghatározása, amelynek megfelelően a gépeket a kétféle termelési feladat között megosztjuk. Ha ez a

$$K_S=\frac{\alpha_{S,2}}{\alpha_{S,1}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

arány ismert, akkor kézben van a teljes megoldás. (λ_1 és λ_2 a példában szereplő két ún. „megoldóegyüttható"). Ugyanis azon i-kre, amelyekre

$$\frac{\alpha_{i,2}}{\alpha_{i,1}}<\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

vagy ami ugyanazt jelenti,

$$\lambda_1\cdot\alpha_{i,1}>\lambda_2\cdot\alpha_{i,2},$$

szükségképpen

$$h_{i,1} = 1 \quad \text{és} \quad h_{i,2} = 0.$$

Azon i-kre, amelyekre

$$\lambda_2 \cdot \alpha_{i,2} > \lambda_1 \cdot \alpha_{i,1}$$

$$h_{i,1} = 0 \quad \text{és} \quad h_{i,2} = 1$$

-t kell venni. Végül arra az i-re, amelyre

$$\lambda_1 \alpha_{i,1} = \lambda_2 \cdot \alpha_{i,2}$$

a megfelelő értékeket a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,1} \cdot h_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,2} \cdot h_{i,2}$$

egyenlet alapján kell kiszámítani, figyelembe véve a $h_{i,1} + h_{i,2} = 1$ egyenlőséget is.

A kérdés mármost az, hogyan lehet a megoldást tetszőleges számú alkatrészből álló feladatra általánosítani. A szerző könyvében bebizonyítja, hogy ebben az esetben is visszavezethető az $m \cdot n$ darab ismeretlen $h_{i,k}$ szám meghatározása m darab $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ megoldóegyüttható megkeresésének a feladatára.

Mindenekelőtt könnyen meg lehet mutatni, hogy a vizsgált feladatot egy vele teljesen egyértelmű más megfogalmazásban is felvethetjük. Nevezetesen a legyártott komplett szerelvények számát nyilvánvalóan mindig azon alkatrész száma határozza meg, amelyből a legkevesebbet állítottak elő. Vagyis az optimumfeltétel helyett (ti. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ közös értéke legyen maximális) azt is mondhatjuk, hogy maximalizálandó:

$$\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m).$$

Ezek után bevezetjük a megoldóegyütthatók fogalmát. A vizsgált feladatra vonatkoztatva, megoldóegyütthatónak nevezzük a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ($\lambda_k \geqq 0$ és nem mind zérus) m számból álló számrendszert, ha minden i-re tekintjük a következő szorzatokat

$$\lambda_1 \cdot \alpha_{i,1}; \; \lambda_2 \cdot \alpha_{i,2}, \ldots, \lambda_m \cdot \alpha_{i,m}$$

és t_i-vel jelölve ezek legnagyobbikát, úgy kapjuk az optimális programot szolgáltató $h_{i,k}$ értékeket, hogy

1. minden olyan k-ra $h_{i,k} = 0$, amelyre $\lambda_k \alpha_{i,k} < t_i$;

2. a többi $h_{i,k}$-ra $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1$ és $Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_m$.

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy a megoldóegyütthatók ismeretében a feladatot megoldottuk. Ha a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ megoldóegyütthatókat tényleg megtaláltuk és a fenti módon meghatároztuk a $h^*_{i,k}$ számokat, akkor az ezek segítségével számított Z^* érték a lehető legnagyobb.

A $h^*_{i,k}$ számok rendszerére érvényes

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)Z^* = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k Z_k^* = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,k}\cdot h^*_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k\cdot\alpha_{i,k})h^*_{i,k} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} t_i\cdot h^*_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Látható, hogy $\lambda_k\cdot\alpha_{i,k}$ helyett mindig t_i-t vettük. Ezt megtehettük, mert ahol $\lambda_k\cdot\alpha_{i,k} < t_i$, ott $h^*_{i,k}$ amúgy is zérus.

Legyen mármost $h_{i,k}$ egy olyan tetszőleges számrendszer, amelyre

$$Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_m = Z.$$

Akkor

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)Z = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k Z_k = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,k}\cdot h_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k\cdot\alpha_{i,k})h_{i,k} \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} t_i\cdot h_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Ennek az egyenlőségnek és a fenti egyenletnek az egybevetése alapján

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)Z \leqq \left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)Z^*,$$

illetve

$$Z \leqq Z^*.$$

Vagyis a megoldóegyütthatók segítségével számított $h^*_{i,k}$ értékek tényleg az alapfeladat megoldását adták.

A feladat megoldása tehát abban áll lényegében, hogy meg kell határozni a megoldóegyütthatókat. Ez az alábbi szukcesszív módszerrel történhet. Nulladik közelítésként kiindulunk egy $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$ véletlen számsorozatból. Képezzük a

$$\lambda_1^0\cdot\alpha_{i,1};\ \lambda_2^0\cdot\alpha_{i,2};\ \ldots;\ \lambda_m^0\cdot\alpha_{i,m}$$

szorzatokat és mindazon k indexekre, amelyekre a megfelelő szorzatok (rögzített i-t tekintve) nem maximálisak,

$$h_{i,k} = 0$$

-t veszünk.

Az ilyen véletlen számsorozatok esetében rendszerint egy maximális akad csak a szorzatok között, ezért adott i-re az összes $h_{i,k}$-t zérussal egyenlőnek kell venni, kivéve egyet, amelynek az értéke ilyenformán szükségképpen: 1. Tehát a $h_{i,k}$ értékek egyértelműen meghatározottak, aminek következtében a Z_k értékek is meghatározott

$$Z_1^0, Z_2^0, \ldots, Z_m^0$$

nagyságoknak adódnak. De nyilvánvaló, hogy ezek egymás között általában nem lesznek egyenlőek. A további lépések során ezért a λ_k^0 értékeket úgy kell megváltoztatni, hogy a Z_k értékek egymással egyenlőekké váljanak.

Tudjuk, hogy az optimumot akkor érjük el, ha

$$\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$$

maximális értéket vesz fel. Az előbb kapott $Z_1^0, Z_2^0, \ldots, Z_m^0$ számok közül legyen Z_s^0 a legkisebb. Ha most minden λ_k^0 értékét változatlanul hagyjuk, de λ_s^0-t megfelelően nagyobb számmal helyettesítjük, akkor a legtöbb esetben a $\lambda_s \cdot \alpha_{i,s}$ szorzatok minden i-re maximálisak lesznek a saját sorukban. Ezután $h_{i,s}$-et egynek véve, Z_s^0-nál nagyobb értéket kapunk Z_s-re. Ezáltal rendszerint a $\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ is nőtt.

A megoldóegyütthatók megkeresésének útja éppen abban van, hogy a véletlenül választott λ_k^0 értékek sorozatos megváltoztatása révén növeljük az elmaradó Z_k értékeket és így fokozatosan közelítjük meg a keresett extrémumot. Persze az egyes alacsony Z_k értékek növelése mellett lehetséges a kiugróan magas Z_k értékek csökkentése is. Nagyobb számú változó esetében azonban megfelelő rendszert kell ebben a számolásban követni, különben nincs biztosítva, hogy a programot minden lépéssel javítjuk és véges számú lépésben be is fejezzük.

A szerző az alábbi példán mutatja be az algoritmust. Három különböző kötöttségű talajból három különböző ekszkavátor segítségével a legrövidebb idő alatt 20—20 000 m³ földet kell kitermelni. A gépek egyenletes termelési ütemét feltételezve — ez akkor lesz nyilvánvalóan a legkisebb, ha az óránkénti összteljesítmény maximális.

Az egyes gépeknek a különböző talajfajtákra vonatkozó óránkénti teljesítményét az alábbi táblázat foglalja össze (az adatok m³/órában)

Gép(i) / Talaj(k)	A	B	C
I	105	107	64
II	56	66	38
III	56	83	53

A λ_k^0 számsorozat értékeinek célszerű a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k}$ összeg reciprok értékével arányos mennyiséget választani:

$$\lambda_k^0 = \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k}},$$

ahol P tetszőleges szám. Legyen példánkban mondjuk $P=1000$. Így azt kapjuk, hogy

$$\lambda_1^0=\frac{1000}{276}=3{,}62;\quad \lambda_2^0=\frac{1000}{160}=6{,}25;\quad \lambda_3^0=\frac{1000}{192}=5{,}218.$$

Képezzük az $\alpha_{i,k}$ elemek és λ_k^0 szorzatát minden i-re. Vagyis a tábla sorát rendre szorozzuk λ_1^0, λ_2^0 és λ_3^0-val. Minden oszlopban (minden i-re) kiválasztjuk a legnagyobb elemet és aláhúzzuk. Ezekhez $h_{i,k}=1$-t, a többihez $h_{i,k}=0$-t rendelünk.

Ezután képezzük az $\alpha_{i,k}\cdot h_{i,k}$ szorzatokat és ezeket soronként összegezve, kiszámítjuk a Z_k értékeit. A nyert értékeket táblázatba foglaljuk:

Nulladik közelítés

$\lambda_k\cdot\alpha_{i,k}$			$\alpha_{i,k}\cdot h_{i,k}$			Z_k
$\underline{381}$	388	231	105×1	107×0	64×0	105
349	412	237	56×0	66×0	38×0	0
292	$\underline{432}$	$\underline{276}$	56×0	83×1	53×1	136

A Z_k értékek közül Z_2 maradt el a legjobban. Ezért λ_2^0-t megnöveljük. Ennek érdekében korrekciós együtthatót alkalmazunk. A második sorban megkeressük azt az elemet, amely viszonylag a legközelebb áll oszlopa maximális eleméhez. Ez ebben az esetben a 412. A korrekciós együtthatót úgy választjuk meg, hogy a korrigált λ_2^0 révén a 412 helyébe 432 kerüljön. Vagyis

$$\lambda_2^{(1)}:\lambda_2^0=432:412=1{,}05.$$

A $\lambda_k\cdot\alpha_{i,k}$ soraiban az első és a harmadik sort változatlanul leírjuk és a a második sor minden elemét megszorozzuk a korrekciós együtthatóval. Így kapjuk az első közelítésben használandó $\lambda_k^{(1)}\cdot\alpha_{i,k}$ értékeket. A maximálisakat minden oszlopban ismét aláhúzzuk. Így most már közvetlenül felírhatjuk a $h_{2,2}$ és $h_{2,3}$ kivételével az összes $h_{i,k}$ számokat. Azok ugyanis mind vagy zérusok vagy egy az értékük. A $h_{2,2}$ és $h_{2,3}$ értékeit viszont módunkban áll úgy meghatározni, hogy

$$Z_2=Z_3$$

legyen. Mivel $h_{2,2}+h_{2,3}=1$, ezért $h_{2,3}=1-h_{2,2}$. A $Z_2=Z_3$ feltétel:

$$66\cdot h_{2,2}=83(1-h_{2,2})+53,$$

vagyis

$$h_{2,2}=0{,}915$$

$$h_{2,3}=0{,}085.$$

Az eredményeket ismét táblázatba foglaljuk.

Első közelítés

$\lambda_k \cdot \alpha_{i,k}$			$\alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}$			Z_k
$\underline{381}$	388	231	105×1	107×1	64×0	105
365	$\underline{432}$	249	56×0	$66 \times 0{,}915$	38×0	60,2
292	$\underline{432}$	$\underline{276}$	56×0	$83 \times 0{,}085$	53×1	60,2

Látható, hogy $Z_1 \neq Z_2 = Z_3$. Tehát vagy Z_2-t, illetve Z_3-at kell növelnünk, vagy Z_1-t kell csökkenteni. Most az utóbbi a célszerű.

Ennek érdekében $\lambda_1^{(1)}$-re egynél kisebb korrekciós együtthatót kell bevezetni, mégpedig olyat, hogy a korrigált $\lambda_1^{(1)}$ alkalmazása révén az első sor maximális eleme egybeessék saját oszlopa hozzá legközelebb eső elemével. Ezért

$$\lambda_1^{(2)} : \lambda_1^{(1)} = 365 : 381 = 0{,}958.$$

Ezzel a korrekciós együtthatóval megszorozzuk az első sor elemeit és a második, harmadik sor elemeit változatlanul leírjuk. Aláhúzzuk minden oszlopban a legnagyobb elemeket. Az első és a második oszlopban kettőt-kettőt találunk. Ennek megfelelően négy $h_{i,k}$ értékét kell összefüggések alapján meghatározni; míg a többi azonnal felírható. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$h_{1,1} = x \quad \text{és} \quad h_{2,2} = y.$$

Akkor

$$h_{1,2} = 1 - x \quad \text{és} \quad h_{2,3} = 1 - y.$$

x-t és y-t úgy határozzuk meg, hogy

$$Z_1 = Z_2 = Z_3$$

legyen.

$$Z_1 = 105x; \quad Z_2 = 56(1-x) + 66y \quad \text{és} \quad Z_3 = 83(1-y) + 53.$$

Innen

$$105x = 56(1-x) + 66y = 83(1-y) + 53 = Z$$

$$x = \frac{1}{105} Z; \quad y = \frac{136}{83} - \frac{1}{83} Z.$$

Behelyettesítve ezeket a középső egyenletbe:

$$164{,}2 - 0{,}532Z - 0{,}795Z = Z,$$

ahonnan is

$$Z = 70{,}8 \quad \text{és} \quad x = 0{,}67; \quad y = 0{,}785.$$

Megkaptuk a második közelítés $h_{i,k}$ értékeit. Ezek egyben az optimális megoldást is megmutatják, mint ahogy ez a következő táblából kitűnik.

Második közelítés

$\lambda_k \cdot \alpha_{i,k}$			$\alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}$			Z_k
$\underline{365}$	372	222	$105 \times 0{,}67$	107×0	64×0	70,8
$\underline{365}$	$\underline{432}$	249	$56 \times 0{,}33$	$66 \times 0{,}785$	38×0	70,8
292	$\underline{432}$	$\underline{276}$	56×0	$83 \times 0{,}215$	53×1	70,8

A nyert $Z = 70{,}8$ m^3/óra maximális órateljesítményt jelent azzal a feltétellel, hogy mindhárom fajta talajból egyenlő mennyiséget kell kitermelni. Mivel minden talajfajtából 20 000 m^3 fejtendő, az egész munka elvégzésének legrövidebb lehetséges ideje

$$20\,000 : 70{,}8 = 282$$

óra. Az iteráció utolsó lépésénél talált $h_{i,k}$ értékeket 282-vel szorozva megkapjuk, hány órát kell az egyes gépeknek a különböző talajokon dolgozniok. Ezt foglalja össze a következő tábla.

Talaj \ Gép	A	B	C
I	190	—	—
II	92	222	—
III	—	60	282
	282	282	282

Kantorovics ezután felhívja a figyelmet arra, hogy bizonyos esetekben előállhatnak a megoldás során olyan bonyodalmak, amelyek az algoritmus vázolt útjának bizonyos módosítását kívánják. Majd megmutatja, hogy a megoldóegyütthatók segítségével a második és harmadik alapfeladat is tárgyalható.

A könyv második függelékében egy konkrét vállalat optimális kapacitáskihasználási számításai olvashatók teljes részletességgel. Ezt a számítást a szerző módszere alapján A. I. Jugyin végezte el.

Végül a harmadik függelékben Kantorovics két bizonyítást is ad arra vonatkozóan, hogy az algoritmus alkalmazása során feltételezett megoldóegyütthatók minden esetben valóban léteznek is. Az első bizonyítás analitikus úton, a másik geometriai módszerekkel igazolja a megoldóegyütthatók létezését.

Az alábbiakban bemutatjuk a geometriai megfontolásokon alapuló bizonyítást. Tekintsük az összes lehetséges $\{h_{i,k}\}$ számból álló rendszereket, amelyekre $h_{i,k} \geqq 0$ és $\sum_{k=1}^{m} h_{i,k} = 1$. Minden $h_{i,k}$ számrendszer alapján meghatározhatók a megfelelő $Z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}$ értékek. Az összes lehetséges $\{h_{i,k}\}$ rendszerhez tartozó $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ értékrendszerek — mint az m dimenziós euklidesi tér pontjai — egy meghatározott konvex halmazt alkotnak (K).

Tekintsük ezután azon pontok halmazát, amelyekre $Z_1 \geqq C$; $Z_2 \geqq C, \ldots$, $, Z_m \geqq C$, vagy ami ugyanaz, tekintsük a

$$\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) \geqq C$$

feltételt kielégítő pontok konvex halmazát $|H_C|$.

Jelöljük C^*-gal a $Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_m$ maximális értékének a $\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ maximális értékével megegyező közös extrémumát. Akkor a K halmaz minden pontjára

$$\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) \leqq C^*.$$

A K halmaznak tehát nincs H_{C^*}-gal közös belső pontja, mivel ez utóbbi minden belső pontjára

$$\min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) \geqq C^*.$$

Így K és H_{C^*} csak közös határpontokkal rendelkeznek, ezek egyike a

$$(C^*, C^*, \ldots, C^*)$$

pont lesz.

MINKOVSZKI tétele alapján azonban ezen a ponton átfektethető egy olyan sík, amely elválasztja egymástól a két konvex halmazt. Ennek a síknak az egyenlete

$$\lambda_1^* Z_1 + \lambda_2^* Z_2 + \cdots + \lambda_m^* Z_m = C^*$$

alakú, ahol

$$\lambda_1^* + \lambda_2^* + \cdots + \lambda_m^* = 1.$$

A C^* tartomány alakjából közvetlenül nyilvánvaló, hogy $\lambda_k^* \geqq 0$. Bebizonyítható mármost, hogy az elválasztó sík egyenletében szereplő együtthatók a megoldóegyütthatók.

Legyen ugyanis $\{h_{i,k}^*\}$ a $Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_m$ egyenlőségnek megfelelő számrendszer. Jelöljük t_i-vel a

$$\lambda_1^* \cdot \alpha_{i,1};\ \lambda_2^* \cdot \alpha_{i,2};\ \ldots;\ \lambda_m^* \cdot \alpha_{i,m}$$

szorzatok közül a legnagyobbat.

Mivel a K halmaz az elválasztó sík egyik oldalán fekszik, ezért minden $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ pontjára

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* Z_k \leqq C^*,$$

vagy ami ugyanaz, tetszőleges megengedett $\{h_{i,k}\}$-kra

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k^* \cdot \alpha_{i,k}) h_{i,k} \leqq C^*.$$

Ha speciálisan $h_{i,k} = 1$-t választunk azon k-kra, amelyekre $\lambda_k^* \cdot \alpha_{i,k} = t_i$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \leqq C^*.$$

Másrészt

$$C^* = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* Z_k^* = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k^* \cdot \alpha_{i,k}) h_{i,k}^* \leqq \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{k=1}^{m} h_{i,k}^* = \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Ebben a második egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor áll fenn, ha minden $\lambda_k^* \cdot \alpha_{i,k} < t_i$ esetben $h_{i,k}^* = 0$-t veszünk. Mivel fentebb azt láttuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} t_i \leqq C^*$, ezért az egyenlőségnek fenn is kell állnia.

Vagyis azt találtuk, hogy azon $h_{i,k} = h_{i,k}^*$ számokra, amelyek nem maximális szorzatoknak felelnek meg, fennáll a zérussal való egyenlőség feltétele; míg a többiekre a $Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_m$ feltétel. Ezzel azonban sikerült az első alapfeladat vonatkozásában tetszőleges esetre is bebizonyítani a megoldó-együtthatók létezését.

KANTOROVICS könyve 20 évvel ezelőtt jelent meg. Igaz, hogy megjelenése után a matematikai módszerek közgazdasági alkalmazása és a további kutatás e téren hosszú ideig nem fejlődött kielégítően a szocialista gazdaság viszonyai között. Csak az utóbbi években kezdődött ezen a területen örvendetes változás. Az aggályok és kétségek azonban még ma sem tűntek el teljesen a matematikai módszerekkel szemben. Sokan ragaszkodnak a régi módszerekhez és húzódoznak az újtól. Már csak ezért is érdemes — befejezésül — teljes fordításban közölni Kantorovics professzor 1939-ben leírt érveit, amelyek közül nem egy ma is meggyőzően hat:

„Válasz néhány elvi ellenvetésre

Mint már rámutattunk, teljesen valószínűnek tartjuk, hogy egyik vagy másik általunk elemzett példa (és lehet, hogy egész kérdéskörök is) a gyakorlati szakemberek részéről ellenvetésbe ütközik. Lehetségesnek tartjuk, hogy egyes esetekben ezek az ellenvetések annyira megalapozottak lehetnek, hogy el kell állnunk az alkalmazás valamelyik területétől. Azonban — ilyen speciális, részleges ellenvetések mellett, találkoznunk kellett (a gazdasági szakemberek többségének szerfölött kedvező véleménye mellett) egyesek részéről olyan általános ellenvetésekkel, amelyek lényegében tagadták a matematikai módszerek alkalmazásának a lehetőségét műszaki-gazdasági problémák megoldására a szervezés és tervezés területén. Éppen ezeket az általános ellenvetéseket akarom itt megvizsgálni.

Ezek közül az első a következőkben áll. A különböző konkrét gyakorlati feladatoknál a viszonyok olyan bonyolultak, hogy lehetetlen az összefüggéseket matematikailag figyelembe venni és a kapott egyenleteket úgy sem lehet megoldani.

Ezzel kapcsolatban két megjegyzést tehetünk. Először is — mint erre már felhívtuk a figyelmet — a bemutatott módszer igen hatásos és hajlékony: azaz lehetővé teszi a megoldást elég bonyolult helyzetekben, figyelembe lehet venni egy sor kiegészítő feltételt is, az alkalmazás során különböző változatok lehetségesek (úgyhogy mindig ki lehet választani az alkalmazás legkedvezőbb módszerét).

Másodszor, ha némelyik gyakorlati tényező nincs is figyelembe véve — akkor a legelőnyösebb megoldás megtalálása után korrekciót lehet alkalmazni és ennek során számba lehet venni az elhanyagolt tényezőt is. Ez annál inkább lehetséges, mert az adott módszer a legelőnyösebb variáns meghatározásával egyidejűleg megmutatja, hogy mely variánsok adnak a legkedvezőbbhöz közelfekvő megoldást és ezért a korrekciók alkalmazásánál lehetőség van egy kis eltérésre a legelőnyösebb megoldástól a gyakorlati végrehajthatóság érdekében.

Meg kell még mondani, hogy az idézett ellenvetést ugyanilyen joggal ki lehetne jelenteni az elméleti — speciálisan — matematikai módszerek műszaki kérdésekre való alkalmazására is. Köztudomású azonban, hogy milyen nagyra értékelik a műszaki szakemberek a jelenségeket még csak közelítőleg leíró matematikai formulákat. Az ilyen formulák szerfölött értékes iránytűként szolgálnak mind a kísérleteknél, mind a számításoknál és a műszaki tervezésben. Annál inkább értékesnek kell lennie egy olyan módszernek, amely lehetővé teszi bonyolult helyzetben egész sor feltétel egyidejű figyelembevételét.

A második ellenvetés az, hogy a módszer alkalmazásához nagyszámú különböző adat szükséges (pl. $\alpha_{i,k}$-k az első alapfeladatban stb.), azonban lehetséges, hogy ilyenek nem állnak rendelkezésre és akkor a módszer alkalmazhatatlan.

Erre azt kell válaszolni, hogy a számításhoz szükséges adatok (kihasználási normák különböző gépekre és berendezésekre, a rendelkezésre álló anyagok mennyisége, fajlagos felhasználási adatai stb.) elengedhetetlenek mindenféle más célra is — normázás, bérezés, anyagfelhasználás ellenőrzése, elszámolások stb. — és meg kell lenniük minden ésszerűen dolgozó üzemben. Röviden szólva, ezek ugyanolyan mértékben szükségesek bármilyen terv összeállításához, mint a legjobb tervnek a módszerünkkel történő kiszámításához és ezért az üzemnek ezekkel az adatokkal rendelkeznie kell.

Mégis bizonyos esetekben előfordulhat, hogy ilyen adatok nincsenek; pl. egy építkezéshez anyagnak kell beérkeznie — hogy milyen anyagnak, azt nem tudják — de mindenesetre azt még aznap munkába kell venni. Esetleg nem azokat az anyagokat küldték, amelyeket beterveztek stb. Természetesen abban a néhány üzemben, ahol ilyen primitív fokon áll a gazdasági vezetés színvonala — mindenféle tervezés és még kevésbé a leggazdaságosabb módon való tervezés lehetetlen. Azonban, ha módszereink felhasználásának az óhaja valamiféle ösztönzést szolgáltat az ilyen hozzánemértő vezetés felszámolásához, akkor ez csak bizonyíték a módszerek javára.

A harmadik ellenvetés abban áll, hogy a kiinduló adatok egy sor esetben kétségesek és csak rendkívül közelítően ismeretesek (pl. különböző kultúrák hozama, talajok hidromechanikus megmunkálásához szükséges vízmenynyiség, és más szükséges adat némely felidézett példában), ezért az ezen adatokon alapuló számítás hibásnak bizonyulhat.

Itt mindenekelőtt meg kell mondani, hogy ugyanazon adatokat kell használni a tervnek mindenféle más módszerrel történő kiválasztásánál és nincsen ok azt gondolni, hogy ezek kétségessége és pontatlansága nagyobb negatív szerepet játszik az optimális terv szempontjából, mint valamilyen véletlen alapon kiválasztott terv szempontjából.

Mindazonáltal nem zárjuk ki annak a lehetőségét, hogy ilyen esetekben a tervnek a módszerünkkel kiszámított optimális variánsa a hibás adatok eredményeképpen szintén hibásnak bizonyulhat.

Feltesszük azonban, hogy nagyszámú alkalmazás esetén a legmegfelelőbb variáns kiválasztására még ilyen kétséges adatok esetében is módszerünk valószínűleg pozitív eredményt adhat. Ezt a gondolatot a következő egyszerű példával világítjuk meg. Ha két tojás közül kiválasztjuk a nagyobbikat — akkor ez a kiválasztás kedvezőtlen lehet — mert esetleg a nagyobbik tojás romlott. Ha azonban egy ládából 1000 tojás közül kiválasztjuk az 500 legnagyobbat, akkor erősen valószínűtlen, hogy a kiválasztásnak ez a módja előnytelen lenne.

A negyedik ellenvetés abban áll, hogy a szokványos tervvariánsokhoz képest az optimális nem jelent viszonylag nagy megtakarítást, sok esetben mindössze 4—5 %-ot.

Ezzel kapcsolatban meg kell azonban mondani, hogy az optimális variáns alkalmazása semmiféle többletkiadást nem igényel a szokványos variánsokkal szemben, a teljesen jelentéktelen számítási költségeken kívül. Másodszor, a módszer alkalmazása nemcsak egyetlen véletlen kérdésben várható, hanem sokban; sőt, lehetséges, hogy a népgazdaság ágainak többségében és ilyen esetben nemcsak 1 %, de a századrész minden tizedrésze is óriási összegeket jelent.

Az ötödik ellenvetés abban rejlik, hogy egy sor esetben a módszer alkalmazása különböző szervezési jellegű akadályok miatt látszik alkalmazhatatlannak. Olyan akadályokról van itt szó, amelyek a terv, a költségvetés stb. elfogadásának fennálló jogszabályaival kapcsolatosak: például, ha bizonyos anyagokat vagy berendezéseket egyszer már meghatározott módon a terv keretei között elosztottak az üzemek között, akkor ezt az elosztást az adott tervidőszak folyamán nem lehet megváltoztatni.

Ez az ellenvetés természetesen nem lényeges. Ha általánosan elfogadottá válik, hogy az optimális tervvariánsok alkalmazása a népgazdaság számára lényeges előnyökkel jár, akkor ennek érdekében bizonyos változtatásokra lesz szükség a költségvetések, tervezetek és tervek elfogadásának jelenleg érvényes rendjében. Nem kétséges, hogy ezeket a szükséges változtatásokat végre is fogják hajtani."

(Beérkezett: 1959. X. 20.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A KOMPLEX-RENDŰ ÁLTALÁNOSÍTOTT WEYL-INTEGRÁLOK ÉS DERIVÁLTAK EGYSÉGES ELMÉLETÉHEZ, I.

Írta: MIKOLÁS MIKLÓS

Drága Szüleimnek házasságuk 40. évfordulójára, hálával és szeretettel.

TARTALOMJEGYZÉK*

* Az itt közölt első rész csak az első hat paragrafust foglalja magában.

1. § Bevezetés

1. Az a felismerés, hogy egy függvény első- és magasabbrendű integrálfüggvényei megfelelő negatív-egész-rendű deriváltakként is felfoghatók, szinte már az analízis alaperedményeinek felfedezése idején felvetett egy nehéz és több szempontból mindmáig megoldatlan problémát: hogyan lehet a közönséges (első- és magasabbrendű) differenciálhányadosok és integrálok fogalmát a deriválási, ill. integrálási rendszámra vonatkozó *interpoláció* útján egyesíteni s ezen az alapon egységes „valós-" vagy éppen „*komplex-rendű*" *infinitézimális számítást* kiépíteni.[1]

A kérdés hatalmas irodalmából kiemelendő LEIBNIZ, JOHANN BERNOULLI, EULER, FOURIER, LAGRANGE bizonyos munkái után a *törtrendű* integrál legegyszerűbb, RIEMANNtól és LIOUVILLE-től származó fogalma:

$$f_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-t)^{\mu-1} f(t)\, dt \qquad (\mu > 0;\ x \in (a,b) \text{ véges}) \tag{1.1}$$

(amely $f(u)$-nak egy p-edik integrálfüggvényébe megy át, ha μ helyébe egy p pozitív számot írunk), majd — a századforduló óta — HADAMARD, HADWIGER, HARDY, LITTLEWOOD, RIESZ MARCELL, L. SCHWARTZ, H. WEYL és más matematikusok számos idevágó közleménye.[2] — Ma már világosan látható a problémának szerteágazó kapcsolata bizonyos függvényegyenletekkel, integráltranszformációkkal, valamint az a tény, hogy egymástól erősen eltérő megközelítési módok lehetségesek aszerint, hogy az $f(u)$ alapfüggvényt milyen függvényosztályból választjuk és miféle alkalmazási lehetőségeket tartunk szem előtt. (E tekintetben utalunk pl. DOETSCH [7], III./2. kötetének megfelelő fejezetére.)

Speciálisan holomorf függvényekre HADAMARD [11] definíciója tekinthető elfogadottnak, mely $f_\mu(x)$-et általánosított hatványsor alakjában adja meg, míg a periodikus függvények felhasználási területein — így a trigonometrikus sorok elméletében — csak az ún. WEYL-féle törtrendű integrál:

$$f_\theta(x) - \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\theta-1} f(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty f(x-t)\, t^{\theta-1} dt. \quad (0 < \theta < 1;\ 0 < x < 1) \tag{1.2}$$

(ahol $f(u) \in L(0,1)$, 1 szerint periodikus és $\int_0^1 f(u)\, du = 0$) bizonyult alkalmas segédeszköznek.[3] Többváltozós függvényekre vonatkozólag — a hullámegyenletnek egy új megoldási módszerével kapcsolatban — RIESZ MARCELL vezette be (1. 1)-nek egy nevezetes kiterjesztését (vö. [48]).

Törtrendű deriváltakat az irodalomban (1. 1) segítségével szokás definiálni, ti. az

$$f^\mu(x) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f_{m-\mu+1}(x) \qquad (m \leqq \mu < m+1) \tag{1.3}$$

képlettel ($m \geqq 0$, egész), vagy pedig implicit módon, a megfelelő integrálegyenletek meg-

[1] Vö. pl. Enzykl. d. math. Wiss. II. 1./1. (A. Voss: Differential- und Integralrechnung), 116—119.

[2] L. pl. [46], [26], [11], [12], [14], [16], [48], [50], [55], [22].

[3] (1. 2) — és $0 < \mu < 1$ esetén (1. 1) is — általában csak majdnem minden x-re létezik.

oldásaiként (DOETSCH); a nyert fogalom egyik esetben sem tekinthető a klasszikus $f^{(p)}(x)$ $(p=1, 2, \ldots)$ deriváltak maradéktalan általánosításának.

Az utóbbi évek és évtizedek sok érdekes részeredménye ellenére megállapíthatjuk: eddig még sehol nem került kifejtésre tetszőleges rendű deriváltak és integrálok egységes elmélete a legáltalánosabb szóbajövő függvényosztály esetében.

2. E dolgozat fő célja mármost egy W_s-*limesznek* nevezett, tetszőleges komplex $L(0, 1)$ osztálybeli[4] $f(u)$ függvényre értelmezett új fogalom bevezetése és rendszeres tárgyalása, mely komplex s rendszámokra való *közös,* egyidejű kiterjesztése az *iterált,* valamint a *törtrendű integrálok*nak és a (DE LA VALLÉE—POUSSIN-féle) *általánosított szimmetrikus deriváltak*nak.[5]

Hasznosnak mutatkozik, hogy $f(u)$ *trigonometrikus Fourier-sorából* induljunk ki és a W_s-limeszek elméletét erre alapozzuk; ily módon — mint látni fogjuk — meglehetősen változatos (részint valós, részint komplex függvénytani) módszerek alkalmazására nyílik lehetőség, és az elmélet szoros kapcsolatba kerül a *zetafüggvények* tulajdonságaival.

3. Legyen $x \in (0, 1)$, $f(u) \in L(0, 1)$, $f(u+1) = f(u)$ $(-\infty < u < \infty)$ és

$$f(u) \sim \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos 2n\pi u + \beta_n \sin 2n\pi u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{2n\pi i u}; \tag{1.4}$$

$f(u)$-nak az $u=x$ helyhez tartozó W_s-integrálját a $\Re(s) > 1$ félsíkban az

$$f_{[s]}(x) = \cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s} + \sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_n(x)}{(2n\pi i)^s} \tag{1.5}$$

képlettel definiáljuk, ahol $a_n(x) = (\alpha_n - \alpha_0)\cos 2n\pi x + \beta_n \sin 2n\pi x$, $b_n(x) = (\alpha_n - \alpha_0)\sin 2n\pi x - \beta_n \cos 2n\pi x$, $c_n(x) = a_n(x) + i b_n(x) = (\gamma_n - \gamma_0)e^{2n\pi i x}$.

Fennáll az

$$\left\{\begin{array}{ll} f_{[s]}(x) = \int\limits_0^1 f(x-t)[\mathfrak{Z}_s(t) - \mathfrak{Z}_s(x)]\,dt & (\Re(s) > 1), \\ \mathfrak{Z}_s(u) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^s}\cos\left(2n\pi u - \frac{\pi s}{2}\right) & (u \neq 0, \pm 1, \ldots) \end{array}\right. \tag{1.6}$$

integrál-előállítás, és a továbbiak szempontjából lényeges, hogy az itt előforduló magfüggvény HURWITZ egy formulája szerint:

$$\mathfrak{Z}_s(u) = \Gamma(s)^{-1}\zeta(1-s, u) \qquad (0 < u \leqq 1), \tag{1.7}$$

hol $\zeta(s, u)$ a ($\Re(s) > 1$ mellett a $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(m+u)^{-s}$ sorral értelmezett) generalizált zetafüggvényt jelenti. — Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{Z}_s(u)$ s-nek *egész* függvénye és $\mathfrak{Z}_0(u) \equiv -1$, $\mathfrak{Z}_p(u) = -B_p(u)$ $(p=1, 2, \ldots)$ folytán a BERNOULLI-polinomok egy „transzcendens" általánosításának is tekinthető.

[4] Annak, hogy éppen $(0, 1)$-et választjuk alapintervallumnak, természetesen semmi jelentősége nincs.

[5] Vö. [58], 257.

(1.5) — (1.6) alapján közelfekvő a gondolat, hogy $f_{[s]}(x)$ definícióját a $\Re(s) \leqq 1$ esetre — ha ez egyáltalán lehetséges — s-re mint komplex változóra *vonatkozó analitikus folytatással* terjesszük ki. Pontosabban: adott $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, rögzített $x \in (0, 1)$ mellett képezzük az $(s = \sigma + i\tau)$

$$f_{[s_0]}(x) = \lim_{\sigma \to \sigma_0 + 0} f_{[\sigma + i\tau_0]}(x) \tag{1.8}$$

határértéket, feltéve, hogy $f_{[s]}(x)$ analitikusan folytatható egy oly (nyílt) tartományban, mely tartalmazza az $s > 1$ félegyenest és valamely $s = \sigma + i\tau_0$ $(\sigma_0 < \sigma \leqq \sigma_0 + \varepsilon)$ egyenesdarabot. — Az (1.8) limesz létezése esetén azt mondjuk, hogy $f(u)$ *W_{s_0}-limitálható* az $u = x$ helyen; $f_{[s_0]}(x)$ neve: $f(u)$ *W_{s_0}-limesze* a szóban forgó pontban.[6] Így például $f(u) \equiv -1$ esetében

$$(-1)_{[s]}(x) = \mathfrak{Z}_s(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{1.9}$$

minden s-re. (Vö. 2.—4. §).

$f_{[s]}(x)$ két irányban (ti. rendszám és alapfüggvény tekintetében) *általánosítja a* WEYL-*féle törtrendű integrált,* mely általában divergenssé válik, 1. ha $\theta \geqq 1$, vagy $\theta \leqq 0$; 2. ha $f(u)$ $(0, 1)$-en vett integrálja nem tűnik el. Így pl. $f_\theta(x)$ egy $f(u) \equiv K \neq 0$ konstans függvényre sem alkalmazható, viszont (1.9)-ből $(K)_{[s]} = -K\mathfrak{Z}_s(x)$. Különben majdnem minden x-re:

$$f_{[s]}(x) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^\infty f(x-t) \{t^{s-1} - ([t] + x)^{s-1}\} \, dt \qquad (0 < \sigma < 1), \tag{1.10}$$

ami $f_\theta(x)$ $(0 < \theta < 1)$ létezése esetén $s = \theta$ mellett (1.2)-be, $f(u) \equiv -1$, $x = 1$ mellett pedig a $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ RIEMANN-*féle zetafüggvény* (kritikus sávbeli) legegyszerűbb integrál-kifejezésébe megy át (vö. (7.11), (7.12)). — Ha $s = p(p = 1, 2, \ldots)$, (1.5)-ből folyóan $f_{[s]}(x)$ $f(u)$-nak egy p-edik integrálfüggvényét jelenti, míg $s = 0, -1, -2, \ldots$ mellett ismételten differenciált FOURIER-sorokra vonatkozó (C)-szummációs tételek felhasználása mutatja, hogy $f_{[-p]}(x)$ az $f_{(p)}(x)$ általánosított derivált kiterjesztésének tekinthető $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ (Vö. II. tétel, 2.).

4. Az eredmények vázlatos ismertetésére térve, fő szempontként kiemeljük, hogy $f_{[s]}(x)$-et elsősorban (adott $x \in (0, 1)$ és $f(u)$ mellett) mint s függvényét vizsgáljuk: ezt a fentiek szerint már maga a W_s-limesz tényleges meghatározása, $W(s) = f_{[s]}(x)$ analitikus folytatásának realizációja is szükségessé teszi. Közben részletesen kitérünk arra a kapcsolatra is, mely $f(u)$-nak a legfontosabb ($L(0, 1)$-nél szűkebb) függvényosztályokból való választása és $f_{[s]}(x)$ létezése és tulajdonságai között fennáll.

Az elmélet alapjait nyújtó első részben a definíciók előkészítését, legáltalánosabb alakban való megfogalmazását és a $\mathfrak{Z}_s(u)$ magfüggvény (később állandóan felhasználásra kerülő) tulajdonságainak kifejtését követi a definíciók közvetlen folyományainak felsorolása és a W_s-limeszek létezését biztosító legegyszerűbb tétel megoldása (2.—4. §). Mivel $\sigma < 1$ mellett mind az (1.5) sor-, mind az (1.6) integrálelőállítás általában értelmét veszti, tüzetesebb vizsgálatot igényel a minimális kikötések mellett való kiterjesztés az említett félsíkra. Az 5. §-ban CESÀRO- és ABEL-szummációnak a

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n(x)(2n\pi)^{-s} = f(s, x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n(x)(2n\pi)^{-s} = \tilde{f}(s, x) \quad (\sigma > 1) \tag{1.11}$$

DIRICHLET-sorokra alkalmazása rávilágít pl. a megfelelő szummációs abszcisszák helyzetének

[6] Speciálisan $\sigma_0 > 0$ mellett W_{s_0}-*integrál*ról, $\sigma_0 \leqq 0$ mellett W_{s_0}-*derivált*ról beszélünk.

és $f_{[s]}(x)$ egzisztencia-tartományának, valamint az $f_{[0]}(x), f_{[-1]}(x), f_{[-2]}(x), \ldots$ W_s-limeszeknek és a megfelelő általánosított deriváltaknak az összefüggésére; a 6. §-ban viszont $\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]\,dt$ diszkussziója révén sikerül teljesen tisztázni $f_{[s]}(x)$ *létezésének* problémáját erre vonatkozó alkalmas *szükséges és elegendő kritérium* bebizonyításával (vö. IV. tétel). Az utóbbinak nevezetes következménye egy *lokalizáció-tétel*, mely szerint $f_{[s]}(x)$ $(\sigma \leqq 1)$ létezése csak az x hely egy *tetszőleges kicsi baloldali környezetében* felvett f-függvényértékektől függ; a csatlakozó V. tétel alapján $f_{[s]}(x)$ értéke egy $\sigma > -p$ $(p \geqq 0$, egész) félsíkban meghatározható pl., ha $f^{(p)}(u)$ egy $(x-\varepsilon, x)$ $(\varepsilon > 0)$ közben létezik és korlátos, ill. $f^{(p-1)}(u)$ $(p \geqq 1)$ egy ilyen intervallumban abszolút folytonos. (Korolláriumként adódik még egy LIPSCHITZ-feltételt tartalmazó megállapítás és az a tény, hogy $f_{[-p]}(x) = f^{(p)}(x-0)$, amennyiben az utóbbi limesz létezik.) — Külön figyelmet igényel a W_s-limeszek, ill. az (1. 5) sorok és az (1. 6) integrál viselkedése a $0 < \sigma \leqq 1$ „átmeneti" sávban; ezzel foglalkozik a 7. §. A szóban forgó s-értékekre $f_{[s]}(x)$ tetszőleges $f(u) \in L(0, 1)$ esetén csak *majdnem minden* x helyen létezik, viszont pl. $f(u) \in L^q(0,1)$ $(1 < q \leqq \infty)$ és a $\sigma > 1/q$ feltétel mellett (1. 6) fennállása (sőt $f_{[s]}(x)$ folytonossága) *minden* $x \in (0, 1)$ pontban biztosítva van; ha $0 < s < 1$ és $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, a WEYL-integrál esetére jutunk (vö. (1. 10); VI.—VII. tétel).

A második rész egyfelől $W(s) = f_{[s]}(x)$ holomorfia-tartományát (ill. az s-síkbeli *szingularitások* elhelyezkedését) teszi vizsgálat tárgyává $f(u)$-ra tett megszorítás *nélkül*, másfelől azt a fontos speciális esetet tárgyalja, midőn az f alapfüggvény a $w = u + iv$ komplex változónak *holomorf* függvénye. — A 8. §-ban — lényegesen támaszkodva a IV. tételre — meg tudjuk adni $f_{[s]}(x)$ szingularitás-eloszlásának bizonyos jellemző adatait: $W(s)$ bármely $\sigma > 1$ félsíkbeli ponthoz tartozó *„regularitási sugarát"* és *„regularitási abszcisszáját"*, továbbá $f_{[s]}(x)$-nek tetszőleges oly körlemezben érvényes (egyszerű együttható-törvényű) hatványsor-előállítását, melynek középpontja a $\sigma > 1$ félsíkban fekszik, határa pedig $W(s)$-nek legalább egy szinguláris helyét tartalmazza (vö. VIII. tétel). A 9. §-ban hatványsorok „erős" szummációs eljárásainak felhasználása (BOREL-, LE ROY-, LINDELÖF-, MITTAG—LEFFLER-módszer) az utolsó eredmény továbbfejlesztését teszi lehetővé, majd a MITTAG-LEFFLER-szummációnak egy RIESZ MARCELL-féle (DIRICHLET-sorokra vonatkozó) általánosítása révén meghatározhatóvá válik $f(s, x)$ és $\tilde{f}(s, x)$ ún. *fő csillagtartománya* is.[7] (IX.—X. tétel). — Ha pl. $W(s) = f_{[s]}(x)$-nek (mint teljes analitikus függvénynek) csak izolált szinguláris helyei vannak, akkor a 9. § eredményei megvalósítják $f_{[s]}(x)$ analitikus folytatását az egész s-síkra; nyilván nem érdektelen azonban az a felismerés, hogy (az x hely környezetében) reguláris $f(w)$ függvénynél e kiterjesztés közvetlenül, (1. 6)-nak *komplex vonalintegrállá* való átalakításával is elvégezhető.[8] A szóban forgó függvényosztályra célszerű $f_{[s]}(x)$ definíciójának bővítése komplex z argumentum esetére; az említett gondolat alkalmazása a *Cauchy-féle integrálformulák közös általánosítását* szolgáltatja, majd a CAUCHY-féle együttható-becslések, a TAYLOR-sor, ($e^{2\pi i z}$ szerint haladó) LAURENT-sor megfelelően kiterjesztett alakjára jutunk. (10. §; XI—XIII. tétel). A továbbiakban $f_{[s]}(z)$ számára ún. HANKEL-típusú *hurokintegrál-előállítások* adódnak, melyek közül az egyik (1. 2)-nek, a másik pedig a zetafüggvény klasszikus RIEMANN-féle integrál-kifejezésének felel meg (11. §; XIV.—XVI. tétel).

[7] Ezzel együtt ismerjük az s-sík minden „vízszintes" egyenesének „jobbról" nézve első szinguláris pontját (vö. (9. 11)—(9. 12)).

[8] Esetünkben $W(s)$-nek egyáltalában nincs (a végesben) szingularitása, vagyis *egész* függvény.

A harmadik rész mindenekelőtt a W_s-limeszek *konvolúció*-jellegéből folyó sajátságokkal foglalkozik; az eredmény két függvényegyenlet, melyek közül az első a W_s-limeszképzés operátorának, a második pedig maguknak a W_s-limeszeknek (a konvolválás műveletére vonatkozó) *„félcsoport-tulajdonságát"* fejezi ki (Vö. 12. §; XVII.—XVIII. tétel). A következő fejezetben — $W(s)=f_{[s]}(x)$ *aszimptotikájának* vizsgálatára térve — előbb egy-egy $\sigma=$ konstans, vagy $\tau=$ konstans egyenesmenti O-becslés, majd (általánosabban) $|s|\to\infty$ határátmenetre vonatkozó aszimptotikus kifejtés kerül sorra; az utóbbi konvergenssé válik és a közönséges TAYLOR-sornak egy *újabb* (más irányú) *általánositásába* megy át, ha pl. $f(u)$ derivált-sorozata az x hely egy környezetében *egyenletesen korlátos* (XIX.—XX. tétel). A 14. §-ban az *értékkészlet* behatóbb tanulmányozásának segédeszközeiként bevezetjük a *„w_0-mentességi sugár"* és a *„w_0-mentességi abszcissza"* fogalmát (w_0 tetszőlegesen előírt komplex szám), majd ezeknek és a 8. § eredményeinek felhasználásával két általános tételt bizonyítunk be nemkonstans analitikai — főleg meromorf — függvények w_0-helyeire vonatkozólag (XXI.—XXII. tétel). Az utóbbiak alkalmazása korlátos együtthatójú DIRICHLET-sorokra, speciálisan $\frac{1}{2}(2\pi)^s f(s,x)$-re és $\frac{1}{2}(2\pi)^s \tilde{f}(s,x)$-re, lehetővé teszi oly (maximális) körök, ill. félsík helyzetének *pontos* és *egyszerű közelítő* jellemzését, melyekben a vizsgált függvény egy-egy előírt értéket nem vesz fel; így pl. $\zeta(s)$ gyök-abszcisszáinak Θ felső határa is pontosan kifejezhető kizárólag a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}(\sigma>1)$ sor és deriváltjai segítségével. (Vö. 5. lemma, XXIII. tétel, (14. 26).) — Végül a 15. §-ban az elmélet bizonyos továbbfejlesztési s több irányú alkalmazási lehetőségeit (szummáció, hatványsorok konvergenciakör-menti szingularitásainak vizsgálata, általánosított differenciál- és integrálegyenletek) tekintjük át.

I. RÉSZ. A W_s-LIMESZEK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉNEK ALAPJAI

2. § $f_{[s]}(x)$ értelmezése, midőn $\Re(s)>1$

1. Legyen $f(x)$ egy $(0,1)$-ben L-integrálható és 1 szerint periodikus, valós- vagy komplex-értékű függvény.

Tekintsük $f(x)$-nek $(0,1)$-hez tartozó közönséges FOURIER-sorát:

$$(2.\,1)\qquad \begin{cases} f(x)\sim\alpha_0+2\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos 2n\pi x+\beta_n\sin 2n\pi x),\\ \alpha_n=\int_0^1 f(t)\cos 2n\pi t\,dt,\qquad \beta_n=\int_0^1 f(t)\sin 2ntdt,\end{cases}$$

s integráljuk azt p-szer ($p\geqq 1$). Ekkor adódik

$$(2.\,2)\qquad H_p(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^p}\left[\alpha_n\cos\left(2n\pi x-\frac{p\pi}{2}\right)+\beta_n\sin\left(2n\pi x-\frac{p\pi}{2}\right)\right],$$

ahol $H_p(x)$ tetszőleges, legfeljebb p-edfokú polinom, melyre $\frac{d^p}{dx^p}H_p(x)=\alpha_0$;

(2. 2) tudvalevőleg minden x-re egyenletesen konvergens és összege oly (legalább abszolút folytonos) $F_p(x)$ függvény, melynek p-edik deriváltja majdnem mindenütt létezik és egyenlő $f(x)$-szel.

Mivel $F_p(x)$ általában nem periodikus, célszerű (2. 2)-ben $H_p(x)$-et a megfelelő 1 szerint periodikus függvénnyel, azaz $H_p(x)$ (0, 1)-hez tartozó FOURIER-sora $\bar{H}_p(x)$ összegfüggvényével helyettesíteni. Ha még — egyszerűségre törekedve — az említett FOURIER-kifejtés konstans tagját 0-nak vesszük, tehát kikötjük, hogy

$$(2.3) \qquad \int_0^1 H_p(x)dx = 0 \qquad (p=1,2,\ldots),$$

akkor $H_p(x)$-et a fenti $H_1'(x)=\alpha_0$, $H_{p+1}'(x)=H_p(x)\,(0<x<1;\ p=1,2,\ldots)$ feltételek és (2. 3) már egyértelműen meghatározzák; nyilvánvaló, hogy[9]

$$(2.4) \qquad \bar{H}_p(x)=\alpha_0 B_p(x)$$

a $0<x<1$ intervallumban és

$$(2.5) \qquad \bar{H}_p(x)=-\alpha_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^p}\cos\left(2n\pi x-\frac{p\pi}{2}\right) \qquad (p=1,2,\ldots)$$

minden x-re.

2. A következőkben feltesszük, hogy $0<x<1$.

Ha (2. 2)-be $H_p(x)$ helyett beírjuk $\bar{H}_p(x)$ (2. 5) alatti kifejezését, erre a p-edik integrálfüggvényre jutunk:

$$(2.6) \quad f_{[p]}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^p}\left[(\alpha_n-\alpha_0)\cos\left(2n\pi x-\frac{p\pi}{2}\right)+\beta_n\sin\left(2n\pi x-\frac{p\pi}{2}\right)\right]$$
$$(p=1,2,\ldots),$$

s kézenfekvő — a p természetes szám szerepét egy $s=\sigma+i\tau$ *komplex* paraméternek átadva — a jobboldal helyett az általánosabb

$$(2.7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^s}\left[(\alpha_n-\alpha_0)\cos\left(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\right)+\beta_n\sin\left(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\right)\right]$$

sort vizsgálnunk.

[9] E dolgozatban $B_p(x)$ mindig a $ze^{xz}/(e^z-1)=\sum_{p=0}^{\infty}B_p(x)z^p$ $(|z|<2\pi)$ sorfejtés által definiált (p-edfokú) BERNOULLI-polinomot jelenti; a $B_p(x)$ és a $B_p=p!\,B_p(0)\,(p=0,1,2,\ldots)$ BERNOULLI-számok tulajdonságait illetően l. pl. [41] — KNOPP [20] jelölését használjuk, mely NÖRLUND-étól a p-edfokú BERNOULLI-polinomnál $1/p!$ szorzóban különbözik.

Minthogy a RIEMANN—LEBESGUE-lemma alapján $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$, (2. 7) konvergens, ha $\sigma > 1$ vagy $s = 1$, sőt a $\sigma > 1$ félsík bármely véges résztartományában abszolút és (x-re nézve) egyenletesen összetartó. $\sigma > 1$ vagy $s = 1$ esetén a (2. 7) sor összegét, vagyis — az

$$\left\{\begin{aligned} a_n(x) &= (\alpha_n - \alpha_0)\cos 2n\pi x + \beta_n \sin 2n\pi x, \\ b_n(x) &= (\alpha_n - \alpha_0)\sin 2n\pi x - \beta_n \cos 2n\pi x \end{aligned}\right. \tag{2. 8}$$

jelöléssel élve — az

$$f_{[s]}(x) = \cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s} + \sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s} \tag{2. 9}$$

komplex számot az $f(u)$ *függvény* $u = x$ *helyhez tartozó* W_s*-integráljának* fogjuk hívni.[10]

Mindjárt ideiktatjuk a (2. 7) sornak, ill. (2. 9) jobboldalának egy másik hasznos alakját:

$$e^{-\frac{i\pi s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(x)}{(2n\pi)^s} + e^{\frac{i\pi s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}(x)}{(2n\pi)^s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_n(x)}{(2n\pi i)^s}, \tag{2. 10}$$

hol a $'$ arra utal, hogy $n \neq 0$, $(2n\pi i)^s$ főértéket jelent és

$$\left\{\begin{aligned} c_n(x) &= a_n(x) + i b_n(x) = (\gamma_n - \gamma_0)e^{2n\pi i x}, \\ \gamma_n &= \alpha_n - i\beta_n = \int_0^1 f(t)e^{-2n\pi i t}\,dt. \end{aligned}\right. \tag{2. 11}$$

Ha $f(u)$ valós-értékű függvény és s valós, (2. 10) így írható:

$$\Re\left(e^{-\frac{i\pi s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c_n(x)}{(2n\pi)^s}\right).$$

3. Könnyű előállítani $f_{[s]}(x)$-et *zárt* (integrál-) *alakban.* — Valóban, (2. 8) figyelembevételével közvetlenül nyerjük a szóban forgó x- és s-értékekre:

$$\left\{\begin{aligned} f_{[s]}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f(t)\cdot 2(2n\pi)^{-s}\left[\cos\left(2n\pi(x-t) - \frac{\pi s}{2}\right) - \right. \\ &\left. -\cos\left(2n\pi x - \frac{\pi s}{2}\right)\right]dt = \int_0^1 f(t)[\mathfrak{Z}_s(x-t) - \mathfrak{Z}_s(x)]\,dt = \\ &= \int_0^1 f(x-t)[\mathfrak{Z}_s(t) - \mathfrak{Z}_s(x)]\,dt, \end{aligned}\right. \tag{2. 12}$$

[10] Bizonyos esetekben (pl. konkrét $f(u)$ függvényekre) használni fogjuk az $(f(u))_{[s]}(x)$ jelölést is.

ahol

$$\mathfrak{Z}_s(u)=\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{2}{(2n\pi)^s}\cos\left(2n\pi u-\frac{\pi s}{2}\right) \qquad (u\neq 0, \pm 1, \ldots); \tag{2. 13}$$

az összegezés és integrálás sorrendjének felcserélhetősége következik a tagonkénti integrálhatóságra vonatkozó LEBESGUE-tételből.

3. § A $\mathfrak{Z}_s(u)$ magfüggvény

1. (2. 12)—(2. 13) alapján $f_{[s]}(x)$ kapcsolatba kerül a *zetafüggvények* elméletével.

Mindenekelőtt kiemeljük, hogy HURWITZ egy formulájának[11] felhasználásával:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{Z}_s(u) &= \cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos 2n\pi u}{(2n\pi)^s}+\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin 2n\pi u}{(2n\pi)^s}= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2n\pi i u}}{(2n\pi i)^s}=\Gamma(s)^{-1}\zeta(1-s,u) \qquad (\sigma>1;\, 0<u\leqq 1), \end{aligned}\right. \tag{3. 1}$$

ahol $\zeta(s,u)$ a $\sum_{m=0}^{\infty}(m+u)^{-s}$ $(\sigma>1;\, u>0)$ sorból analitikus folytatással származó általánosított (ún. HURWITZ-féle) zetafüggvény; megjegyzendő, hogy a (2. 13), (3. 1) alatti sorok konvergenciája és a HURWITZ-formula érvényessége — mint újabban megmutattuk — bármely rögzített $u\in(0,1)$ esetén a $0<\sigma\leqq 1$ sávra nézve is fennáll.[12] — Mivel $\zeta(s,1)=\zeta(s)$ és $\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right)=(2^s-1)\zeta(s)$, ahol $\zeta(s)$ a $\sigma>1$ félsíkban a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ DIRICHLET-sorral definiált RIEMANN-féle zetafüggvény, (3. 1) $u=1$, vagy $u=\frac{1}{2}$ esetén a

$$\zeta(1-s)=2\Gamma(s)(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(s) \tag{3. 2}$$

relációba, $\zeta(s)$ függvényegyenletébe megy át.

(2. 13) és (3. 1) alapján írhatjuk minden valós u-ra:

$$\mathfrak{Z}_s(u)=\Gamma(s)^{-1}\bar{\zeta}(1-s,u) \qquad (s\neq 0); \tag{3. 3}$$

itt $\bar{\zeta}(s,u)$ azt az u-ra vonatkozólag 1 szerint periodikus függvényt jelenti, mely a $0<u\leqq 1$ számközben megegyezik $\zeta(s,u)$-val. (Azaz nem-egész u-ra

[11] L. pl. [53], 37; [56], 269.
[12] L. [31], 148; [33], 261—263.

$\bar{\zeta}(s, u) = \zeta(s, \{u\}) - \{u\}$ törtrészt jelöl —, különben pedig $\bar{\zeta}(s, \nu) = \zeta(s)$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).)

2. Mint tudjuk, $\zeta(s, u)$ bármely fix $u \in (0, 1]$ esetén s-nek az egész síkon reguláris függvénye, eltekintve az $s = 1$ ponttól, hol elsőrendű pólusa van 1 reziduummal. A $\Gamma(s)$ gammafüggvény szintén meromorf és sehol sem tűnik el; pólusai az $s = 0, -1, -2, \ldots$ helyek (egyaránt 1 rendszámmal), legalapvetőbb tulajdonságai pedig: $\Gamma(m+1) = m!$ $(m = 0, 1, \ldots)$, továbbá

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \tag{3.4}$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi \operatorname{cosec} \pi s. \tag{3.5}$$

Innen folyólag $\Gamma(s)^{-1}$ (transzcendens) egész függvény, melynek 0 és a negatív egész számok az összes (mégpedig egyszeres) gyökei.[13]

Ami a HURWITZ-féle zetafüggvényt, mint u függvényét illeti, ennek ismert sor-, ill. integrál-alakjaiból következik, hogy $\zeta(s, u)$ bármely rögzített $s \neq 1$ esetén u-nak $(0,1)$-ben differenciálható függvénye, nevezetesen: $\frac{\partial}{\partial u}\zeta(s,u) = -s\zeta(s+1,u)$.
Az $u = 1$ pontban $\zeta(s, u)$ $s \neq 1$ mellett balról folytonos, $u = 0$-nál $\sigma < 0$ mellett $\lim\limits_{u \to +0} \zeta(s, u) = \zeta(s)$, míg a $\sigma \geqq 0$ esetben $u \to +0$ határátmenetnél $\zeta(s,u)$-nak ugyan nincs határértéke, de $\zeta(s, u) - \zeta(s, u+1) = u^{-s}$ folytán $\lim\limits_{u \to +0} [\zeta(s, u) - u^{-s}] = \zeta(s)$ $(s \neq 1)$.[14]

Mindezek alapján kimondhatjuk a következőket:

1. LEMMA. *$\mathfrak{Z}_s(u)$ bármely fix valós u esetén s-nek egész és minden komplex s-re u-nak $(-\infty, \infty)$-ben differenciálható függvénye, eltekintve a $0, \pm 1, \ldots$ helyektől; bármely rögzített s-re fennáll a*

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{Z}_{s+1}(u) = \mathfrak{Z}_s(u) \quad (u \text{ nem-egész}) \tag{3.6}$$

függvényegyenlet,[15] *továbbá*

$$\lim_{u \to 1-0} \mathfrak{Z}_s(u) = \mathfrak{Z}_s(1), \tag{3.7}$$

$$\lim_{u \to +0} [\mathfrak{Z}_s(u) - \Gamma(s)^{-1} u^{s-1}] = \mathfrak{Z}_s(1). \tag{3.8}$$

$\mathfrak{Z}_s(u)$ az $u = 0, \pm 1, \ldots$ helyeken is folytonos $\sigma > 1$ és differenciálható $\sigma > 2$ mellett; az utóbbi esetben érvényben marad (3.6).

[13] Itt természetesen csak azokat a tényeket említjük, amelyek azonnal vagy hamarosan felhasználásra kerülnek.

[14] Vö. [31], 145—147.

[15] Innen természetesen következik $\mathfrak{Z}_s(u)$ *akárhányszori differenciálhatósága* és $\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} \mathfrak{Z}_s(u) = \mathfrak{Z}_{s-\nu}(u)$ (u nem-egész; $\nu = 1, 2, \ldots$).

Külön tisztázandó még $\mathfrak{Z}_s(u)$ viselkedése (fix u mellett) az $s=0$ pontban. Itt $\bar{\zeta}(1-s, u)$-nak elsőrendű pólusa van ugyan, de ezt $\Gamma(s)^{-1}$ ugyanilyen multiplicitású gyöke „kiegyenlíti": a szingularitás megszüntethető. Minthogy $\lim_{s\to 0} \Gamma(s)^{-1}\bar{\zeta}(1-s, u)=-1$,[16] $\mathfrak{Z}_s(u)$ értéke a szóban forgó helyen:

$$\mathfrak{Z}_0(u)\equiv -1 \qquad (-\infty < u < \infty). \tag{3.9}$$

Fontosak $\mathfrak{Z}_s(u)$-nak az s-sík többi egészszámú pontjában felvett értékei is. — Az $s=-1, -2, \ldots$ pontok $\Gamma(s)^{-1}$-nek zérushelyei lévén, kapjuk:

$$\mathfrak{Z}_{-p}(u)\equiv 0 \qquad (-\infty < u < \infty;\ p=1, 2, \ldots); \tag{3.10}$$

másrészt, bármely $u \in (0, 1)$-re a HURWITZ-formulából: $\zeta(1-p, u)=-(p-1)!\, B_p(u)\ (p=1, 2, \ldots)$, tehát

$$\mathfrak{Z}_p(u)=-B_p(u) \qquad (0<u<1;\ p=1, 2, \ldots). \tag{3.11}$$

Eszerint $\mathfrak{Z}_s(u)$ úgy tekinthető, mint a *Bernoulli-függvények* (komplex indexekre vonatkozó) *közös általánosítása;* (3.6) a jól ismert $B'_{p+1}(u)=B_p(u)$ alaptulajdonságnak felel meg.

3. Mivel az 1. lemma alapján (vö. (3.8)) $\sigma>0$ mellett $\mathfrak{Z}_s(u) \in L(0, 1)$ és (3.1) egyúttal $\mathfrak{Z}_s(u)$-nak $(0, 1)$-hez tartozó FOURIER-kifejtése, ezért

$$\int_0^1 \mathfrak{Z}_s(u)du=0 \qquad (\sigma>0), \tag{3.12}$$

megfelelően annak, hogy $\int_0^1 B_p(u)du=0\ (p=1, 2, \ldots)$.

A következő tétel mutatja, hogy $\mathfrak{Z}_s(u)$ más egyszerű integrál-relációknak is eleget tesz.

2. LEMMA. *Ha az* $s_1=\sigma_1+i\tau_1$, $s_2=\sigma_2+i\tau_2$ *komplex paraméterek kielégítik a* $\min(\sigma_1, 1)+\min(\sigma_2, 1)>0$ *feltételt, akkor*

$$\int_0^1 \mathfrak{Z}_{s_1}(u)\mathfrak{Z}_{s_2}(u)\,du=(2\pi)^{-(s_1+s_2)}\cos\frac{\pi}{2}(s_1-s_2)\zeta(s_1+s_2); \tag{3.13}$$

továbbá $\sigma_1>0, \sigma_2>0$ *és* $0<x<1$ *mellett fennáll, hogy*

$$\int_0^1 \mathfrak{Z}_{s_1}(u)\mathfrak{Z}_{s_2}(x-u)du=\mathfrak{Z}_{s_1+s_2}(x).\text{[17]} \tag{3.14}$$

[16] Vö. pl. [56], 266.

[17] A konvolúciók szokásos jelölését felhasználva, (3.14) röviden így írható: $\mathfrak{Z}_{s_1}*\mathfrak{Z}_{s_2}=\mathfrak{Z}_{s_1+s_2}$; a baloldal a két „konvolúció-faktorban" szimmetrikus. — (3.13) és (3.14) egy közös kiterjesztését s ennek analitikus számelméleti alkalmazását illetően l. [37]; vö. még [29], lemma 5. és [32].

BIZONYÍTÁS. 1° (3. 13) közvetlen folyománya a [31] dolgozat 3. tételében megadott

$$\left\{\begin{aligned}&\int_0^1 \zeta(s_1, u)\zeta(s_2, u)du = (2\pi)^{s_1+s_2-2}\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_2)\cos\frac{\pi}{2}(s_1-s_2)\zeta(2-s_1-s_2)\\ &\max(\sigma_1, 0)+\max(\sigma_2, 0)<1\end{aligned}\right.$$

relációnak. (A $\sigma_1 > \frac{1}{2}, \sigma_2 > \frac{1}{2}$ esetben elegendő (3. 1)-re és a PARSEVAL-formulára hivatkoznunk, mert ekkor (3. 8) alapján nyilván $\mathfrak{Z}_{s_1}(u) \in L^2(0, 1)$, $\mathfrak{Z}_{s_2}(u) \in L^2(0, 1)$; különben azonban mélyebb diszkusszió szükséges.)

2° (3. 14) igazolása végett induljunk ki abból, hogy a baloldali konvolúció $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ mellett nyilván majdnem minden x-re létezik és a $0 < x < 1$ intervallumban L-integrálható, továbbá bármelyik komplex FOURIER-állandója $\mathfrak{Z}_{s_1}(u)$ és $\mathfrak{Z}_{s_2}(u)$ megfelelő FOURIER-együtthatójának szorzata.[18]

Így $K_{s_1, s_2}(x) = \int_0^1 \mathfrak{Z}_{s_1}(u)\mathfrak{Z}_{s_2}(x-u)\,du$ (0, 1)-hez tartozó FOURIER-sora:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-(s_1+s_2)} e^{2n\pi i x};$$

ez egyfelől (vö. (3 .1)) *minden* $x \in (0, 1)$ pontban konvergens és összege $\mathfrak{Z}_{s_1+s_2}(x)$, másfelől a FEJÉR—LEBESGUE-tétel alapján $(C, 1)$-szummája s egyúttal összege *m. m.* x-re $K_{s_1, s_2}(x)$. Következik tehát, hogy

$$K_{s_1, s_2}(x) = \mathfrak{Z}_{s_1+s_2}(x) \tag{3. 15}$$

majdnem mindenütt; mivel a jobboldal (az 1. lemma szerint) differenciálható a $0 < x < 1$ számközben, elegendő még azt kimutatnunk, hogy a baloldal ugyanitt legalább *folytonos*.

Valóban, $x \in (0, 1)$ és egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ megadása után írjuk:

$$|K_{s_1, s_2}(x+h) - K_{s_1, s_2}(x)| \leq \int_0^1 |\mathfrak{Z}_{s_1}(t)|\,|\mathfrak{Z}_{s_2}(x+h-t) - \mathfrak{Z}_{s_2}(x-t)|\,dt =$$

$$= \int_0^\delta + \int_\delta^1 \quad (0 < \delta < 1),$$

s válasszuk itt h-t és δ-t úgy, hogy az $(x-\delta, x)$ és $(x+h-\delta, x+h)$ intervallum egyaránt az $\left(\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}\right)$ számközre essék. Mivel ekkor

$$\int_0^\delta \leq 2 \max_{\left(\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}\right)} |\mathfrak{Z}_{s_2}(u)| \cdot \int_0^\delta |\mathfrak{Z}_{s_1}(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

[18] Vö. pl. [18], 10 (Th. 4); 23 (Th. 29).

ha $\delta < \delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$ és — egy ily fix δ-t használva —

$$\int_\delta^1 \leqq \max_{(\delta,1)} |\mathfrak{Z}_{s_1}(t)|, \int_{x-1}^{x-0} |\mathfrak{Z}_{s_2}(u+h) - \mathfrak{Z}_{s_2}(u)| du < \frac{\varepsilon}{2},$$

amennyiben $|h|$ elegendő kicsi, adódik, hogy

$$|K_{s_1,s_2}(x+h) - K_{s_1,s_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

midőn $|h| \leqq \vartheta = \vartheta(\varepsilon)$. Qu. e. d.

Említésre érdemes, hogy 1. abban az esetben, mikor $s_1 - \bar{s}_2 = 2k+1$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, (3. 13)-ból a következő *ortogonalitási relációra* jutunk:

$$(3.16) \qquad (\mathfrak{Z}_{s_1}(u), \mathfrak{Z}_{s_2}(u)) = \int_0^1 \mathfrak{Z}_{s_1}(u) \mathfrak{Z}_{\bar{s}_2}(u) du = 0,$$

mely a BERNOULLI-polinomok analóg tulajdonságának általánosítása;[19] 2. mint nemrég kiderült, (3. 6) és (3. 14) alapján lényegileg egyértelműen *jellemezhető* $\mathfrak{Z}_s(u)$, tehát egyúttal a HURWITZ-féle zetafüggvény.[20]

4. Végül megmutatjuk, hogy a $\mathfrak{Z}_s(u)$-val rokon

$$(3.17) \qquad \mathfrak{P}_s(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2n\pi u}{(2n\pi)^s},$$

$$(3.18) \qquad \mathfrak{Q}_s(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin 2n\pi u}{(2n\pi)^s},$$

$$(3.19) \qquad \mathfrak{R}_s(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n\pi i u}}{(2n\pi)^s} = \frac{1}{2} [\mathfrak{P}_s(u) + i\mathfrak{Q}_s(u)]$$

függvények, melyek $0 < u < 1$ mellett közvetlenül csak a szóban forgó sorok (közös) konvergencia-félsíkjában, tehát $\sigma > 0$-ra vannak értelmezve — szintén *egész függvényei s-nek.*

Rögtön látható ui., hogy bármely $u \in (0, 1)$ esetén

$$(3.20) \qquad \mathfrak{P}_s(u) = \frac{1}{2} \sec \frac{\pi s}{2} [\mathfrak{Z}_s(u) + \mathfrak{Z}_s(-u)],$$

$$(3.21) \qquad \mathfrak{Q}_s(u) = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi s}{2} [\mathfrak{Z}_s(u) - \mathfrak{Z}_s(-u)]$$

19 Vö. [31], 158—163.

20 L. [34].

és $\sec\frac{\pi s}{2}$, $\operatorname{cosec}\frac{\pi s}{2}$ pólusai — azaz $s=2k+1$, ill. $s=2k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — a jobboldali szorzatoknak megszüntethető szinguláris helyei, mert (vö. (3.9)—(3.11))

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{Z}_{2k+1}(u)+\mathfrak{Z}_{2k+1}(-u)=-[B_{2k+1}(u)+B_{2k+1}(1-u)]\equiv 0, \\ &\mathfrak{Z}_{2k}(u)-\mathfrak{Z}_{2k}(-u)=-[B_{2k}(u)-B_{2k}(1-u)]\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (k=0,1,2,\ldots),$$

továbbá $\mathfrak{Z}_0(u)-\mathfrak{Z}_0(-u)$ és $\mathfrak{Z}_{-p}(u)\pm\mathfrak{Z}_{-p}(-u)$ ($p=1,2,\ldots$) ugyancsak azonosan eltűnik.

4. § W_s-integrálok és W_s-deriváltak

1. Tekintsük $f_{[s]}(x)$-et rögzített x-re, mint s függvényét; írjuk:

(4.1) $$W(s)=W(s;f,x)=f_{[s]}(x).$$

Az a tény, hogy a (2.9) alatti két közönséges DIRICHLET-sor összege:

(4.2) $$f(s,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s},$$

és

(4.3) $$\tilde{f}(s,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s},$$

tehát egyúttal (vö. (2.9), (2.12))

(4.4) $$W(s)=f(s,x)\cos\frac{\pi s}{2}+\tilde{f}(s,x)\sin\frac{\pi s}{2}=\int_0^1 f(x-t)[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]\,dt$$

is reguláris a $\sigma>1$ félsíkban, kézenfekvővé teszi, hogy $f_{[s]}(x)$ definícióját s-re vonatkozó analitikus folytatással kiterjesszük. Pontosabban:

(*) *Legyen megadva egy* $(0,1)$*-ben L-integrálható, 1 szerint periodikus* $f(u)$ *függvény, egy* $x\in(0,1)$ *hely és egy* $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ *komplex szám.*

Azt mondjuk, hogy $f(u)$ W_{s_0}*-limitálható az* $u=x$ *pontban, ha* 1. *a* $W_s=W(s;f,x)$ ($s>1$) *függvényelemnek van egyértékű analitikus folytatása egy oly (nyílt) tartományban, mely tartalmazza az* $s>1$ *félegyenest és* s_0*-nak az* $s=\sigma+i\tau_0$ ($\sigma>\sigma_0$) *félegyenesmenti valamely (jobboldali) környezetét,*[21] *továbbá,* 2. *a* $W(\sigma_0+0)+i\tau_0)$ *határérték létezik.*[22] (Röviden: ha $W(s,f,x)$ „s_0-ig jobbról analitikusan folytatható".)

[21] Azaz egy $s=\sigma+i\tau_0$ ($\sigma_0<\sigma\leqq\sigma_0+\varepsilon$) egyenesdarabot. — Ha a kérdéses tartomány egyszeresen összefüggő, akkor — tekintettel az ún. monodromia-tételre — az „egyértékű" jelző nyilván elhagyható.

[22] Hangsúlyozzuk, hogy itt és később csak *véges-értékű* limeszt vagy integrált nevezünk létezőnek.

Ez esetben a szóban forgó

$$f_{[s_0]}(x) = \lim_{\sigma \to \sigma_0 + 0} W(\sigma + i\tau_0) \tag{4.5}$$

számot $f(u)$ $u = x$*-hez tartozó* W_{s_0}*-limeszének, speciálisan* $\sigma_0 > 0$ *mellett* W_{s_0}*-integráljának,* $\sigma_0 \leqq 0$ *mellett* W_{s_0}*-deriváltjának nevezzük;* s_0 *a* (4. 5) *limesz „rendszáma".*

A fentiek alapján kimondhatjuk: *bármely, a definícióban tekintett* $f(u)$ *függvény* $(0, 1)$*-ben* W_s*-limitálható, ha* $\sigma > 1$, és W_s-limeszét (2. 9) vagy (2. 12) szolgáltatja; valamely rögzített x-re $f_{[s]}(x)$ eo ipso létezik a $\sigma \leqq 1$ félsík minden oly pontjában, ahol $W(s)$ (mint teljes analitikus függvény) *reguláris.* — Kiemelendő továbbá: a (4. 2)—(4. 3) sorok egyenletes konvergenciája miatt $f_{[s]}(x)$ x*-nek* $\sigma > 1$ *mellett folytonos, sőt* $\sigma > 2$ *mellett differenciálható* függvénye; az utóbbi esetben tagonkénti deriválással adódik a

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{[s]}(x) = f_{[s-1]}(x) \tag{4.6}$$

reláció (vö. (3. 6)).[23]

2. A legelemibb, $(0, 1)$-ben *minden* s*-re* W_s*-limitálható* (1 szerint periodikus) függvények: $f(u) \equiv -1, \cos 2\nu\pi u, \sin 2\nu\pi u, e^{2\nu\pi i u}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Abból ui., hogy a

$$(-1)_{[s]}(x) = \mathfrak{Z}_s(x), \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} (\cos 2\nu\pi u)_{[s]}(x) = (2\nu\pi)^{-s} \cos\left(2\nu\pi x - \dfrac{\pi s}{2}\right), \\ (\sin 2\nu\pi u)_{[s]}(x) = (2\nu\pi)^{-s} \sin\left(2\nu\pi x - \dfrac{\pi s}{2}\right), \end{cases} \tag{4.8}$$

$$(e^{2\nu\pi i u})_{[s]}(x) = (2\nu\pi i)^{-s} e^{2\nu\pi i x} \tag{4.9}$$

képletek érvényesek $\sigma > 1$ mellett (vö. (2. 7)—(2. 11)), s a jobboldalak mindegyike s-nek egész függvénye, következik (4. 7)—(4. 9) fennállása az egész s-síkon.

Legyen s_1 adott komplex szám, melyre $\Re(s_1) > 0$. Akkor $\mathfrak{Z}_{s_1}(u)$ — mint tudjuk — az $L(0, 1)$ osztályhoz tartozik és (2. 12), (3. 12), (3. 14), valamint analitikus folytatás alapján bármely komplex s és $x \in (0, 1)$ mellett

$$(\mathfrak{Z}_{s_1}(u))_{[s]}(x) = \mathfrak{Z}_{s_1+s_2}(x); \tag{4.10}$$

tehát $\mathfrak{Z}_{s_1}$ *tetszőleges* W_s*-limesze egy másik magfüggvény.* ((3. 9)-re tekintettel (4. 10) egyúttal (4. 7) kiterjesztéseként is felfogható.) — (3. 13) baloldala szin-

[23] Ez megfelel a törtrendű deriváltak (1. 3) definíciójának.

tén W_s-limeszként írható; s_2 helyett s-et téve ($x \in (0, 1)$, rögzített),

$$(4.11) \qquad (\mathfrak{Z}_{s_1}(x-u))_{[s]}(x) = (2\pi)^{-(s+s_1)} \cos \frac{\pi}{2}(s-s_1)\zeta(s+s_1).$$

Mivel a jobboldal egyetlen esetleges szinguláris helye: $s=1-s_1$, ahol is $\zeta(s+s_1)$-nek elsőrendű pólusa van 1 reziduummal, látjuk, hogy 1. $\mathfrak{Z}_{s_1}(x-u)$ az x helyen minden s-re, vagy bármely $(1-s_1)$-től különböző s-re W_s-limitálható aszerint, amint $s_1 = 1, 2, \ldots$, ill. s_1 nem-egész ($\Re(s_1) > 0$); 2. a (4.11) szolgáltatta W_s-limesz az előbbi esetben s-nek egész függvénye, az utóbbi esetben pedig $(\mathfrak{Z}_{s_1}(x-u))_{[s]}(x)$ egyedüli szinguláris helye az s-síkon az $s=1-s_1$ pont, mely *elsőrendű pólus* $(2\pi)^{-1}\sin \pi s_1$ *reziduummal.*[24]

Az összeg tagonkénti integrálhatóságának, ill. lineáris helyettesítésnek megfelelően:

$$(4.12) \qquad (\varrho_1 f_1(u) + \varrho_2 f_2(u))_{[s]}(x) = \varrho_1(f_1(u))_{[s]}(x) + \varrho_2(f_2(u))_{[s]}(x),$$

$$(4.13) \qquad (f(u+\xi))_{[s]}(x) = (f(u))_{[s]}(x+\xi) + \alpha_0(\mathfrak{Z}_s(x+\xi) - \mathfrak{Z}_s(x)),$$

ahol $\varrho_1, \varrho_2, \xi$ konstansok, $0 < x+\xi < 1$ és felteendő a jobboldali W_s-limeszek létezése.

3. Nyilvánvaló, hogy ha valamely speciális $f(u)$ függvény esetén s adott $x \in (0, 1)$ mellett a (4.2), (4.3) sorok egyaránt konvergensek az s-síknak egy $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ ($\sigma_0 < 1$) pontjában, akkor $f(s, x)$ és $\tilde{f}(s, x)$ reguláris $\sigma > \sigma_0$ mellett, úgyhogy (4.4) közvetlenül szolgáltatja $f_{[s]}(x)$ analitikus folytatását a $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq 1$ sávra.

Ez az észrevétel, összekapcsolva ama jól ismert ténnyel, hogy $f^{(p-1)}(u)$ (p fix természetes szám) létezése s *abszolút folytonossága* (speciálisan: $f^{(p)}$ létezése és *korlátos* volta) esetén $\alpha_n = o(n^{-p})$, $\beta_n = o(n^{-p})$,[25] egy egyszerű tételre vezet, melyből tetszőleges számú példa nyerhető bizonyos $\sigma = \sigma_0$ ($\sigma_0 < 1$) egyenestől jobbra[26] W_s-limitálható függvényre.

4. Előrebocsátunk egy rövidítő konvenciót: a *továbbiak során $f(u)$ mindig $L(0, 1)$ osztálybeli és 1 szerint periodikus függvényt jelent, x-et pedig a $(0, 1)$ (nyílt) intervallum egy helyének jelölésére tartjuk fenn* — kivéve, ha ezekkel ellentétes kikötéseket teszünk.

I. tétel. *Ha $f^{(p-1)}(u)$ ($p \geqq 1$) mindenütt létezik és abszolút folytonos, akkor $f(u)$ W_s-limitálható $\sigma > -(p-1)$ mellett bármely $u = x$ helyen, még-*

[24] Mint látjuk, (4.11) konkrét példát nyújt előírt (komplex) rendben *nem W_s-limitálható* függvényre.

[25] Vö. pl. [18], 26 (Th. 40.).

[26] Vagyis $\Re(s) > \sigma_0$ mellett.

pedig

$$(4.14)\quad f_{[s]}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^s}\left[\alpha_n\cos\left(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\right)+\beta_n\sin\left(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\right)\right]-$$

$$-\alpha_0\mathfrak{Z}_s(x);$$

e W_s-limesz x-nek $\sigma>1-p$ mellett folytonos, $\sigma>2-p$ mellett differenciálható függvénye, s az utóbbi esetben érvényben marad (4.6).

KOROLLÁRIUM. *Ha $f(u)$ $[0,1]$-ben akárhányszor differenciálható, akkor $f_{[s]}(x)$ minden (komplex) s-re és bármely x helyen létezik, s-nek egész, x-nek akárhányszor differenciálható függvénye, továbbá fennáll* (4.14) *és* (4.6).

Megjegyezzük, hogy $\sigma>1$ esetén (4.14) jobboldala általában nyilván nem pótolható a (4.4) integrállal (vö. (3.8)). Viszont, mivel $\sigma>1$ mellett p-szeri parciális integrálással

$$\int_0^1 f(x-t)\mathfrak{Z}_s(t)\,dt=\int_0^1 f^{(p)}(x-t)\mathfrak{Z}_{s+p}(t)\,dt,$$

(a kiintegrált részek az I. tétel premisszája folytán eltűnnek), s az utolsó integrál (vö. (4.4)) s-nek a $\sigma>1-p$ félsíkban reguláris függvénye, tehát a (*) definíció alapján:

$$(4.15)\qquad f_{[s]}(x)=\int_0^1 f^{(p)}(x-t)\mathfrak{Z}_{s+p}(t)\,dt-\mathfrak{Z}_s(x)\int_0^1 f(t)\,dt\qquad(\sigma>1-p).$$

Ebből az előállításból (mely különben $p=0$ esetén is érvényes) könnyen kiolvasható, hogy ha $f^{(p)}(u)$ $(p\geqq 1)$ mindenütt létezik és folytonos, akkor $f_{[s]}(x)$ x-nek $(0,1)$-ben nemcsak $\sigma>2-p$, hanem már $\sigma>1-p$ mellett is *differenciálható* függvénye.

5. § Cesàro- és Abel-szummáció alkalmazása; kapcsolat a De la Vallée—Poussin-féle általánosított deriváltakkal

1. Ha $s\neq 1$ a $\sigma\leqq 1$ félsík egy pontja és $f(u)$-ra vonatkozólag nem élünk alkalmas speciális kikötéssel (mint amilyen az 1. tétel elég erős „globális" premisszája), akkor a (4.2), (4.3) sorok konvergenciája nyilván nincs biztosítva; felvetődik a kérdés, nem lehet-e a W_s-limesz (4.14) előállítását ily esetben is valamilyen értelemben „megmenteni"? — Minthogy (4.2), (4.3) egyidejűleg trigonometrikus és DIRICHLET-sorok, elég kézenfekvő a legfontosabb összegező eljárások felhasználására gondolnunk; e fejezet célja éppen annak megmutatása, milyen eredményre vezet a szóban forgó problémánál a CESÀRO- vagy ABEL-szummáció.

Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy — H. BOHR, G. H. HARDY és RIESZ MARCELL idevágó alapvető vizsgálatai[27] szerint — egy (véges konvergencia-abszcisszájú) $\sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s}$ közönséges DIRICHLET-sor szummabilitási tartománya akár egy (C, λ)-módszer (λ adott pozitív szám), akár az (A)-módszer esetében egy félsík vagy a teljes sík. Az ún. (C, λ)-szummációs abszcissza λ-nak nem-növekvő függvénye és bármely λ-ra legalább akkora, mint ugyanazon sor (A)-szummációs abszcisszája; fontos tény, hogy az említett módszerekkel kapott szumma az s-sík megfelelő szummabilitási tartományának belsejében mindig *holomorf.*

2. Az alábbiakban a (4. 2) sor (C, λ)-szummációs abszcisszáját $\sigma_{(\lambda)}$-val, (A)-szummációs abszcisszáját pedig $\sigma_{(A)}$-val fogjuk jelölni; a (4. 3) sorhoz tartozó megfelelő abszcisszák jele legyen: $\tilde{\sigma}_{(\lambda)}$, ill. $\tilde{\sigma}_{(A)}$. Valamennyi természetesen függ x-től: $\sigma_{(\lambda)} = \sigma_{(\lambda)}(x)$ stb. — Minden szummát megjelölünk a Σ-jel előtt, felül a módszer jelével, pl. egy ABEL-szummát így: ${}^{(A)}\Sigma$. Minthogy — mint ismeretes — valamely $\sum_{m=0}^{\infty} h_m$ sor (C, λ)-, ill. (A)-szummájának értelmezése:

$$(5.1)\qquad {}^{(C,\lambda)}\sum_{m=0}^{\infty} h_m = \lim_{m\to\infty} \binom{m+\lambda}{m}^{-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+\lambda-k}{m-k} h_k,$$

$$(5.2)\qquad {}^{(A)}\sum_{m=0}^{\infty} h_m = \lim_{r\to 1-0} \sum_{m=0}^{\infty} r^m h_m,$$

a (2. 13) magfüggvénynek (C, λ)-szummációnál

$$(5.3)\qquad \mathfrak{T}^{\lambda}_{s;m}(u) = \binom{m+\lambda}{m}^{-1} \sum_{n=1}^{m+1} \frac{2}{(2n\pi)^s} \binom{m+\lambda+1-n}{m+1-n} \cos\left(2n\pi u - \frac{\pi s}{2}\right)$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots),$$

ABEL-féle összegezésnél pedig

$$(5.4)\qquad \mathfrak{Z}_s(u, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2r^n}{(2n\pi)^s} \cos\left(2n\pi u - \frac{\pi s}{2}\right) \qquad (0 \leq r < 1)$$

felel meg.

Az utolsó sor bármely rögzített s és $r \in (0, 1)$ esetén a $0 \leq u \leq 1$ intervallumban egyenletesen konvergens, s összege u-nak mindenütt folytonos (nem-egész u-ra differenciálható), továbbá s-nek egész függvénye. Említésre érdemes, hogy $\mathfrak{Z}_s(u, r)$ kifejezhető zárt alakban $\mathfrak{Z}_s(u)$ segítségével, ha komp-

[27] Vö. [2], [13], [17].

lex u-értékeket is megengedünk: írhatjuk ui. (vö. (3. 19))

$$\mathfrak{Z}_s(u,r)=e^{-\frac{i\pi s}{2}}\mathfrak{K}_s\left(u-\frac{i\log r}{2\pi}\right)+e^{\frac{i\pi s}{2}}\mathfrak{K}_s\left(-u-\frac{i\log r}{2\pi}\right) \tag{5. 5}$$

és itt

$$\mathfrak{K}_s(w)=\frac{1}{2i\sin\pi s}\left[e^{\frac{i\pi s}{2}}\mathfrak{Z}_s(-w)-e^{-\frac{i\pi s}{2}}\mathfrak{Z}_s(w)\right]. \tag{5. 6}$$

Szükségünk lesz még a DE LA VALLÉE-POUSSIN által mintegy ötven éve bevezetett s a modern analízisben azóta is fontos szerepet játszó ún. *általánosított szimmetrikus deriváltak* fogalmára, melyeknek szokásos jelölése: $f_{(p)}(x)$ $(p=0,1,\ldots)$; meghatározásuk legegyszerűbben rekurzív módon, az

$$\begin{cases} f_{(p)}(x)=p!\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-\varphi_{p-1}(\Delta x)+(-1)^p[f(x-\Delta x)-\varphi_{p-1}(-\Delta x)]}{2(\Delta x)^p}, \\ \varphi_{-1}(u)=0,\quad \varphi_{p-1}(u)=\sum\limits_{\nu=0}^{p-1}f_{(\nu)}(x)\dfrac{u_\nu}{\nu!} \qquad (p\geqq 1) \end{cases} \tag{5. 7}$$

képlet alapján történhetik külön páros s külön páratlan indexekre.[28]

3. Egyszerűen nyerhető mármost a következő

II. tétel. *Legyen* x *adott és írjuk:* $\chi_\lambda=\max(\sigma_{(\lambda)},\tilde\sigma_{(\lambda)})$, $\chi_A=\max(\sigma_{(A)},\tilde\sigma_{(A)})$.[29]

1. $f(u)$ *W_s-limitálható* $\sigma>\chi_\lambda$ *vagy* $\sigma>\chi_A$ *mellett az* $u=x$ *helyen és W_s-limesze:*

$$\begin{cases} f_{[s]}(x)=\cos\dfrac{\pi s}{2}\cdot{}^{(c,\lambda)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}+\sin\dfrac{\pi s}{2}\cdot{}^{(c,\lambda)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s}= \\ =\lim\limits_{m\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(x-t)[\mathfrak{T}^\lambda_{s,m}(t)-\mathfrak{T}^\lambda_{s,m}(x)]\,dt \qquad (\sigma>\chi_\lambda), \end{cases} \tag{5. 8}$$

illetve

$$\begin{cases} f_{[s]}(x)=\cos\dfrac{\pi s}{2}\cdot{}^{(A)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}+\sin\dfrac{\pi s}{2}\cdot{}^{(A)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s}= \\ =\lim\limits_{r\to 1-0}\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t,r)-\mathfrak{Z}_s(x,r)]\,dt \qquad (\sigma>\chi_A); \end{cases} \tag{5. 9}$$

[28] Vö. pl. [58], 257.

[29] Eszerint mindig $\chi_A\leqq\chi_\lambda\leqq 1$, a $\chi_A=-\infty$ vagy $\chi_\lambda=-\infty$ eseteket is ideértve. — Példa: ha $f(u)=\mathfrak{P}_\xi(u)+\mathfrak{Q}_\eta(u)$, ahol ξ és η tetszőleges pozitív paraméterek (vö. (3. 17) — (3. 18)) és $x=\frac{1}{2}$, akkor $\sigma_{(\lambda)}=-\lambda-\xi$, $\sigma_{(A)}=-\infty$, továbbá $\tilde\sigma_{(\lambda)}=-\lambda-\eta$, $\tilde\sigma_{(A)}=-\infty$, úgyhogy $\chi_\lambda=-\lambda-\min(\xi,\eta)$, $\chi_A=-\infty$.

ha χ_λ véges, (5. 8) *érvényes a* $\sigma=\chi_\lambda$ *egyenes minden olyan pontjában is, ahol mindkét jobboldali* (C, λ)*-szumma létezik.*

2. *Speciálisan,* $\chi_A<0$ *esetén* $f_{[-p]}(x)$ $(p=0,1,\ldots; 0\leqq p<-\chi_A)$ *nem más, mint* $f(u)$ $(0, 1)$*-hez tartozó Fourier-sora tagonként képezett p-edik derivált-sorának* $u=x$ *pontban vett* (A)*-szummája, továbbá*

$$f_{[-p]}(x)=f_{(p)}(x) \tag{5. 10}$$

feltéve, hogy az utóbbi általánosított differenciálhányados létezik.

BIZONYITÁS. 1. Ha az (5. 1), (5. 2) szumma-definíciókat a

$$\cos\frac{\pi s}{2}\sum 2a_n(x)(2_n\pi)^{-s}+\sin\frac{\pi s}{2}\sum 2b_n(x)(2n\pi)^{-s}$$

sor-összegre alkalmazzuk, formálisan azonnal megkapjuk az (5. 8), (5. 9) képletekben foglalt integrál-limeszeket; az utóbbi esetben az összegezés és az integrálás sorrendje nyilván felcserélhető, hacsak a szóban forgó (A)-szummák léteznek.

Mármost vegyük észre, hogy 1. mind a $\sum 2a_n(x)2n\pi)^{-s}$, mind a $\sum 2b_n(x)(2n\pi)^{-s}$ sor (C, λ)-, ill. (A)-szummálható a megfelelő egy-egy szummabilitási tartomány közös részében; 2. a nyert szummák holomorfak $\sigma>\chi_\lambda$, ill. $\sigma>\chi_A$ mellett, tehát egyúttal $f(s, x)$ és $\tilde{f}(s, x)$ analitikus folytatásai. Így (5. 4)-re tekintettel valóban az (5. 8), (5. 9) előállításokra jutunk.

Ha még ${}^{(C,\lambda)}\sum 2a_n(x)(2n\pi)^{-s}$ és ${}^{(C,\lambda)}\sum 2b_n(x)(2n\pi)^{-s}$ egyidejűleg létezik a $\sigma=\chi_\lambda$ egyenes valamely $s_0=\sigma_0+i\tau_0$, pontjában, akkor a DIRICHLET-sorok elméletének egy ABEL-típusú tétele alapján[30]:

$$\sum\nolimits_1={}^{(C,\lambda)}\sum_{n=1}^{\infty}2a_n(x)(2n\pi)^{-s_0}=\lim_{\sigma\to\sigma_0+0}f(\sigma+i\tau_0, x),$$

$$\sum\nolimits_2={}^{(C,\lambda)}\sum_{n=1}^{\infty}2b_n(x)(2n\pi)^{-s_0}=\lim_{\sigma\to\sigma_0+0}\tilde{f}(\sigma+i\tau_0, x),$$

ahonnan

$$f_{[s_0]}(x)=\lim_{\sigma\to\sigma_0+0}W(\sigma+i\tau_0)=\cos\frac{\pi s_0}{2}\cdot\sum\nolimits_1+\sin\frac{\pi s_0}{2}\cdot\sum\nolimits_2.$$

2. (5. 9) szerint a $\sigma>\chi_A$ félsíkban (vö. (2. 7), (2. 9), (2. 13))

$$\left\{\begin{aligned}f_{[s]}(x)={}^{(A)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^s}\Big[\alpha_n\cos\Big(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\Big)+\\+\beta_n\sin\Big(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\Big)\Big]-\alpha_0\mathfrak{Z}_s(x);\end{aligned}\right. \tag{5. 11}$$

[30] Vö. [17], 44.

legyen itt $s=-p$, ahol p nem-negatív egész szám, akkor $\chi_A > -p$ mellett (vö. (3.9), (3.10))

$$(5.12) \quad f_{[-p]}(x) = \begin{cases} \alpha_0 + {}^{(A)}\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2(\alpha_n \cos 2n\pi x + \beta_n \sin 2n\pi x), & \text{ha } p=0, \\ {}^{(A)}\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2(2n\pi)^p \left[\alpha_n \cos\left(2n\pi x + \frac{p\pi}{2}\right) + \beta_n \sin\left(2n\pi x + \frac{p\pi}{2}\right)\right], & \\ & \text{ha } p=1,2,\dots . \end{cases}$$

Végül az, hogy $f_{[-p]}(x)$ szükségképpen megegyezik $f_{(p)}(x)$-szel — amennyiben az utóbbi létezik —, az (5.12) előállításnak és egy (differenciált FOURIER-sorokra vonatkozó) GRONWALL—ZYGMUND-féle tételnek a folyománya.[31]

Qu. e. d.

4. Kiemeljük, hogy a most igazolt tétel alapján $f_{[s]}(x)$ $s=0,-1,-2,\dots$ esetén rendre $f_{(0)}(x), f_{(1)}(x), f_{(2)}(x),\dots$ (tehát egyúttal a megfelelő közönséges deriváltak) *általánosításának* tekinthető. Ami az így bevezetett $f_{[-p]}(x)$ *W_{-p}-deriváltak* ($p=0,1,\dots$) jellemzését illeti, erre nézve a következőket jegyezzük meg:

1. ha $\chi_\lambda \leqq 0, p \leqq -\chi_\lambda$, akkor PLESSNER egy tétele[32] biztosítja oly $q > \lambda + 1$ egész szám létezését, hogy $f_{[-p]}(x) = F_{(q)}(x)$, ahol $F(u)$ $f(u)$-nak egy elegendő magas-rendű integrálfüggvénye;

2. BOSANQUET legújabb keletű vizsgálatai és OBRESKOVnak bizonyos (vele csaknem egyidejűleg elért) eredményei nyomán ma már szükséges és elegendő feltételeket is ismerünk arra vonatkozólag, hogy egy FOURIER-sor p-edik derivált sora ($p \geqq 1$) valamilyen rendben CESÀRO-szummábilis legyen.[33]

Idetartozik még annak megemlítése, hogy — mint azt nemrégiben MARCINKIEWICZnek és ZYGMUNDnak sikerült megmutatnia[34] — ha egy trigonometrikus sor valamely E pozitív mértékű halmazon (A)- vagy (C,λ)-szummábilis, akkor, bizonyos esetekben (korlátossági megszorításokkal), következtethetünk „erősebb" tulajdonságra, ti. a sor (C,λ)-, ill. $(C,\lambda+\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$)-szummabilitására E-ben majdnem mindenütt.

5. A χ_λ ($\lambda > 0$) konstansokra adott esetben explicit formulák adhatók meg, minthogy — mint ismeretes — bármely $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s}$ közönséges DIRICHLET-

[31] L. [58], 257—259.

[32] Vö. pl. [58], 260—261.

[33] BOSANQUET [3], [4] munkáiban oly kritériumot ad meg, mely a derivált-sor (C)-szummabilitásának kérdését egy FOURIER-sorra vonatkozó megfelelő problémára vezeti vissza; ehhez a LEBESGUE-féle integrálfogalom alkalmas kiterjesztésére van szüksége („$C_\lambda L$-integrálok"). OBRESKOV [42] dolgozatában HARDY és LITTLEWOOD egy tételét általánosítja, felhasználva a CESÀRO-közepek integrál-analogonjait. — Az (A)-szummabilitással kapcsolatos megfelelő problémát illetően a [40] cikkre utalunk: vö. még [57].

[34] L. [28], Th. I, II.

sor $\sigma^{(\lambda)}$ (C, λ)-szummációs abszcisszája kifejezhető kizárólag a sor együtthatói segítségével, nevezetesen:

$$\sigma^{(\lambda)} = \overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \frac{\log \left| \sum_{n<\varrho} (\varrho - n)^{\lambda} d_n \right|}{\log \varrho} - \lambda, \tag{5. 13}$$

ha $\sigma^{(\lambda)} > 0$ és

$$\sigma^{(\lambda)} = \overline{\lim_{\mu \to \infty}} \mu^{-1} \log \left| \sum_{\log n < \mu} d_n e^{(\log n)^2 - \mu^2} (\mu - \log n)^{\lambda} \right|, \tag{5. 14}$$

az abszcissza bármely helyzetében.[35]

Hasznos lehet egy egyszerű becslés is: *ha $f_{(p)}(x)$ és $f_{(p-1)}(x)$ $(p \geqq 1)$ egyidejűleg létezik, akkor*

$$\chi_\lambda \leqq -(p-1) \qquad (\lambda > p); \tag{5. 15}$$

ez közvetlenül adódik a fenti bizonyítás végén felhasznált GRONWALL—ZYGMUND-féle tételből.

Ha pedig figyelembe vesszük a DIRICHLET-sorok szummáció-elméletének legalapvetőbb tényeit, akkor azt kapjuk, hogy

$$\max(\omega, \tilde{\omega}) \leqq \chi_A \leqq \lim_{\lambda \to \infty} \chi_\lambda, \tag{5. 16}$$

ahol ω és $\tilde{\omega}$ a (4. 2), ill. (4. 3) sor ún. *regularitási abszcisszáját* jelöli, vagyis azon σ^* abszcisszák alsó határát, melyekre $f(s, x)$, ill. $\tilde{f}(s, x)$ a $\sigma > \sigma^*$ félsíkban reguláris.

6. § Analitikus folytatás az s-síkon az integrál-előállítás segítségével. $f_{[s]}(x)$ létezésének szükséges és elegendő feltétele; lokalizáció-tétel

1. $f_{[s]}(x)$ értelmezésének kiterjesztése a sor-előállítás alapján — mint láttuk — fontos kapcsolatokra rávilágít ugyan, de a W_s-limeszek számára ily módon nyert kifejezések mélyebb diszkusszióra nem a legalkalmasabbak. — Ezért most a (4. 4) alatti másik előállítás felhasználásával foglalkozunk.

Az $\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{z}_s(t) - \mathfrak{z}_s(x)]\,dt$ integrál, melyről tudjuk, hogy bármely adott x mellett az s-sík $\sigma > 1$ félsíkjában létezik, szemlátomást „véges-értékű” marad $\sigma = 1$ esetén is (vö. 1. lemma), az $s = 0, -1, \ldots$ pontokban pedig (az integrandusz m. m. való eltűnése folytán, vö. (3. 9)—(3. 10)) triviálisan 0.

[35] Vö. [17], 45, ill. [23], 195.

Hogy viszont (x előírása után) a szóban forgó integrál, vagy — ami ugyanazt jelenti — $\int_0^1 f(x-t)\mathfrak{Z}_s(t)\,dt$ nem létezhetik *minden* L-integrálható $f(u)$ függvényre, midőn $\sigma<1, s\neq 0, -1, \ldots$, az rögtön kitűnik (3.8) figyelembevételekor; eszerint ui. a jelzett esetben $|\mathfrak{Z}_s(u)|$ $u\to+0$ mellett „végtelenné válik", mégpedig úgy, mint $u^{\sigma-1}$.

2. A továbbiakban főleg a következő segédtételre támaszkodunk:

3. LEMMA. *Legyen* $0\leqq a<b<\infty$ *és* $g(u)$ *jelentsen egy* (a, b)*-ben m. m. értelmezett (valós- vagy komplex-értékü) függvényt.*

1. *Ha* $a>0$ *és* $g(u)\in L(a, b)$, *akkor a*

$$J(s)=\int_a^b g(u)u^s du \tag{6.1}$$

integrál minden s-re létezik, s-nek analitikus függvénye és deriváltjai az integráljel alatti formális differenciálással képezhetők, azaz

$$J^{(\nu)}(s)\leqq\int_a^b g(u)u^s\log^\nu u\,du \qquad (\nu=1, 2, \ldots). \tag{6.2}$$

2. *Ha* $a=0$ *és megadható egy* $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ *konstans úgy, hogy* $(^*)g(u)u^{s_0}\in L(a, b)$, *akkor a* (6.1) *függvény létezik, reguláris és a* (6.2) *differenciálási szabály érvényes legalábbis a* $\sigma>\sigma_0$ *félsíkban.*

BIZONYÍTÁS. 1. Tegyük fel, hogy $a>0$; legyen s egy tetszőleges (fix) pont és $s+h$ egy másik pont s környezetében. Közvetlenül látható, hogy $g(u)u^s, g(u)u^{s+h}$ és $g(u)u^s\log u$ minden s-re az $L(a, b)$ osztályhoz tartozik. Írjuk, hogy

$$\tag{6.3}\left\{\begin{aligned} \varDelta&=\frac{J(s+h)-J(s)}{h}-\int_a^b g(u)u^s\log u\,du=\int_a^b g(u)u^s\left(\frac{u^h-1}{h}-\log u\right)du=\\ &=h\int_a^b g(u)u^s\left[\frac{1}{2!}(\log u)^2+\frac{1}{3!}(\log u)^3h+\cdots\right]du.\end{aligned}\right.$$

Rövidség kedvéért bevezetve az $M=\max(|\log a|, |\log b|)$ jelölést, $|h|<3/M$ mellett fennáll a

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{|\log u|^\nu}{\nu!}|h|^{\nu-2}\leqq\frac{M^2}{2}\left(1+\frac{M}{3}|h|+\frac{M^2}{3^2}|h|^2+\cdots\right)=\frac{3M^2}{6-M|h|}$$

becslés; ebből

$$|\Delta| \leqq \frac{3M^2|h|}{6-M|h|}\int_a^b |g(u)|u^\sigma du < \varepsilon,$$

hacsak $|h| < \delta = \delta(\varepsilon)\,(< 3/M)$.

De ez éppen azt jelenti, hogy $J'(s)$ létezik és

$$J'(s) = \int_a^b g(u)u^s \log u\, du; \tag{6.4}$$

(6.2)-re egyszerűen úgy jutunk, hogy eredményünket $J'(s)$-re, $J''(s)$-re, és í. t. alkalmazzuk.

2. Ha $a=0$ és (*) teljesül, akkor nyilván elegendő a $b<1$ esetre szorítkoznunk; s-et és $(s+h)$-t a $\sigma > \sigma_0$ félsíkból választva, a (6.3) integrálok létezése a (*) feltételből következik. — Most célszerű (6.3)-at a következő alakban tekintenünk:

$$\Delta = h\int_0^b g(u)\,u^{s-\eta}\left[\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{h^{\nu-2}}{\nu!}u^\eta(\log u)^\nu\right]du, \tag{6.5}$$

ahol $0 < \eta < \sigma-\sigma_0$.

A nem-negatív

$$\varrho_\nu(u) = \begin{cases} u^\eta\,|\log u|^\nu & (u>0),\\ 0 & (u=0)\end{cases}$$

függvény folytonos a $0 \leqq u \leqq b$ intervallumban, s — mint könnyen belátható —

$$\max_{0\leqq u\leqq b}\varrho_\nu(u) = \eta^{-\nu}\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu.$$

Felhasználva még a STIRLING-formulát, arra jutunk, hogy

$$\frac{|h|^{\nu-2}}{\nu!}u^\eta|\log u|^\nu \leqq \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{|h|}{\eta}\right)^{\nu-2}\cdot\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu < K\eta^{-2}\left(\frac{|h|}{\eta}\right)^{\nu-2}$$
$$(0\leqq u\leqq b;\ \nu=2,3,\ldots),$$

ahol $K>0$ egy h-tól független konstanst jelöl.

Így $|h| < \eta$ mellett a (6.5)-beli sor összege abszolút értékben nem lehet nagyobb, mint $K/(\eta^2-|h|\eta)$ és

$$|\Delta| \leqq \frac{K|h|}{\eta^2-|h|\eta}\int_0^b |g(u)|\,u^{\sigma-\eta}du;$$

mivel az utolsó korlát $h\to 0$ esetén 0-hoz tart, innen (6.4) érvényessége $a=0$-val következik.

A bizonyítás ismét indukcióval fejezhető be, mint fent.

3. Segédtételünket mindenekelőtt egy tetszőleges

$$\int_0^\delta f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)\,dt \tag{6.6}$$

típusú integrál vizsgálatára alkalmazzuk, ahol $0<\delta\leqq 1$ és

$$\mathfrak{z}_s(t)=\mathfrak{Z}_s(t)-\Gamma(s)^{-1}t^{s-1}=\Gamma(s)^{-1}\zeta(1-s,t+1)\qquad (0<t<1). \tag{6.7}$$

III. tétel. *Bármely rögzített x-re,* (6. 6) *az egész s-síkon létezik és s-nek egész függvénye.*

BIZONYÍTÁS. Az egzisztenciára vonatkozó állítás az 1. lemmából azonnal folyik.

Ha $\sigma>1$, akkor az

$$\int_0^\delta f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)\,dt=\int_0^\delta f(x-t)\mathfrak{Z}_s(t)\,dt-\Gamma(s)^{-1}\int_0^\delta f(x-t)t^{s-1}\,dt \tag{6.8}$$

felbontás jobboldali első tagja mint egy konvergens DIRICHLET-sor összege (vö. (2. 12), (3. 1)), második tagja pedig a 3. lemma 2. fele miatt reguláris a szóban forgó félsíkban; ugyanezt mondhatjuk tehát a baloldali integrálról is.

Az alábbiakban feltesszük, hogy $\sigma<2$.

E félsíkban érvényes $\mathfrak{z}_s(t)$ következő sor-előállítása:[36]

$$\begin{cases} \mathfrak{z}_s(t)=\frac{1}{2}\Gamma(s)^{-1}(t+1)^{s-1}-\Gamma(s+1)^{-1}(t+1)^{-s}+\\ \quad+\frac{1}{2}\Gamma(s)^{-1}(1-s)(2-s)\sum\limits_{m=1}^{\infty}\int\limits_m^{m+1}\{v\}(1-\{v\})(v+t)^{s-3}\,dv, \end{cases} \tag{6.9}$$

ahol $\{v\}=v-[v]$ törtrészt jelent. Ennélfogva

$$\begin{cases} \int\limits_0^\delta f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)\,dt=\frac{1}{2}\Gamma(s)^{-1}\int\limits_0^\delta f(x-t)(t+1)^{s-1}\,dt-\\ \qquad -\Gamma(s+1)^{-1}\int\limits_0^\delta f(x-t)(t+1)^{s}\,dt+\\ +\frac{1}{2}\Gamma(s)^{-1}(1-s)(2-s)\sum\limits_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^\delta f(x-t)\left(\int\limits_0^1 u(1-u)(u+m+t)^{s-3}\,du\right)dt; \end{cases} \tag{6.10}$$

[36] (6. 9) egy $\zeta(s,u)$-ra vonatkozó ($\sigma>-1$ mellett érvényes) integrálképlet folyománya. — Vö. [31], 146, (2. 4).

a tagonkénti integrálás megengedett, mert

$$(6.11)\qquad \left|\int_0^1 u(1-u)(u+m+t)^{s-3}du\right| \leq m^{\sigma-3} \qquad (0\leq t\leq 1;\ m=1,2,\ldots).$$

(6.10) jobboldalának első és második tagja a 3. lemma 1. felére tekintettel egész függvénye s-nek. Ami az utolsó tagot illeti, megemlítjük azt, hogy egyrészt az ebben előforduló sor bármely $\sigma\leq 2-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ félsíkban egyenletesen konvergens (6.11) folytán; másrészt, hogy ha a kérdéses sor m-edik tagját $\sum_\nu c_{m,\nu}(s-3)^\nu$ típusú hatványsorba fejtjük, az utóbbi minden s-re konvergens és mindenütt analitikus függvényt állít elő.

Mint látjuk, (6.6) a (6.10) felbontás alapján reguláris, ha $\sigma>2$, (6.8) szerint pedig, ha $\sigma>1$; végeredményben tehát az egész s-síkon holomorf. Qu. e. d.

4. Könnyű most már teljesen tisztázni a (4.4) integrál viselkedését, ha $\sigma<1$ és egyúttal *szükséges és elegendő kritériumot* adni egy W_s-limesz létezésére.

IV. tétel. *Jelentsen δ egy tetszőleges 1-nél nem nagyobb pozitív számot.*

1. *Ahhoz, hogy a*

$$(6.12)\qquad \mathfrak{W}(s;f,x)=\int_0^1 f(x-t)[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]dt$$

integrál rögzített x és $s\neq 0,-1,-2,\ldots;\ \sigma<1$ mellett létezzék, szükséges és elegendő

$$(6.13)\qquad \mathfrak{w}(s;f,x,\delta)=\int_0^\delta f(x-t)t^{s-1}dt$$

létezése;[37] *ha x adott és $s_0\neq 0,-1,\ldots$ a $\sigma<1$ félsík egy pontja, akkor (6.12) létezéséből $s=s_0$-ra, következik az integrál létezése és regularitása a $\sigma>\Re(s_0)$ félsíkban.*

2. *Legyen $s_0\neq 1$ a $\sigma\leq 1$ félsík egy pontja. $f(u)$ egy $u=x$ helyen, akkor és csak akkor W_{s_0}-limitálható, ha $V(s;f,x,\delta)=\sin\pi s\cdot\mathfrak{w}(s;f,x,\delta)$ s_0-ig (*) jobbról analitikusan folytatható.*[38]

Bármely adott x-re $W(s)=f_{[s]}(x)$, és $V(s)=V(s;f,x,\delta)$ (mint teljes analitikus függvény) holomorfia-tartománya azonos.

[37] Félreértések elkerülése végett $\mathfrak{W}$-t és $\mathfrak{w}$-t kizárólag a szóban forgó integrálok jelölésére használjuk, a megfelelő analitikus folytatások jelölésére már *nem*.

[38] Vö. 4. § 1.

BIZONYÍTÁS. 1. Ha $\sigma > 1$, írhatjuk (vö. (6. 8)), hogy

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{W}(s; f, x) - \Gamma(s)^{-1}\mathfrak{w}(s; f, x, \delta) = \\ &= \int_0^1 f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)\,dt - \mathfrak{z}_s(x)\int_0^1 f(t)\,dt + \Gamma(s)^{-1}\int_\delta^1 f(x-t)t^{s-1}\,dt \end{aligned}\right. \tag{6.14}$$

$$(0 < \delta \leqq 1);$$

a jobboldalon az első és a harmadik integrál a fenti III. tétel, ill. a 3. lemma 1. fele alapján minden s-re létezik, s mindhárom tag s-nek *egész* függvénye. Eszerint, ha $s \neq 0, -1, \ldots$ akkor a (6. 12)—(6. 13) integrálok egyidejűleg léteznek, ill. divergensek; továbbá, ha az első (s egyúttal a második) integrál létezik egy x-re a $\varrho < 1$ félsík valamely $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0 (\neq 0, -1, \ldots)$ pontjában, akkor — felhasználva a 3. lemma 2. felét — következik (6. 12) létezése és holomorfiája $\sigma > \sigma_0$ mellett.

(6. 14) második tagját a (3. 5) függvényegyenlet segítségével a $\pi^{-1}\Gamma(1-s)\cdot$ $\cdot \sin \pi s \mathfrak{w}(s; f, x, \delta)$ alakba írva, látjuk, hogy e tag egy $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0 \neq 1$ $(\sigma_0 \leqq 1)$ pontban a ($\ast$) tulajdonság szempontjából ugyanúgy viselkedik, mint $\sin \pi s \cdot \mathfrak{w}(s; f, x, \delta)$. Így tételünk 2. része szintén kiolvasható (6. 14)-ből, ha emlékeztetünk $f_{[s]}(x)$ 4. §-beli definíciójára.

Minthogy $\mathfrak{w}(s; f, x, \delta)$-ban az integrációs intervallum hossza tetszés szerinti kicsinynek választható, nevezetes *korolláriumként* adódik a következő

LOKALIZÁCIÓ-TÉTEL. *Bármely $f_{[s]}(x)$ W_s-limesz létezését vagy nem-létezését $f(u)$-nak az $u = x$ hely egy tetszőlegesen kicsi baloldali környezetében felvett értékei már meghatározzák.*

Kiemeljük, hogy eltekintve az $s = 0, -1, \ldots$ kivételes rendszámoktól, $f_{[s]}(x)$ *értékét* illetően más a helyzet: ez — mint tudjuk — $f(u)$ teljes $[0, 1]$-beli értékkészletétől függ.[39]

5. A 3. lemma és a III. tétel újabb alkalmazásaként még az I. tétel egy (több szempontból kiterjesztett) megfelelőjét tárgyaljuk, mely mintegy illusztrációja

[39] Az $f_{[-p]}(x)$ $(p = 0, 1, \ldots)$ W_s-deriváltak „lokális" jellege könnyen belátható pl. a

$$\mathfrak{W}(s; f, x) = \int_0^\vartheta G(x,t)\,dt + \int_\vartheta^1 G(x,t)\,dt \quad \{G(x,t) = f(x-t)[\mathfrak{z}_s(t) - \mathfrak{z}_s(x)],\ 0 < \vartheta < 1\}$$ fel-

bontás alapján; a második részintegrál ui. s-nek egész függvénye és $s \to -p$ mellett 0-hoz tart (vö. (3. 9)—(3. 10); 3. lemma 1. és III. tétel). — Az analógia a közönséges FOURIER-sorok *Riemann-féle lokalizáció-tételével* szembetűnő. Míg azonban a $\mathfrak{z}_s(u)$ $(\sigma > 1; s \neq 0, -1, \ldots)$ magfüggvénynek $[0, 1]$-ben csak egy „végtelenségi" helye van, ti. $u = 0$ (vö. (3. 8)), addig $(\sin t/2)^{-1}$ $0 \leqq t \leqq 2\pi$ mindkét végpontjában „szingularitást" mutat; ezért függ a DIRICHLET-integrál, tehát a FOURIER-sor konvergencia-viselkedése a kérdéses hely *mindkét* oldalához tartozó függvényértékektől.

az imént kimondott lokalizáció-elvnek is. — Rövidség kedvéért vezessük be az

$$(6,15)\qquad I_s(f,x,\delta)=\int_0^1 f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)dt-\mathfrak{Z}_s(x)\int_0^1 f(t)dt+\Gamma(s)^{-1}\int_\delta^1 f(x-t)t^{s-1}dt$$

jelölést (vö. (6. 14)).

V. tétel. *Legyen* $0<\delta\leqq 1$.

1. *Tegyük fel, hogy valamely x-re* $f(x-t)t^{\sigma_0-1}\in L(0,\delta)$ $(\sigma_0<1)$. *Akkor* $f(u)$ W_s*-limitálható a szóban forgó* $u=x$ *helyen* $\sigma>\sigma_0$ *mellett és érvényben marad az*

$$(6.16)\qquad f_{[s]}(x)=\int_0^1 f(x-t)[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]dt$$

előállítás.

2. *Tegyük fel, hogy egy adott x-re* $f^{(p-1)}(u)$ $(p\geqq 1)$ $(x-\delta,x)$*-ben létezik és abszolút folytonos, továbbá, hogy* $f^{(p)}(x-t)t^{\sigma_0+p-1}\in L(0,\delta)$ $(\sigma_0\leqq-(p-1))$.[40] *Akkor* $f(u)$ W_s*-limesze létezik a szóban forgó* $u=x$ *helyen* $\sigma>\sigma_0$ *mellett, mégpedig*

$$(6.17)\qquad \left\{\begin{aligned} f_{[s]}(x)&=I_s(f,x,\delta)+\sum_{k=1}^{p}\Gamma(s+k)^{-1}f^{(k-1)}(x-\delta+0)\delta^{s+k-1}+\\ &+\Gamma(s+p)^{-1}\int_0^\delta f^{(p)}(x-t)t^{s+p-1}dt.\end{aligned}\right.$$ [41]

KOROLLÁRIUMOK. **1.** *Ha* $f(u)$ $(x-\delta,x)$*-ben korlátos, akkor* (6. 16) *fennáll* $\sigma>0$ *mellett.*

2. *Ha* $f^{(p)}(u)$ $(p\geqq 1)$ $(x-\delta,x)$*-ben létezik és korlátos, akkor* (6. 17) *fennáll* $\sigma>-p$ *mellett.*

3. *Ha* $f^{(p)}(x-0)$ $(p\geqq 0)$ *létezik, akkor* $f(u)$ W_{-p}*-deriváltja szintén létezik az* $u=x$ *helyen és*

$$(6.18)\qquad f_{[-p]}(x)=f^{(p)}(x-0).$$

4. *Ha* $f^{(p)}(u)$ $(p\geqq 0)$ *egy x helyen* $\theta\in(0,1]$ *kitevőjű baloldali Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor* $\sigma>-(p+\theta)$ *és elegendő kis* $\delta>0$ *mellett fenn-*

[40] $\sigma_0=1-p$ esetén az utolsó feltétel az előzőnek következménye és így elhagyható.
[41] Mint látható, (6. 17) bizonyos fokig a TAYLOR-formula általánosítása (vö. (6. 23)).

áll, hogy

$$(6.19)\quad f_{[s]}(x)=\begin{cases} I_s(f,x,\delta)+\sum_{k=1}^{p}\Gamma(s+k)^{-1}f^{(k-1)}(x-\delta+0)\delta^{s+k-1}+\\ \quad +\Gamma(s+p+1)^{-1}f^{(p)}(x-0)\delta^{s+p}+\\ \quad +\Gamma(s+p)^{-1}\int_0^\delta [f^{(p)}(x-t)-f^{(p)}(x-0)]t^{s+p-1}dt;\end{cases}$$

itt $p=0$ *esetén* $\sum_{k=1}^{p}$ *helyett* 0 *értendő.*

5. *Ha* $f(u)$*-nak egy* $(x-\delta,x)$ *intervallumban akárhányadik deriváltja létezik és korlátos, akkor* $f_{[s]}(x)$ *minden* s*-re létezik és* $\sigma>0$ *mellett érvényes a* (6.16), $\sigma>-p$ $(p=1,2,\ldots)$ *mellett pedig a* (6.17) *előállítás.*

BIZONYÍTÁS. 1° Ha $\int_0^\delta f(x-t)t^{\sigma_0-1}dt$ $(\sigma_0<1)$ létezik, akkor a 3. lemma második fele szerint $\int_0^\delta f(x-t)t^{s-1}dt$ létezik és s-nek holomorf függvénye a $\sigma>\sigma_0$ félsíkon; mivel pedig $I_s(f,x,\delta)$ mindhárom tagja minden s-re létezik és analitikus (vö. (6.14)), arra jutunk, hogy

$$(6.20)\quad \int_0^1 f(x-t)[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]dt=\Gamma(s)^{-1}\int_0^\delta f(x-t)t^{s-1}dt+I_s(f,x,\delta)$$

szintén létezik és reguláris $\sigma>\sigma_0$ mellett. — $f_{[s]}(x)$ definíciója alapján innen folyik (6.16).

2° Legyen $f(u)$ egy $(x-\delta,x)$ intervallumban abszolút folytonos ($p=1$ eset). Akkor — mint ismeretes — $f'(u)$ itt m.m. létezik és L-integrálható; parciálisan integrálva, nyerjük (vö. (3.4)) a következőt:

$$(6.21)\quad \begin{aligned}\Gamma(s)^{-1}\int_0^\delta f(x-t)t^{s-1}dt&=\Gamma(s+1)^{-1}\delta^s\cdot f(x-\delta+0)+\\ &+\Gamma(s+1)^{-1}\int_0^\delta f'(x-t)t^s dt \qquad (\sigma>0).\end{aligned}$$

Ha $f'(x-t)t^{\sigma_0}\in L(0,\delta)$ $(\sigma_0\leqq 0)$, akkor a jobboldal $\sigma>\sigma_0$ mellett is reguláris (3. lemma 2.), tehát a baloldal analitikus folytatását szolgáltatja; így (6.20) és (6.21) felhasználása az

$$(6.22)\quad f_{[s]}(x)=I_s(f,x,\delta)+\Gamma(s+1)^{-1}\left[f(x-\delta+0)\cdot\delta^s+\int_0^\delta f'(x-t)t^s dt\right] \qquad (\sigma>\sigma_0)$$

képletre vezet.

Tételezzük fel, hogy valamely $p > 1$ esetén érvényes tételünk 2. részének állítása; eszerint, ha $f^{(p-1)}(u)$ abszolút folytonos $(x-\delta, x)$-ben, akkor (6.17) fennáll a $\sigma > -(p-1)$ félsíkban. De akkor, mivel $f^{(p)}(u)$ $(x-\delta, x)$-ben abszolút folytonos és $f^{(p+1)}(x-t)t^{\sigma_0+p} \in L(0, \delta)$ $(\sigma_0 \leqq -p)$, a

$$\Gamma(s+p)^{-1}\int_0^\delta f^{(p)}(x-t)t^{s+p-1}dt = \Gamma(s+p+1)^{-1}f^{(p)}(x-\delta+0)\delta^{s+p}+$$
$$+\Gamma(s+p+1)^{-1}\int_0^\delta f^{(p+1)}(x-t)t^{s+p}dt \qquad (\sigma > -p)$$

átalakításból és a 3. lemma 2. feléből következik, hogy az

$$I_s(f, x, \delta)+\sum_{k=1}^{p+1}\Gamma(s+k)^{-1}f^{(k-1)}(x-\delta+0)\delta^{s+k-1}+$$
$$+\Gamma(s+p+1)^{-1}\int_0^\delta f^{(p+1)}(x-t)t^{s+p}dt$$

összeg $f_{[s]}(x)$ analitikus folytatása a $\sigma > \sigma_0$ félsíkra, azaz fennáll (6.17), p helyett $(p+1)$-gyel.

3° Ami a korolláriumokat illeti, az 1. és 2. premisszája nyilván maga után vonja (6.16), ill. (6.17) érvényességi feltételének teljesülését $\sigma_0 = \varepsilon$, ill. $\sigma_0 = -p+\varepsilon$ mellett, hol $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi.

A 3-at igazolandó, először is vegyük észre, hogy $f^{(p)}(x-0)$ $(p \geqq 0$, fix) létezésekor $f^{(p)}(u)$ szükségképpen létezik és korlátos x-nek egy elegendő kis baloldali környezetében, mondjuk $(x-\delta, x)$-ben s így (vö. (6.16)—(6.17)) fennáll (6.19) $\sigma > -p$ mellett. Minthogy $I_s(f, x, \delta)$ egész függvénye s-nek és (vö. (3.9)—(3.10))

$$I_{-p}(f, x, \delta) = \int_0^1 f(x-t)\mathfrak{z}_{-p}(t)dt - \mathfrak{z}_{-p}(x)\int_0^1 f(t)dt = 0, \tag{6.23}$$

(6.19)-ből kiolvasható állításunk, amennyiben az utolsó tag $s \to -p+0$ esetén $\to 0$ (vö. (4.5)). — Valóban, legyen $s = \sigma$ és $-p < \sigma \leqq -p+\frac{1}{2}$, akkor két részre bontással $(0 < \eta < \delta)$:

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\Gamma(\sigma+p)^{-1}\cdot\int_0^\delta [f^{(p)}(x-t)-f^{(p)}(x-0)]t^{\sigma+p-1}dt\right| \leqq \\ &\leqq |\Gamma(\sigma+p)|^{-1}\left(\left|\int_0^\eta\right|+\left|\int_\eta^\delta\right|\right) < \max_{(1,\frac{3}{2})}\Gamma(u)^{-1}\cdot\sup_{(0,\eta)}|f^{(p)}(x-t)-f^{(p)}(x-0)|+ \\ &+|\Gamma(\sigma+p)|^{-1}\cdot\eta^{-1}\sup_{(0,\delta)}|f^{(p)}(x-t)-f^{(p)}(x-0)|, \end{aligned}\right. \tag{6.24}$$

s az utóbbi korlát első tagja alkalmasan kicsi η mellett, a második pedig rögzített η és $-p$-hez elegendő közeli σ esetén előírt $\varepsilon/2$ alá szorítható.

Ha $|f^{(p)}(x-t)-f^{(p)}(x-0)| \leqq Kt^{\theta}$ ($K>0$, konstans; $0 \leqq t \leqq \delta$), akkor innen $[f^{(p)}(x-t)-f^{(p)}(x-0)]t^{-1-\theta+\varepsilon} \in L(0, \delta)$ ($\varepsilon>0$), úgyhogy a 3. lemma 2. fele alapján (6. 19) a $\sigma>-(p+\theta)$ félsíkban is fennáll. Végre az 5. korollárium az első kettő evidens folyománya.

IRODALOM

[1] BIEBERBACH, L.: *Lehrbuch der Funktionentheorie,* I.—4. kiadás, Leipzig, 1934.

[2] BOHR, H.: Über die Summabilität Dirichletscher Reihen. *Gött. Nachr.*, 1909, 247—262.

[3] BOSANQUET, L. S.: A solution of the Cesàro-summability problem for successively derived Fourier series. *Proc. London Math. Soc.* (2), **46** (1940), 270—289.

[4] BOSANQUET, L. S.: The Cesàro-summability of the successively derived allied series of a Fourier series. *Proc. London Math. Soc.* (2), **49** (1945), 63—76.

[5] COXETER, H. S. M.: The functions of Schläfli and Lobatschefsky. *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, **6** (1935), 13—29.

[6] DAVIS, H. T.: The application of fractional operators to functional equations. *Amer. J. Math.*, **49** (1927), 123—142.

[7] DOETSCH, G.: *Handbuch der Laplace-Transformation,* I—III. Basel, 1950—56.

[8] FEJÉR, L.: Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung. *Math. Annalen,* **65** (1908), 413—423.

[9] FEJÉR, L.: Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe. *J. reine u. angew. Math.*, **142** (1913), 165—188.

[10] FEJES-TÓTH, L.: On the volume of a polyhedron in non Euclidean space. *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1956), 256—261.

[11] HADAMARD, J.: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *J. de Math.* (4), **8** (1892), 101—186.

[12] HADWIGER, H.: Der Begriff der Ultrafunktion. *Vierteljahrsschr. naturf. Ges. Zürich,* **92** (1947), 31—42.

[13] HARDY, G. H.: The application of Abel's method of summation to Dirichlet's series. *Quart. J. Math.*, **47** (1916), 176—192.

[14] HARDY, G. H.: Riemann's form of Taylor series. *J. London Math. Soc.*, **20** (1945), 48—57.

[15] HARDY, G. H.: *Divergent series.* Oxford, 1949.

[16] HARDY, G. H.—LITTLEWOOD, J. E.; Some properties of fractional integrals, I.—II. *Math. Zeitschr.*, **27** (1928), 565—606; **34** (1932), 403—439.

[17] HARDY, G. H.—RIESZ, M.: *The general theory of Dirichlet's series.* Cambridge, 1915.

[18] HARDY, G. H.—ROGOSINSKI, W. W.: *Fourier series.* Cambridge, 1944.

[19] HILLE, E.: Functional analysis and semigroups. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* XXXI., 1948.

[20] KNOPP, K.: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* — 4. kiadás, Berlin—Heidelberg, 1950.

[21] KNOPP, K.: *Funktionentheorie,* II. — 7. kiadás, Berlin, 1949.

[22] KRÁLIK, D.: Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktionentheorie. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 49—64.

[23] KUNIYEDA, K.: Note on Perron's integral and summability abscissae of Dirichlet's series. *Quart. J. Math.*, **47** (1916), 193—219.

[24] LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie.* II. Leipzig, 1927.

[25] LEBESGUE, H.: Recherches sur la convergence des séries de Fourier. *Math. Annalen*, **61** (1905), 251—280.

[26] LIOUVILLE, J.: Sur le calcul des différentielles à indices quelconques. *J. Éc. Polyt.*, **13** (1832), 71—162.

[27] LÖSCH, F.—SCHOBLIK, F.: *Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen.* Leipzig, 1951.

[28] MARCINKIEWICZ, J.—ZYGMUND, A.: On the behaviour of trigonometric series and power series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **50** (1941), 407—453.

[29] MIKOLÁS, M.: Farey series and their connection with the prime number problem, I. *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1950), 93—117.

[30] MIKOLÁS, M.: Zur Theorie der Gammafunktion, der Riemannschen Zetafunktion und verwandter Funktionen, I. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 381—438.

[31] MIKOLÁS, M.: Mellinsche Transformation und Orthogonalität bei $\zeta(s, u)$; Verallgemeinerung der Riemannschen Funktionalgleichung von $\zeta(s)$. *Acta Sci. Math. Szeged*, **17** (1956), 143—164.

[32] MIKOLÁS, M.: Integral formulae of arithmetical characteristics relating to the zeta-function of Hurwitz. *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1957), 44—53.

[33] MIKOLÁS, M.: A simple proof of the functional equation for the Riemann zeta-function and a formula of Hurwitz. *Acta Sci. Math. Szeged*, **18** (1957), 261—263.

[34] MIKOLÁS, M.: Über die Charakterisierung der Hurwitzschen Zetafunktion mittels Funktionalgleichungen. *Acta Sci. Math. Szeged*, **19** (1958), 247—250.

[35] MIKOLÁS, M.: Über die höheren Differentialkoeffizienten zusammengesetzter Skalar- bzw. Vektorfunktionen und einige Anwendungen derselben. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **1** (1958), 49—65.

[36] MIKOLÁS, M.: Differentiation and integration of complex order of functions represented by trigonometrical series and generalized zeta-functions. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), 77—124

[37] MIKOLÁS, M.: On a problem of Hardy and Littlewood in the theory of diophantine approximations. *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959) (megjelenés alatt).

[38] MIKOLÁS, M.: Analitikus függvények zérushelyeinek eloszlása és a Cauchy—Hadamard-formula. *Mat. Lapok*, **10** (1959), 53-65.

[39] MIKOLÁS, M.: Bemerkungen über den Wertvorrat durch Potenzreihen definierter, insbesondere meromorpher Funktionen. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **2** (1959) 123—132.

[40] MISRA, M. L.: The summability (A) of the successively derived series of a Fourier series and its conjugate series. *Duke Math. J.*, **14** (1957), 167—177.

[41] NÖRLUND, N. E.: *Differenzenrechnung.* Berlin, 1924.

[42] OBRESCHKOFF, N.: Über die C-Summierbarkeit der derivierten Reihen der Fourierschen Reihen. *Abh. Preuss. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl.*, 1941. No. 15, 1—28.

[43] OSGOOD, W. F.: *Lehrbuch der Funktionentheorie,* I.-5. kiadás, Leipzig—Berlin, 1928.

[44] PERRON, O.: *Algebra,* II. *Berlin—Leipzig,* 1927.

[45] RÉNYI, A.: On the summability of Cauchy—Fourier series. *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1950), 162—164.

[46] RIEMANN, B.: Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. Ges. Werke, 2. kiadás, 1892, 353—366.

[47] Riesz, M.: Sur le représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet. *Acta Math.*, **35** (1912), 253–270.
[48] Riesz, M.: L'intégrale de Riemann—Liouville et le problème de Cauchy. *Acta Math.*, **81** (1949), 1—223.
[49] Rogosinski, W.: Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen. *Math. Zeitschr.*, **25** (1926), 132—149.
[50] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*, I.—II. Paris, 1957 (2. kiadás), ill. 1951.
[51] Szőkefalvi-Nagy, B.: *Valós függvények és függvénysorok*. Budapest, 1954.
[52] Titchmarsh, E. C.: Principal value Fourier series. *Proc. London Math. Soc.* (2), **23** (1925), 41—43.
[53] Titchmarsh, E. C.: *The theory of the Riemann zeta-function*. Oxford, 1951.
[54] Turán, P.: *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*. Budapest, 1953.
[55] Weyl, H.: Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahrsschr. naturf. Ges. Zürich*, **62** (1917), 296—302.
[56] Whittaker, E. T.—Watson, G. N.: *A course of modern analysis*. — 4. kiadás, Cambridge, 1927.
[57] Zamansky, M.: Sur la sommation des séries de Fourier dérivées. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **231** (1950), 1118—1120.
[58] Zygmund, A.: *Trigonometrical series*. — 2. kiadás, New York, 1952.

(Beérkezett: 1959. VII. 9.)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete

KÖNYVISMERTETÉSEK

Hua Lo-keng: A törzsszámok additív elmélete

(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959)

Ez év derekán az Akadémiai Kiadó, a német nyelvű fordítás megjelenésével szinte egyidejűleg, közzétette HUA LO-KENG, az ismert kínai matematikus additív számelméleti könyvének magyar fordítását „A törzsszámok additív elmélete" címen. A magyar fordítás novuma a némettel szemben a könyvhöz csatolt, a VINOGRADOV-középértéktétel élesítését célzó kiegészítés, mely az utóbbiban nem szerepel.

E munka azokat az eredményeket tartalmazza, amelyeket szerzője a trigonometrikus összegek I. M. VINOGRADOVtól származó módszerének élesítésével, az additív számelmélet WARING-GOLDBACH problémájának, valamint a törzsszámokat, mint ismeretleneket tartalmazó egyenletrendszerek vizsgálatával kapcsolatosan elért.

A könyv megjelenése különleges öröm a számelmélet összes hazai művelőinek, főképpen azért, mert ily módon magyar nyelven is hozzáférhetőkké váltak a számelmélet igen nagy fontosságú olyan eredményei, amelyek jelentős része eddig csak kínai nyelven volt elérhető. De azért is, mert e mű kiadásában egy életrevaló kezdeményezést látnak, nevezetesen azt, hogy az *önálló eredményeket tartalmazó könyvekkel* — magyar nyelven — ismerkedhetnek meg — esetleg más területeken dolgozó matematikusok is.

A könyv vonzerejét növeli a mondottakon kívül az a körülmény is, hogy a benne tárgyalt problémák a számelmélettel foglalkozó matematikusok érdeklődésének homlokterében állanak. Ezt igazolja az is, hogy a könyv első, hosszabb felében tárgyalt WARING-GOLDBACH problémához kapcsolódó, a szerző által elért eredmények, speciális esetként tartalmazzák J. M. VINOGRADOV híres tételét, mely azt mondja ki, hogy minden elegendő nagy páratlan szám előállítható három törzsszám összegeként.

A könyv első két fejezete a WARING-GOLDBACH problémával foglalkozik. A szerző e megjelölést az

$$f(p_1)+\cdots+f(p_s)=N \tag{1}$$

egyenletre vonatkoztatja, melyben $f(x)$ oly k-adfokú, egész értékű polinomot jelöl, melynek k-adfokú tagja pozitív együtthatós, s bármely q természetes számot adunk is meg, x minden egész értéke mellett nem áll az

$$f(x)\equiv f(0)\ (\mathrm{mod}\ q)$$

kongruencia; a $p_1,\ldots,p_s$ ismeretlenek törzsszámok.

A megnevezett rész fő célkitűzése az (1) alatti egyenlet megoldásainak $I_s(N)$ számára aszimptotikus formulát megadni, hacsak az egyenlet összeadandóinak s száma nem túlságosan kicsi. Az ehhez szükséges segédeszközök megteremtését célozzák a könyv első fejezetei.

Az első fejezet speciális típusú trigonometrikus összegeket vizsgál. Fő eredménye az

$$|S(q,f(x))|\leqq c(k,\varepsilon)q^{1-a+\varepsilon} \qquad (a_1,\ldots,a_k,q)=1$$

egyenlőtlenség, ahol $f(x)$ tetszőleges egész együtthatós k-adfokú polinomot jelent,

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q} e_q(f(x)), \quad a=\frac{1}{k},$$

s $c(k,\varepsilon)$ egy, csak k és ε értékeitől függő állandó. A szóban forgó egyenlőtlenség $f(x)=x^k$-nak megfelelő speciális esetét HARDY és LITTLEWOOD bizonyították be először a WARING-problémával kapcsolatos vizsgálataik során. Az általános esetben a bizonyítás hasonló módon történik, mint az idézett speciális esetben, azzal a különbséggel, hogy az általános esetben könnyen leküzdhető kongruencia-nehézségek lépnek fel.

A második fejezet $d(n)$-et tartalmazó összegek vizsgálatával foglalkozik, ahol $d(n)$ az n természetes szám osztóinak számát jelöli. VAN DER CORPUT egy lemmájának, — mely lemma kimondásának bonyolultsága vetekszik bizonyításának egyszerűségével — valamint több ismeretlent tartalmazó, kongruenciákról szóló, önmagukban is érdekes lemmák segítségével szerző az alábbi tételt bizonyítja:

Jelentsen $f(x_1,\ldots,x_n)$ egy k-adfokú egész együtthatós polinomot, melynek együtthatói összességükben relatív-prímek. Ekkor

$$\sum_{x_1=1}^{P}\cdots\sum_{\substack{x_n=1\\ f(x_1,\ldots,x_n)\neq 0}}^{P} d^l(|f(x_1,\ldots,x_n)|)\leqq C_1(k,l,n)A(\log X)^{C_2(k,l,n)},$$

ahol X az $|f(x_1,\ldots,x_n)|$ függvény maximális értékét jelenti, amikor $1\leqq x_1,\ldots,x_n\leqq P$, továbbá $A=\max(P^n, X^{n/k})$.

A fejezet foglalkozik a kimondott tétel azon erősebb formájával is, amikor az $f(x_1,\ldots,x_n)$ függvény együtthatóira tett megszorítástól eltekintünk, valamint néhány más, $d(n)$-re vonatkozó becslés vizsgálatával.

A könyv következő két fejezete, a harmadik és negyedik fejezet, a trigonometrikus összegekre vonatkozó középértéktételekről szól. A harmadik fejezetben a BUNYAKOVSZKIJ- és HÖLDER-féle egyenlőtlenségek bizonyítása után sor kerül a következő tétel bizonyítására:

Legyen $f(x)$ k-adfokú egész értékű polinom és

$$T(\alpha)=\sum_{x=1}^{P} e(f(x)\alpha).$$

Ekkor $1\leqq\nu\leqq k$ esetén (ν egész szám)

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^\nu}d\alpha\leqq c_1(k,\nu)P^{2^\nu-\nu}(\log P)^{c_2(k,\nu)}d^{\nu-1}(u);$$

itt u az $f(x)$ együtthatói számlálóinak legnagyobb közös osztója, $c(k, \nu)$ pedig csak k és ν értékeitől függ.

E tétel bizonyítása ν-szerinti indukcióval történik, felhasználva a 2. fejezet idézett tételét.

A harmadik fejezet hátralevő része a trigonometrikus összegek becslésének WEYL-féle módszerét ismerteti.

A negyedik fejezetben a szerző élesíti a J. M. VINOGRADOV híres középértéktételét a következő módon:

Legyen $f(x)$ k-adfokú polinom, továbbá l tetszőleges pozitív egész. Ha $s \geqq \frac{1}{4}(k+1)\cdot k + lk$, akkor

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 |C_k(P)|^{2s} d\alpha_1 \dots d\alpha_k \leqq (5s)^{5sl} (\log P)^{2l} P^{2s - \frac{1}{2}k(k+1)+\delta},$$

ahol

$$C_k(P) = \sum_{x=1}^{P} e(f(x)), \qquad f(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x,$$

$$\delta = \delta(k) = \frac{1}{2} k(k+1)(1-a)^l, \qquad a = \frac{1}{k}.$$

A javítást az eredeti formához képest főleg a $(\log P)$-t tartalmazó faktor jelenti, amennyiben Vinogradov középértéktételében P kitevője az itteni kitevővel együtt egy ε-t is tartalmaz, melytől függően a P-hatvány szorzója változik.

A most mondott, élesített középértéktételt a szerző felhasználja az

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} e(\alpha f(x)) \right|^{2s} d\alpha \ll (\log P)^{2l} P^{2s-k+\delta}$$

egyenlőtlenség levezetésére, ahol $f(x)$ k-adfokú egész értékű polinomot jelent, $P \geqq 2$, s és δ jelentése pedig egyezik az előbbiekben mondottakkal.

Az ötödik fejezet első része az előző fejezet középértéktételét pontosabb középértéktétellel helyettesíti a $k \leqq 10$ esetekben. A további részekben a trigonometrikus összegek és középértékeik közötti kapcsolatot vizsgálja a szerző. E rész eredményei közül a legfontosabb a következő:

Legyenek $\alpha_k, \dots, \alpha_1$ valós számok és

$$f(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x.$$

Tegyük fel továbbá, hogy valahányszor $0 < \delta_1 < 1$ és T tetszőlegesen választható egész szám, akkor

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x=T+1}^{T+P} e(f(x)) \right|^{2t_1} d\alpha_1 \dots d\alpha_k \leqq c(k, t_1, \delta_1) P^{2t_1 - \frac{1}{2}k(k+1)+\delta_1},$$

teljesül. Igaz a következő állítás:

Jelentsenek $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_1$ valós számokat és legyen

$$F(x) = \beta_{k+1} x^{k+1} + \cdots + \beta_1 x,$$

továbbá legyen r olyan egész szám, amely kielégíti a $2 \leqq r \leqq k+1$ feltételeket. Tegyük fel még, hogy

$$\left| \beta_r - \frac{h}{q} \right| \leqq \frac{1}{q^2}, \quad (h, q) = 1, \quad 1 \leqq q \leqq P^r;$$

akkor $T = 0(P)$ esetén

$$S = \sum_{x=T+1}^{T+P} e(F(x)) = \begin{cases} 0\left(P^{1-\varrho}\left(\dfrac{P}{q}\right)^{\frac{1}{2t_1+k+1}}\right), & \text{ha } 1 \leqq q \leqq P, \\ 0\,(P^{1-\varrho}), & \text{ha } P \leqq q \leqq P^{r-1}, \\ 0\left(P^{1-\varrho}\left(\dfrac{q}{P^{r-1}}\right)^{\frac{1}{2t_1+k+1}}\right), & \text{ha } P^{r-1} \leqq q \leqq P^r, \end{cases}$$

ahol

$$\varrho = \frac{1-\delta_1}{2t_1+k+1}.$$

E gondolat jelentősége abban áll, hogy a középérték nagyságrendjének ismeretéből a trigonometrikus összeg nagyságrendjére lehet következtetni.

Az egész könyv szempontjából legfontosabb fejezet a soron következő hatodik fejezet. Ebben a szerző olyan trigonometrikus összegeket vizsgál, melynek összegezési változója egy adott számtani haladvány prímjein szalad keresztül, természetszerűleg csak olyanokon, melyek egy adott határt nem haladnak meg. Az ERATOSTHENES-féle szita és a VINOGRADOVtól származó kombinatorikus módszer továbbfejlesztésének kombinációja adja az alábbi fontos tételt:

Legyen $0 < Q \leqq c_1(k) L^{\sigma_1}$ és

$$S = \sum_{\substack{p \leqq P \\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, Q)}} e(f(p)),$$

ahol L a $\log P$ mennyiség rövidítése, továbbá

$$f(x) = \frac{h}{q} x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_k, \quad (h, q) = 1$$

az α számok valósak, azonkívül $L^\sigma < q \leqq P^k L^{-\sigma}$. Akkor tetszőleges oly $\sigma_0 > 0$ esetén, melyre $\sigma \geqq 2^{6k}(\sigma_0 + \sigma_1 + 1)$, igaz az

$$|S| \leqq c_2(k) P L^{-\sigma_0} Q^{-1}$$

egyenlőtlenség. E tétel javítható lenne, ha az ERATHOSTENES-féle szitát a BRUNN-szita helyettesíthetné.

A hetedik fejezet az imént idézett tétel, valamint a bizonyítás nélkül átvett SIEGEL—WALFISZ-tétel segítségével aszimptotikus formulát ad meg az (1) egyenlet megoldásainak $I_s(N)$ számára. Az aszimptotikus formula az

$$I_s(N)=\int_0^1 \mathfrak{T}^s(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha$$

integrálelőállításból adódik a FAREY-felosztás elvégzése után, ahol

$$\mathfrak{T}_i^s(\alpha)=\sum_{p\leq P} e(f(p)\alpha), \quad N=f(P).$$

Az aszimptotikus formulát bonyolult volta miatt nem részletezzük. Ami lényeges, az az, hogy a formula főtagja tartalmazza a szinguláris sort, mint tényezőt, s ennek szorzója a maradéktagnál N-ben erősebb rendű. Következésképpen, ahhoz, hogy

$$I_s(N)>0$$

fennállására következtetni tudjunk, ismernünk kellene olyan $a>0$ valós szám létezését, melyre az N-hez tartozó szinguláris sor $\sigma(N)$ minden elegendő nagy N értékre teljesíti a

$$\sigma(N)\geqq a$$

egyenlőtlenséget.

A nyolcadik fejezet az $f(x)=x^k$ speciális esetnek megfelelő szinguláris sor vizsgálatával foglalkozik. Ha ϑ jelöli azt a kitevőt, melyre $p^\vartheta \| k$,

$$\gamma=\begin{cases}\vartheta+2 & \text{ha } p=2, \quad 2|k \\ \vartheta+1 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

továbbá

$$K=\prod_{(p-1)/k} p^\gamma,$$

akkor a fejezet tétele így fogalmazható:

Tegyük fel, hogy $s\geqq 3k+1$ és a $(p-1)/k$ feltételnek megfelelő minden p törzsszám esetében fennáll az

$$S\equiv N(\mathrm{mod}\, p^\gamma)$$

kongruencia; röviden

$$S\equiv N(\mathrm{mod}\, K).$$

Akkor

$$\sigma(N)\geqq a>0,$$

ahol a független N-től.

E tétel, valamint az előző fejezet aszimptotikus formulája együttesen adják az alábbi tételt:

Jelölje $H(k)$ a legkisebb olyan s egész számot, hogy minden elegendően nagy $N\equiv s\,(\mathrm{mod}\, K)$ szám előállítható s számú törzsszám k-adik hatványainak összegeként. Akkor

$$H(k)\leqq\begin{cases}2^k+1, & \text{ha } \quad 1\leqq k\leqq 10 \\ 2k^2(2\log k+\log\log k+2,5), & \text{ha } \quad k>10.\end{cases}$$

Említsük meg e tétel néhány speciális esetét.

1. VINOGRADOV tétele: Minden elegendő nagy páratlan szám három törzsszám összege.

2. Minden elegendő nagy páratlan szám előállítható kilenc törzsszám köbének összegeként.

A következő, kilencedik fejezetben a szerző definiálja a kitevősűrűség fogalmát. Egy csupa különböző természetes számokból álló U halmaz kitevősűrűségének nevezi azt a legnagyobb ν valós számot, melyre tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$U(X) = \sum_{\substack{u \leqq X \\ u \in U}} 1 \geqq X^{\nu - \varepsilon}$$

fennáll. DAVENPORT egy lemmáját felhasználva, a szerző bebizonyítja a következő tételt:

Legyen N egy k-tól függően elég nagy egész szám, U a természetes számoknak egy olyan halmaza, melynek kitevősűrűsége nem kisebb ν-nél, azonkívül

$$\delta = k - 1 + \max_{1 \leqq r \leqq k-2} \min \left(2^{1-r} \frac{r + 1 - \nu(k-1)}{2^r - 1 + \nu} \right).$$

Tegyük fel, hogy

$$1 + \nu\delta > k\left(1 - \frac{2}{b}\right);$$

ha most $u + u' \equiv N - 2k - 3 \pmod{K}$, $u, u' \in U$, $u, u' \leqq X$ megoldásainak száma $\gg U^2(X)$, akkor

i) $k \neq \frac{1}{2} p^{\vartheta}(p-1)$ $(p \neq 2)$ esetén N előállítható a

$$p_1^k + \cdots + p_{2k+3}^k + u + u', \qquad u, u' \in U$$

alakban;

ii) $k = \frac{1}{2} p^{\vartheta}(p-1)$ $(p \neq 2)$ esetén, feltéve hogy tetszőleges l-re az U-nak az

$$u \equiv l \pmod{p}$$

feltételnek megfelelő elemeiből álló halmaz kitevősűrűsége sem kisebb ν-nél, N újból előállítható a mondott alakban.

Itt a b jelentése az alábbi:

$$b = \begin{cases} 2k^2(2k \log k + \log\log k + 3), & \text{ha} \quad k > 12, \\ 2^{k-1}, & \text{ha} \quad k \leqq 12. \end{cases}$$

E tételből levezethető az előző fejezet tételének egy élesítése. Nevezetesen igaz az alábbi tétel:

Legyen $S_0 = S_0(k) = 2k + 2m + 7$ és $S \geqq S_0$, akkor minden elegendően nagy N egész szám, melyre

$$N \equiv S \pmod{K}$$

igaz, előállítható mint S számú törzsszám k-adik hatványának összege. Ennélfogva, ha $H(k)$ értelme azonos az előbbiekben mondottal, akkor

$$H(k) \leqq 2k + 2m + 7 \qquad (\sim 4k \log k).$$

Az m szám az

$$m = \left[\frac{\log \frac{1}{2} b + \log(1-2a)}{-\log(1-a)} \right], \qquad a = \frac{1}{k},$$

definícióval adott.

HUA LO-KENG könyvének két utolsó fejezete, a X. és XI. fejezet a

$$(2) \qquad \begin{matrix} p_1^k + \cdots + p_s^k = N_k \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ p_1 + \cdots + p_s = N_1 \end{matrix}$$

diofantikus egyenletrendszer vizsgálatával foglalkozik, melyben a $p_1 \ldots, p_s$ ismeretlenek törzsszámok. A szerző bebizonyítja, hogy a vizsgált egyenletrendszernek van törzsszámokból álló megoldása, ha az $N_1, \ldots, N_s$ számok elegendően nagyok, s ha teljesül a „pozitív megoldhatósági feltétel", valamint a „megoldhatósági kongruenciafeltétel". Az idézőjelbe tett első kifejezés azt jelenti, hogy a (2) egyenletrendszer pozitív valós számokkal megoldható. A második pedig azt, hogy a

$$\left.\begin{matrix} h_1^k + \cdots + h_s^k \equiv N_k \\ h_1 + \cdots + h_s \equiv N_1 \end{matrix}\right\} \pmod m$$

kongruenciarendszer minden m természetes szám esetén, m-hez relatív prím $h_1, \ldots h_s$ számokban megoldható.

A könyvhöz a szerző egy kiegészítést csatolt, melyben a *Vinogradov*-féle középértéktétel egy oly élesebb formája van bebizonyítva, melynél a középértéktételben fellépő k-tól függő tényező explicit adott, hacsak az s kitevő egy nem túlságosan hosszú, k-tól függő intervallumra van lokalizálva.

A könyv fordítása az 1957-ben megjelent új kínai kiadás alapján készült. Fordítója FÖLDES ISTVÁN, a matematikai tudományok kandidátusa gondos és nehéz munkát végzett. Nem őt terheli, hogy a könyvben, a sok fáradság ellenére, aránylag jelentős számú sajtóhiba maradt. Csak példaképp említek néhányat, anélkül, hogy a felsorolásnál teljességre törekedném. A 19. oldalon a felülről számított 16. sorban $k^3 p^{(1-\alpha)l}$ helyett $k^3 p^{(1-a)l}$ olvasandó. A 20. oldalon az alulról számított 10. sorban $p_{\sigma_i - 1}$ helyett $p^{\sigma_i - 1}$ értendő. A 23. oldal utolsó sorában $c_\gamma(k, \varepsilon) q^{1 \; a+\varepsilon} d^{\alpha}$ helyett $c_\gamma(k, \varepsilon) q^{1-a+\varepsilon} d^{a}$ áll. A 42. oldalon a felülről számított 3. sor utolsó egyenlősége helyett $\leqq$ áll. A 45. oldal felülről számított második sorában, „megfelel az 5.1. lemma" helyett „megfelel a 4.1. lemma" olvasandó. A 125. oldal felülről számított 10. sorában s_0 helyett S_0 értendő. A 187. oldalon az alulról számított 4. sorban VINOGRADOV cikkének citálása előtt helyesen L áll stb....

HUA LO-KENG könyve izgalmas, de nem könnyű olvasmány. Aki nem sajnálja a fáradságot elolvasásához, az a könyv szép felépítésében, a tárgyalt anyag gondolati gazdagságában és az olvasás közben felvetődő sok új problémában erőfeszítéseiért bőséges kárpótlást fog találni.

Corrádi Keresztély
Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézete

S. Dushman: A vákuumtechnika tudományos alapjai

(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959)

A vákuumtechnikában az utóbbi évtizedekben hatalmas fejlődés ment végbe, s jelentősége a tudományos kutatásban és számos iparágnál lényegesen megnövekedett. Az izzólámpák és a rádiócsövek kifejlesztésével és gyártásával kapcsolatos problémák megoldása indította meg ezt a hatalmas fejlődést, mely napjainkban is tart.

A vákuumtechnika nélkülözhetetlen segédeszköze lett az atomfizikai kutatásnak, fontos szerepet kapott a kémiai kutatásnál és a nagyiparnál, valamint a fémek vákuumolvasztásánál, gáztartalom meghatározásánál; továbbá a félvezetőkkel kapcsolatos tudományos kutatásnál és üzemi gyártásánál is. Mindebből kitűnik, hogy a vákuumtechnika kinőtt a laboratóriumok tisztán tudományos környezetéből és egy új tudomány és iparág született. A jövő mérnökei között ott lesznek és nem lényegtelen szerepet fognak játszani a vákuummérnökök is.

Éppen ezért nagy jelentőségű DUSHMAN e könyve, mely igen alapos részletességgel, nagy tudományos felkészültséggel közel 800 oldalon keresztül tárgyalja a vákuum előállításával, fenntartásával és mérésével kapcsolatos folyamatok fizikai kémiáját, kritikai szempontból összefoglalja a megjelent vákuumtechnikai irodalmat, elméleti és gyakorlati szempontból ismerteti a használatos szivattyúkat és mérőberendezéseket, valamint a vákuumtechnikában használatos anyagokat.

A könyv alapvető munkának számít mindazok számára, akik a vákuumtechnika tudományos alapjait meg akarják ismerni, de nagy haszonnal olvashatják azok is, akik a vákuumtechnikát segédeszközként akarják igénybe venni, minthogy a könyv nemcsak elméleti, hanem gyakorlati szempontból is elsőrendű.

Egyetlen hibájául talán csak az róható fel, hogy a legújabb eredményeket nem találhatjuk meg benne, de ez abból ered, hogy a könyv 10 éves és a vákuumtechnika — éppen az előzőekben említett — rohamos fejlődése következtében tíz év alatt is már számottevő haladást ért el.

Ennek előrebocsátása után térjünk rá a könyv részletesebb ismertetésére.

Az 1. fejezet a kinetikus gázelmélet alapjaival kezdődik. Az alapjelenségek ismertetése után részletesen tárgyalja azon fogalmakat, melyek a vákuum előállításánál és fenntartásánál játszanak fontos szerepet. Így a párolgási sebességgel, a belső súrlódási együtthatóval, a szabad úthosszal, a gázok diffúziójával és hővezetésével foglalkozik nagyobb részletességgel.

A 2. fejezet a gázoknak csöveken és nyílásokon történő áramlását tárgyalja. Ismerteti nemcsak a viszkózus áramlás törvényeit, hanem a „szabad molekuláris" áramlást is. E fejezet második részében a gyakorlati szempontból lényeges leszívási sebességekkel ismerkedhetünk meg.

Külön fejezet foglalkozik a mechanikus szivattyúkkal. Rövid történelmi áttekintés után részletes ismertetés következik: a régebbi szivattyúktól a legújabbakig. Az ismertetett szivattyúk: a GEISZLER—TOEPLER, a GAEDE-féle forgó olajszivattyú, a CENCO típusú nagyvákuum szivattyú, a KINNEY, a STOKES, a WELCH, a DUO—SEAL, a GAEDE-féle molekuláris, a HOLWECK és LIEGBAHN szivattyú.

Végül ismerteti az ezen szivattyúk szívósebességének mérésére szolgáló módszereket.

A 3. fejezet a gőzsugár- és a higanygőz-szivattyúkat tárgyalja. A GAEDE-féle diffúziós szivattyú és a LANGMUIR-féle kondenzációs szivattyú leírásán kívül, az ezen szivattyúk működésének megértéséhez és a tervezésükhöz szükséges elméleti és gyakorlati megfontolások részletes ismertetése is szerepel.

Külön fejezetet szán a szerző a szerves folyadékokkal működő gőzszivattyúknak. A frakcionális nélküli és a frakcionáló olajgőz-szivattyúk tervezésénél a megfelelő folyadék kiválasztásával a terelő lemezek és a gőzáram alkalmas kialakításával részletesen foglalkozik.

A 6. fejezet a kis nyomások mérésére szolgáló műszereket ismerteti. A vákuummérőket működési alapelvük szerint a következőképpen osztályozza: 1. Higanyt, vagy más nem illékony folyadékot tartalmazó nyomásmérők (RAYLEIGH, MC LEOD), 2. BOURDON-cső elvén működő mechanikus nyomásmérők, 3. Belső súrlódáson alapuló nyomásmérők, 4. Radiometer típusú nyomásmérők, melyek meleg és hideg felületen ütköző molekulák impulzusváltozása alapján mérnek (CROOKES, KUNDSEN, WOVDOOW, SHRADER és SHERWOOD-féle nyomásmérők), 5. Hővezetés alapján működő nyomásmérők (thermokeresztes műszerek, PIRANI-HALL típusú nyomásmérők), melyek a hőátadásnak nyomástól való függését használják fel. 6. Az ionizációs vákuummérők. Az utóbbiakkal különös részletességgel foglalkozik. Ebben a fejezetben került sor a hibahelykeresők ismertetésére is.

Egész fejezet foglalkozik a szilárd testek gáz- és gőzelnyelőképességével. Ismerteti az adszorbciós, abszorpciós és deszorpciós folyamatokra vonatkozó kísérleti tapasztalatokat és elméleti megfontolásokat.

A 8. fejezet külön foglalkozik a gázoknak speciális anyagokon történő szorpciójával. Ismerteti az aktív szén szerkezetét és előállítását, majd nagyobb és kis nyomásokon az azon történő szorpciós folyamatokat. Ezután a szilikagél, zeolitok, kvarc és üveg tárgyalására kerül sor. Külön vizsgálat tárgyává teszi a cellulóze szorpcióját és deszorpcióját.

A következő fejezet fémek gázelnyelésével, gázok fémbeli diffúziójával és fémek gáztalanításával foglalkozik. Ismerteti a fizikai adszorbció és a kemoszorpció fogalmát. Részletesen tárgyalja a hidrogén oldhatóságát az A és B csoporthoz tartozó fémekben. Külön vizsgálja a palládiumhoz hasonló fémek és a palládium korom tulajdonságait. Ezután a nitrogén, oxigén, kéndioxid oldódására vonatkozó észleletekre tér rá. Vizsgálja a fémekbeli gázdiffúzió elméletét és a szorpciós és deszorpciós sebességek számítását. A fémek gáztalanítására vonatkozó régebbi vizsgálatokon kívül ismerteti NORTONnak és MARSHALLnak újabb kísérleteit is. A fémekben oldott gázok analízisére eljárásokat sorol fel.

A 10. fejezet tárgyát a kis nyomásokon végbemenő kémiai és elektromos gázlekötés (clean-up) képezi. Ez a fejezet a getterhatás két típusának, a diszperziós és a kontakt getterhatás ismertetésére van szánva. A kémiai gázlekötés keretében a fémek elgőzölésekor előálló gázlekötés kísérleti eredményeit, a rádiócsőgyártásban alkalmazott technikai gettereket, a cirkon és titán gettereket tárgyalja. Részletesen ismerteti a kisnyomású gázok és izzószálak körül fellépő reakciókat is. A villamos gázlekötés keretében a hidegkatódos, izzókatódos és elektróda nélküli kisülési csövekben végbemenő jelenségeket és gázlekötést teszi vizsgálat tárgyává. A vákuum izzólámpákban és izzókatódos kisülési csövekben szerzett tapasztalatokról külön részletesen számol be. Végül leírja lezárt rendszerekben a rendkívül kis nyomások előállításának módszereit.

A 11. fejezet tárgyát a gőznyomás és a párolgási sebesség képezi. Ennek keretében elméleti megfontolásokon kívül részletes táblázatban ismerteti a szénre és fémekre vonatkozó mérési adatokat. Foglalkozik ötvözetek, oxidok és más szervetlen vegyületek gőznyomásával is.

A vízgőz keletkezésének szabad és teljes energiája, ezüst-, higany- és palládiumoxid disszociációs nyomása, réz, vas, mangán, króm, molibdén- és wolfram oxidjainak disszociációja és redukciója, alkálifémek és alkáliföldfémek hidridjeinek disszociációja, nitridek disszociációs nyomása képezi az utolsó, 12. fejezet tárgykörét.

Talán ez a rövid ismertetés is érzékeltetni tudja, hogy milyen széles tárgykört képez az az anyag, amelyet a szerző könyvében feldolgozott. Az anyag összeválogatását a szerző igen nagy alapossággal végezte el, s igyekezett minden olyan ismeretet összefoglalni, ami a könyv megírásának idejében a vákuumtechnika területén lényegesnek látszott.

Mindent összevetve megállapíthatjuk, hogy DUSHMAN e könyvének lefordításával a magyar nyelvű műszaki irodalom gazdagabbá vált, s a jövendő magyar vákuumtechnikusok bizonyára nagy haszonnal forgathatják e könyvet, de nem hiányozhat ez a könyv egyetlen idősebb vákuumtechnikus kutató és fizikus könyvtárából sem.

Bodó Zalán
Híradástechnikai
Ipari Kutató Intézet
Budapest

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1960. I. 20. — Terjedelem: 9 (A/5) ív, 1 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 60-485

Ára: 20,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

X. KÖTET 2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1960

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

X. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

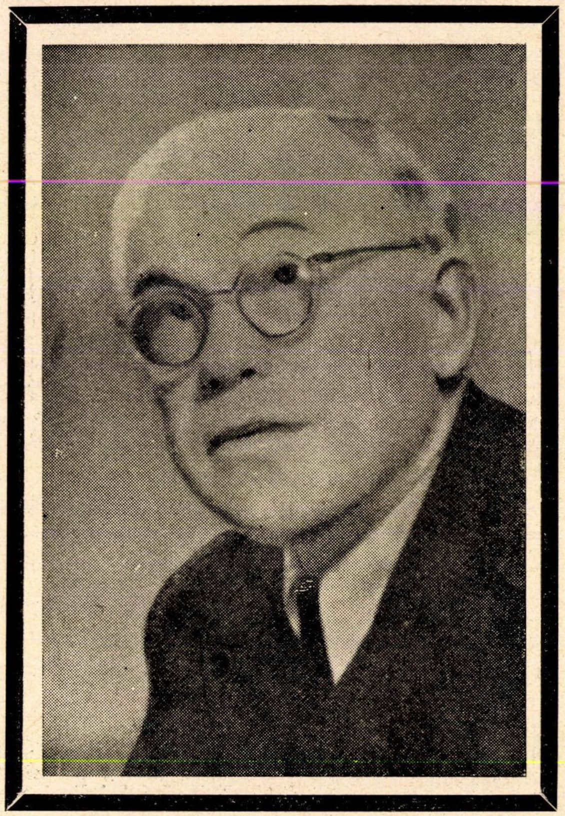
Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.



FEJÉR LIPÓT

1880—1959

A francia tudományos akadémia heti értesítője, a híres „Comptes rendus hebdomodaires des séances de l'Académie des Sciences" (röviden Comptes-Rendus), az 1900. december 10-i ülésről szóló füzetében korszakalkotó cikket közölt „*Sur les fonctions bornées et intégrables*" cím alatt, amely RIEMANN, CANTOR és DU BOIS-REYMOND munkái után a trigonometrikus sorok elméletében új utat tört. Megalapította közelebbről a FOURIER-féle sorok szummábilitási elméletét az akkor már jóideje megrekedt konvergencia-elmélettel szemben. A FOURIER-sort egyszerűen a számtani közepek módszerével szummálta, s ezzel mintegy megadta a létjogosultságot HÖLDER és CESÀRO szummáló eljárásának. A cikk szerzője FEJÉR LIPÓT, a budapesti egyetem negyedéves matematika-fizika szakos hallgatója volt. Még nem töltötte be 21-ik évét ekkor, midőn élete legnagyobb felfedezésével lépett a matematikus világ elé.

Pécsett született, 1880. február 9-én. Szülei, WEISZ SAMU kiskereskedő és felesége GOLDBERGER VIKTÓRIA németül beszéltek otthon, s így ő is németül kezdett el beszélni, bár később a magyar lett az igazi és imádott anyanyelve. A német beszéddel kapcsolatos a következő megható kis történet, amelyet könnyezve mesélt el nekem. Kisgyerek korában diftériába esett s a betegség oly súlyosra fordult, hogy már lemondtak róla. Egy este az orvos azzal ment el, hogy a kisfiú nem éri meg a reggelt. A kétségbeesett szülők ott sírtak az ágya mellett, midőn egyszerre a kis beteg megszólalt: „Weint Ihr nicht, der liebe Gott wird schon helfen". Valóban, a betegség megfordult és a kis „Toldi" (mert selypítve így mondta a Poldi nevet) életben maradt.

Nagyon eleven gyerek volt. Kedves humorral mesélte, hogy kisiskolás korában egyszer a hittanórán annyira rakoncátlankodott, hogy a hittanár haragjában fejéhez vágta a hittankönyvet. „De szerencsére csak Mózes Öt Könyve volt", tette hozzá pajzánul. A reáliskola alsóbb osztályaiban a számtanból instruktort fogadtak mellé, s csak miután „felszabadult a tízes számrendszer alól", lett jó matematikussá. Azután is olyan rosszul tanult, hogy tanárai tanácsára apja egy időre kivette az iskolából és befogta a kiskereskedésbe. Mint jóízűen mesélte, itt igen ügyesen tudott *egy* kézmozdulattal levágni megfelelő darabot a vég vászonból vagy szövetből. És esténként, üzletzáráskor ő vitte be a segéddel az „Auslagot". Később mégis visszakerült a reáliskolába. Az akkoriban nemrég megindult Középiskolai Matematikai Lapoknak állandó munkatársa volt s már itt megmutatta oroszlánkörmeit. Az érettségin franciából meg akarták buktatni, jóllehet ő volt az egyetlen az osztályból, aki e nyelvet használta is, amennyiben írogatott francia elemi matematikai lapba. De végre jobb belátásra jutottak és „beírtak hármasokat".

Érettségi után, 1897. őszén felkerült Budapestre s szülei kívánságára a műegyetemre iratkozott be. Az akkori Mathematikai és Physikai Társulat IV. tanulóversenyén feltűnt azzal, hogy az egyik feladat megoldásában többet bizonyított be a megkívántnál, de csak II. díjat nyert. Tanulmányait azután hamarosan az egyetemen folytatta, mint tanárjelölt. Itt azonban csak a szakvizsgát tette le, a tanári oklevelet nem szerezte meg. Elhatározó befolyással volt életére, hogy mint harmadéves, az 1899/1900 tanévet Berlinben végezte. Itt találta magára, mint mondotta, figyelmét a FOURIER-sorok kötötték le. Különösen H. A. SCHWARZ professzor volt rá nagy hatással. Ezt mindjárt kezdetben meghódította a talpponti háromszög minimum-tulajdonságának szellemes új bizonyításával, amelynek előnyét SCHWARZ maga is kiemelte a magáéval szemben. Meleg barátságot kötött E. SCHMIDTtel és különösen C. CARATHÉODORYval. Mint kedves epizódot mondta el, hogy első találkozásukkor SCHWARZ szemináriumában CARATHÉODORY éppen akkor lépett a terembe, midőn a professzor FEJÉR említett bizonyítását dicsérte.

Berlinből hazatérvén, 1900. nyárutóján jutott nagy felfedezésére. Miután A. PRINGSHEIMtől értesült, hogy a tétel új, dolgozatát beküldte a Comptes-

Rendus számára. Ez volt a fent idézett cikk, amely 1900. december 10-én került bemutatásra a párizsi tudományos akadémiában. Ezzel megkezdődött (eltekintve a Mat. és Fiz. Lapokba írt legelső cikkétől) felfedezésekben gazdag munkássága, amelynek főbb pontjait az alábbiakban ismertetem.

Tanulmányom, amelynek célja valamilyen képet adni Fejér eredményeiről a teljességre törekvés igénye nélkül, a következő tárgykörök szerint tagozódik:

1. A FOURIER-sor szummábilitása; szummálható trigonometrikus sorok.

2. A folytonos függvény FOURIER-sorának különböző szingularitásai; konjugált trigonometrikus sorok.

3. A függvény szakadásának meghatározása FOURIER-féle sorából.

4. A LAPLACE-sor szummábilitása.

5. Algebrai egyenletek gyökeinek helyzete; hézagos hatványsorok.

6. Korlátos hatványsorok.

7. A hatványsornak a konvergencia-körön való viselkedése; aszimptotikus értékek meghatározása.

8. Komplex interpoláció.

9. Általánosított LEGENDRE-polinomok; trigonometrikus sorok és hatványsorok többszörösen monoton együtthatósorozattal.

10. A FOURIER-sor magasabbrendű közepeinek diszkussziója.

11. Harmonikus és trigonometrikus polinomok.

12. Valós interpoláció és közelítő kvadratúra.

Az egyes tárgykörökön belül sem törekszem teljességre. Csak főbb dolgozatait idézem s azokból célomnak megfelelően ragadok ki egyes tételeket.

FEJÉR munkái hatásának nyomon követése külön tanulmányt igényelne. Itt csak a közvetlenül kapcsolódó irodalomra terjeszkedem ki különböző mértékben, aszerint, amint azt fontosnak tartom, ill. tudásom vagy a hely megengedi.

*

1. A bevezetőben említett rövid, de alapvető kis Comptes-Rendus cikket egész cikksorozat követte ugyanarról a tárgyról, annak mind bővebb kifejtését adva. Ehhez tartozott FEJÉR híres doktori értekezése: *Vizsgálatok a Fourier-féle sorok köréből,* Mat. és Fiz. Lapok, 11 (1902), 49—68 és 97—123. Betetőzése volt e cikksorozatnak a világhírű *Untersuchungen über Fouriersche Reihen,* Math. Annalen, 58 (1904), 51—69, amelyben klasszikus tömörséggel adja elő vizsgálatainak eredményeit, de lényegesen tovább is jut, mint disszertációjában. Már az utóbbiban bebizonyította alaptételét, amely FEJÉR *tétele* név alatt szerepel az irodalomban s már régen átment a tankönyvekbe:

Ha $f(x)$ a 2π szerint periodikus és a $0 \leqq x \leqq 2\pi$ intervallumban RIEMANN *szerint integrálható korlátos vagy nem korlátos függvény, akkor* FOURIER-*sora*[1]

$$s_0(x), s_1(x), \ldots, s_n(x), \ldots$$

részletösszegeinek számtani közepeire $n \to +\infty$ esetén

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n} \to \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

minden olyan x helyen, ahol $f(x)$ folytonos vagy elsőfajú szakadása van, vagyis ahol az $f(x+0)$ és $f(x-0)$ jobb-, ill. baloldali határérték létezik és véges.

Amíg tehát maguk a részletösszegek valamely x helyen divergálhatnak még mindenütt folytonos függvény esetén is, amint azt már P. DU BOIS-REYMOND megmutatta, addig a részletösszegek számtani közepei minden folytonossági helyen a függvényértékhez, elsőfajú szakadási helyen a jobb- és baloldali határérték számtani közepéhez tartanak. Röviden kifejezve: *a* FOURIER-*sor valamely x folytonossági vagy elsőfajú szakadási helyen $(C, 1)$-szummábilis*[2] *és szummája $f(x)$, ill. $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$*. Ez volt FEJÉR nagy felfedezése, amelyet korlátos függvény esetére már az 1900. évi Comptes-Rendus cikkben közölt. E meglepően egyszerű tétel bebizonyításával FEJÉR felismerte, hogy a FOURIER-sor konvergenciájának kérdésénél sokkal egyszerűbb természetű e sor szummábilitásának kérdése. Tétele alapvető jelentőségre emelkedett, az újabb vizsgálatok egész sorának vált forrásává, a konvergens FOURIER-sor elméletét is átalakította. Ezek alapján FEJÉRt kell a FOURIER-sor modern

[1] A 2π szerint periodikus és a $(0, 2\pi)$ számközben integrálható $f(x)$ függvény FOURIER-sorának azt az

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots$$

trigonometrikus sort nevezzük, amelynek együtthatói

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ezeket a függvény FOURIER-*állandóinak* vagy FOURIER-*együtthatóinak* mondjuk.

[2] Valamely

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_n + \cdots$$

végtelen sort E. CESÀRO után $(C, 1)$-*szummábilisnek* mondunk, ha az $s_0, s_1, \ldots$ részletösszegek számtani közepei véges határértékhez tartanak; ezt a

$$S = \lim \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

határértéket a sor *szummájának* nevezzük.

szummábilitási elmélete megalapítójának tekintenünk, mert bár az ún. POISSON-féle, valamint a RIEMANN-félének nevezett szummáló eljárás lényegében sokkal régebbi keletű, ezeket csak később fogták fel mint ilyeneket s maguk e szerzők még nem alkalmazták tudatosan.

A szóban forgó közepeknek, amelyeket *a* FOURIER-*sor* FEJÉR-*féle közepeinek* szokás nevezni, még az a figyelemre méltó tulajdonságuk van, hogy *korlátos függvény esetén ugyanazon m és M korlátok közé esnek, mint maga a függvény:*

$$m \leqq S_n(x) \leqq M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ez egyszerűen következett a $S_n(x)$ számtani középnek FEJÉR által nyert

$$S_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} f(x+2\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} f(x+2\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta$$

integrálalakjából, amely FEJÉR-*féle integrálban*[3] a híres FEJÉR-*féle mag* $\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 \geqq 0$. Ezt az integrált viszont az

$$\frac{1}{2} + \cos\vartheta + \cdots + \cos(n-1)\vartheta + \cdots$$

cosinus-sor

$$\sigma_{n-1} = \frac{1}{2} + \cos\vartheta + \cdots + \cos(n-1)\vartheta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

részletösszegeinek számtani közepeit kifejező

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{n-1}}{n} = \frac{1}{2n}\,\frac{1-\cos n\vartheta}{1-\cos\vartheta} = \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin n\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2$$

képletből nyerte FEJÉR. E számtani közép nem-negatív volta egész tárgyalásában alapvető szerepet játszik, s ma az analistáktól állandóan használt alaptény.

Fontos kiegészítése az alaptételnek FEJÉR *approximáció-tétele*:

$S_n(x) \to f(x)$ egyenletesen áll fenn minden olyan (a, b) zárt intervallumban, amelynek helyein $f(x)$ kivétel nélkül (az a helyen balról is, a b helyen jobbról is) folytonos.

[3] Ma szokásosabb alakja

$$S_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) + f(x-2t)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Vö. H. LEBESGUE, i. h.[11] 252 és 274.

Ezzel FEJÉR új, egyszerű bebizonyítását adta WEIERSTRASS második approximáció-tételének, amely tétel értelmében 2π szerint periodikus folytonos függvény trigonometrikus polinommal tetszőleges pontossággal egyenletesen megközelíthető. Ezen approximáció-tétele alapján sikerült FEJÉRnek a POISSON-féle integráltétel sorelméleti bizonyítása is, amelyet a matematikusok előtte sokáig hiába kerestek. Éppen ez a probléma terelte FEJÉRt arra az útra (H. A. SCHWARZ berlini előadásai nyomán), amely azután felfedezéséhez vezetett.

Ebben az Annalen-cikkben eddigi eredményein túlmenően már az általános trigonometrikus sorok szummáció-elméletét is megindította FEJÉR. A trigonometrikus sorba való fejtés egyértelműségére vonatkozó CANTOR-tétellel kapcsolatban felvetette a kérdést, hogy ha a trigonometrikus sor szummája mindenütt 0, következik-e ebből, miszerint az együtthatói is mind zérusok? Ezt függőben hagyta, de mintegy előkészítette az e kérdésre adandó feleletet, bebizonyítván RIEMANN ismert tételének következő analogonját:

Legyen

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

olyan trigonometrikus sor, amelyben $\frac{a_n}{n^2}$ *és* $\frac{b_n}{n^2}$ *korlátosak, és képezzük négyszeri tagonkénti integrációval a*

$$F(x)=\frac{a_0x^4}{24}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^4} \tag{2}$$

egyenletesen konvergens sort. Ha az (1) *sor valamely* x *helyen* $(C, 1)$*-szummábilis és szummája* $f(x)$*, akkor ott a* (2) *függvény általánosított negyedik differenciálhányadosa*

$$\lim_{h=+0}\frac{F(x+2h)-4F(x+h)+6F(x)-4F(x-h)+F(x-2h)}{h^4}=f(x).$$ [4]

E tételt vette alapul RIESZ MARCELL a szummábilis trigonometrikus sorokra vonatkozó vizsgálatainál doktori értekezésében[5], ill. későbbi Annalen-cikkében[6], s ugyanitt mint RIEMANN *tételének kész analogonját* idézi FEJÉRnek ezt a téte-

[4] FEJÉR dolgozatában a $h=2t$ jelölést használja.

[5] RIESZ MARCELL, Összegezhető trigonometrikus sorok és összegezhető hatványsorok. *Mat. és Fiz. Lapok,* 19 (1910), 1—56, spec. 3, 9. E dolgozat mint doktori értekezés 1908-ban jelent meg.

[6] M. RIESZ, Über summierbare trigonometrische Reihen. *Math. Annalen,* 71 (1911), 54—75, spec. 55, 59.

lét. E. HILBbel együtt írt enciklopédia-cikkében[7] is megemlíti e tételt egy jegyzetben.

A matematikus világ gyorsan reagált FEJÉR felfedezésére. É. BOREL a divergens sorokról írt könyvének 1901. évi első kiadásában[8] megemlíti röviden jegyzet formájában FEJÉR 1900-ban írt Comptes-Rendus-cikkét, 1903-ban A. HURWITZ[9] már a FEJÉR-féle közepek felhasználásával bizonyítja be a PARSEVAL-tételt korlátos és RIEMANN szerint integrálható függvényekre, H. LEBESGUE[10] pedig 1905. évi Annalen-cikkében többek között lényegesen általánosítja is FEJÉR tételét, s a trigonometrikus sorokról írt és 1906-ban megjelent könyve[11] 50. §-ában külön tárgyalja a FEJÉR-féle szummáló eljárást. P. FATOU[12] ugyanakkor megjelent híres doktori értekezése részben szintén FEJÉR vizsgálataira támaszkodott. Amint FEJÉR elbeszéléséből tudom, É. BOREL nem sokkal az 1904. évi Annalen-cikk megjelenése után levélben értesítette, hogy „vizsgálatait előadta hallgatóinak s meg van győződve, miszerint FEJÉR összes eredményei rövidesen klasszikusakká fognak válni." Ez valóban be is következett. FEJÉR tételével, annak különböző irányú általánosításával és élesítésével nagy irodalom foglalkozott. CH.-J. DE LA VALLÉ POUSSIN[13] 1912-ben analízis-tankönyvének 2. kiadásában már közölte a LEBESGUE-féle általánosítás egyik bizonyítását, és FEJÉR tételének folyományaként is bemutatta a FOURIER-sor konvergenciájára vonatkozó DIRICHLET—JORDAN-tételt, a szummábilis sorokra vonatkozó HARDY—LANDAU-tétel felhasználásával. LEBESGUE tételének egy különösen egyszerű és rövid bizonyítását maga FEJÉR közölte későbbi dolgozatában: *Über die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe,* Nachrichten der Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1925, 13—17. Ez az általánosabb FEJÉR—LEBESGUE-tétel (így szeretném nevezni) a következő:

Ha a 2π szerint periodikus integrálható $f(x)$ függvényre nézve valamely x helyen létezik a

$$\lim_{h=+0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = \lim_{h=+0} \frac{1}{h} \int_{0}^{h} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} dt = f$$

[7] E. HILB—M. RIESZ, Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften etc.*, II C 10, spec. 1218, [116] jegyzet.

[8] É. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, Paris 1901, spec. 88.

[9] A. HURWITZ, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen. *Math. Annalen*, 57 (1903), 425—446, vagy *Mathematische Werke von Adolf Hurwitz I*, Basel 1932, 555—576, spec. §4.

[10] H. LEBESGUE, Recherches sur la convergence des séries de Fourier. *Math. Annalen*, 61 (1905), 251—280, spec. 274.

[11] H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris 1906.

[12] P. FATOU, Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Mathematica*, 30 (1906), 335—400.

[13] *Ch.-J. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale,* 2[e] ed., Louvain 1912, t. II, p. 162—163.

integrálközépérték s ez egyben abszolút közép, vagyis

$$\lim_{h=+0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)-f|\,dt = 0,$$

akkor $f(x)$ FOURIER-*sorának szeleteire*

$$\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} \to f.$$

(Itt az integrálhatóság természetesen a LEBESGUE-féle értelemben veendő.)

1909-ben RIESZ MARCELL[14] egyelőre bizonyítás nélkül közölte FEJÉR tételének azt a nagymérvű általánosítását, hogy 2π periódusú és a $(0, 2\pi)$ számközben LEBESGUE szerint integrálható $f(x)$ függvény FOURIER-sorának bármely $k>0$ rendű CESÀRO-közepei[15] is a $\lim\limits_{h=+0} \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$ értékhez tartanak, hacsak e határérték létezik az x helyen. Ezt azután tőle függetlenül S. CHAPMAN[16] is felfedezte és be is bizonyította. A későbbi bizonyítások közül talán a legegyszerűbb az, amelyet maga RIESZ MARCELL[17] közölt. 1913-ban G. H. HARDY[18] hasonlóképp általánosította a fenti FEJÉR—LEBESGUE tételt. Ugyanabban az évben ő és J. E. LITTLEWOOD[19] lényegesen élesítették FEJÉR

[14] M. RIESZ, Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, *Comptes-Rendus,* 149 (1909), 309—312.

[15] Valamely

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$$

végtelen sor valós $k>-1$ rendszámú CESÀRO-közepei

$$\frac{C_n^{(k)}u_0+C_{n-1}^{(k)}u_1+\cdots+C_0^{(k)}u_n}{C_n^{(k)}} \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

ahol

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = C_0^{(k)}+C_1^{(k)}x+\cdots+C_n^{(k)}x^n+\cdots.$$

Vagyis az n indexnek megfelelő k-adrendű CESÀRO-közép az x^n együtthatója a CAUCHY-féle szorzással nyert $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ sorban, osztva x^n-nek az $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ hatványsorából vett együtthatójával.

[16] S. CHAPMAN, On non-integral orders of summability of series and integrals. *Proceedings of the London Math. Soc.,* (2) 9 (1910 11), 369—409, spec. 390—396.

[17] M. RIESZ, Sur la sommation des séries de Fourier. *Szegedi Acta,* 1 (1922/23), 104—113, spec. 108—113.

[18] G. H. HARDY, On the summability of Fourier's series. *Proceedings of the London Math. Soc.,* (2) 12 (1913), 365—372.

[19] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable. *Comptes-Rendus,* 156 (1913), 1307—1309.

tételét, bebizonyítván a FOURIER-sor *erős szummábilitását* is a $(0, 2\pi)$ intervallumban négyzetével együtt LEBESGUE szerint integrálható 2π periódusú függvény esetére, sőt megmutatták, hogy ha $f(x)$ ilyen függvény, akkor minden olyan x helyen, ahol létezik az

$$s(x) = \lim_{h=+0} \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$$

határérték, a függvény FOURIER-sorának $s_0(x), s_1(x), \ldots$ szeleteire $n \to +\infty$ esetén

$$\frac{[s(x)-s_0(x)]^2+[s(x)-s_1(x)]^2+\cdots+[s(x)-s_{n-1}(x)]^2}{n} \to 0.$$

Ebből a CAUCHY-féle egyenlőtlenség alkalmazásával már következik, hogy egyben

$$\frac{|s(x)-s_0(x)|+|s(x)-s_1(x)|+\cdots+|s(x)-s_{n-1}(x)|}{n} \to 0,$$

ami éppen az erős szummábilitást jelenti. Ez maga után vonja, hogy

$$\frac{[s(x)-s_0(x)]+[s(x)-s_1(x)]+\cdots+[s(x)-s_{n-1}(x)]}{n} \to 0$$

vagyis a részletösszegek számtani közepei $s(x)$-hez tartanak, tehát FEJÉR tétele valóban folyománya ez élesebb HARDY—LITTLEWOOD-tételnek. E két szerző vázlatosan közölt bizonyítását utánuk FEKETE MIHÁLY[20] írta le részletesen s egyben azzal a kiegészítéssel, hogy a fenti limesrelációk egyenletesen állanak fenn minden olyan intervallum belső subintervallumában, amelyben a függvény folytonos. Maga FEJÉR két bizonyítást is közölt a HARDY—LITTLEWOOD-tételre egy későbbi dolgozatában: *Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihen,* Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., 34 (1938), 503—509, spec. 506—509. Különben a tételt T. CARLEMAN[21] és mások tovább általánosították.

A FOURIER-sor tagonkénti differenciálására vonatkozó FEJÉR-féle eredményt, amelyet az említett Annalen-cikkben találunk (Math. Annalen, 58 (1904), 61—62), W. H. YOUNG[22] általánosította, bebizonyítván, hogy $f(x)$ FOURIER-sorának derivált sora $(C, 1)$-szummábilis és szummája $f'(x)$ minden olyan x

[20] FEKETE MIHÁLY, Vizsgálatok a Fourier-sorokról. *Mat. és Term. Értesitő,* 34 (1916), 759—786, spec. 3. §, 774—783.

[21] T. CARLEMAN, A theorem concerning Fourier series, *Proceedings of the London Math. Soc.,* (2) 21 (1923), 483—492.

[22] W. H. YOUNG, On the convergence of the derived series of Fourier series. *Proceedings of the London Math. Soc.,* (2) 17 (1916), 195—236, spec. 219.

helyen, ahol e derivált folytonos. Ezt FEJÉR maga csak szakaszonként folytonos derivált esetére bizonyította be.

2. Hosszabb cikksorozatban foglalkozott FEJÉR a folytonos függvény FOURIER-sorának szingularitásaival. E sorozatot betetőző terjedelmes dolgozata: *Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues,* Annales de l'École Normale Supérieure, 28 (1911), 64—103, amely megelőzően magyarul is megjelent (Mat. és Term. Értesítő, 28 (1910), 550—592). P. DU BOIS—REYMOND és az őt követők komplikáltabb módszereit túlhaladva, FEJÉR *szolgáltatott e cikkeiben először egyszerű példákat olyan folytonos függvényre, amelynek* FOURIER-*sora valamely helyen divergens.* Sőt P. DU BOIS—REYMOND próbálkozása után, amelynek elégtelenségére L. NEDER[23] mutatott rá, *elsőként adott példát olyan folytonos függvényre, amelynek a* FOURIER-*sora mindenütt sűrű helyeken divergens,* vagyis amelynél a „DU BOIS—REYMOND-*féle szingularitás*" mindenütt sűrű helyeken lép fel. Ugyancsak *egyszerű példával szolgált olyan folytonos függvényre, amelynek* FOURIER-*sora a* „LEBESGUE-*féle szingularitást*" *mutatja, vagyis mindenütt konvergens ugyan, de valamely helynek környezetében nem egyenletesen konvergens.* Ezeket az elnevezéseket is ő hozta be. Egyszerű példával igazolta továbbá A. PRINGSHEIM[24] *sejtését, amely szerint létezik olyan 2π periódusú folytonos függvény, amelynek Fourier-sora valamely helyen divergens és egyben a konjugált trigonometrikus sor*[25] *szintén egy 2π szerint periodikus folytonos függvénynek a* FOURIER-*sora.* Ez más szóval azt jelenti, hogy *van olyan hatványsor, amely az egységkörön belül konvergens és egy, a zárt egységkörben folytonos függvénynek a* MACLAURIN-*sora, de a kerület valamely pontjában divergens.* Ezt PRINGSHEIM—FEJÉR-*féle szingularitásnak* lehetne nevezni.

23 L. NEDER, Über stetige Funktionen mit überall dicht divergierender Fourierreihe. *Jahresbericht der deutschen Math.-Ver.,* 30 (1921), 153—155.

24 A. PRINGSHEIM, Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, *Sitzungsberichte der math.-phys. Kl. der K. Bayer. Akad. der Wiss.,* 30 (1900), 98; továbbá ugyanattól, Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, uo. 31 (1901), 513.

25 Valamely

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrikus sor *konjugált sorának* a

$$c+\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n \cos nx + a_n \sin nx)$$

sort (vagy ennek (—1)-szeresét) nevezzük, ahol c tetszőleges valós állandó. Ezek az $(a_0-ib_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n$ hatványsor valós és képzetes részét képezik az egységkör $z=e^{ix}$ pontjaiban, ha $-b_0=c$ jelöléssel élünk.

Egészen új volt FEJÉR példáiban, hogy ő (legalább az idézett cikkben) nem közvetlenül a függvényt definiálta, amelynek FOURIER-sora e szingularitások valamelyikét mutatja, hanem egyenesen azt a FOURIER-féle sort adta meg, amelynél az illető szingularitás fellép. Példáit egy sajátszerűen definiált számsorozat segítségével szerkesztette. E sorozat definíciója a következő: *képezzük az*

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{n-1}, -\frac{1}{n}$$

számcsoportot az

$$n = 2^{1^3}, 2^{2^3}, \ldots, 2^{\nu^3}, \ldots$$

értékekre s a ν-edik csoport számait ν^2-tel mind elosztván, írjuk az így keletkező számcsoportokat rendre egymás mellé; az így előálló számsorozat legyen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots .$$

Mármost pl. *a* DU BOIS—REYMOND-*féle szingularitást mutatja az*

$$\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + \cdots + \alpha_k \cos kx + \cdots$$

cosinus-sor az $x=0$ helyen. Vagyis ez egy folytonos és 2π szerint periodikus függvény FOURIER-sora, amely azonban az $x=0$ helyen divergens. E példa azért is nevezetes, mert *e soron* FEJÉR *verifikálni tudta a* FOURIER-*sor szummábilitására vonatkozó alaptételét* (1. pont). Elődeinek példáin ez még nem sikerült neki. *A* LEBESGUE-*féle szingularitást mutatja az*

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \cdots + \alpha_k \sin kx + \cdots$$

sinus-sor az $x=0$ helyen. Ez tehát ismét egy 2π periódusú folytonos függvény FOURIER-sora, de bár mindenütt konvergens, az $x=0$ hely környezetében nem egyenletesen konvergens.

Ugyanebben a dolgozatban FEJÉR azt a figyelemre méltó tételt is bebizonyította, hogy *ha valamely 2π periódusú és a $0 \leqq x \leqq 2\pi$ számközben korlátos és* RIEMANN *szerint integrálható $f(x)$ függvény Fourier-állandóira*

$$|a_n| \leqq \frac{A}{n}, \qquad |b_n| \leqq \frac{B}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

s M és m jelentik $f(x)$ felső és alsó határát, akkor $f(x)$ Fourier-sorának $s_n(x)$ szeleteire

$$m-(A+B) \leqq s_n(x) \leqq M+(A+B) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ez esetben tehát a FOURIER-sor szeletei egyenletesen korlátosak. FEJÉR kiemelte, hogy *ez a $(0, 2\pi)$ számközben korlátos variációjú függvény* FOURIER-*sorára mindig fennáll,* minthogy ekkor a fenti feltétel teljesül.

E munkáiban is az egyszerű tételek és módszerek mesterének bizonyul, akárcsak a FOURIER-sor szummábilitására vonatkozó dolgozataiban. A szóban forgó példák szerkesztésére szolgáló rendkívül eredeti módszerének nagy sikerét mutatja, hogy azt DE LA VALLÉE POUSSIN általánosabb formában már 1912-ben felvette idézett könyvének 2. kiadásába[26]. E cikksorozatból kiemelkedő másik nagy dolgozata: *Lebesguesche Konstanten und divergente Fourier-reihen*, Journal für die reine und angewandte Math., 138 (1910), 22—53, amely szintén megjelent magyarul (Mat. és Term. Értesítő, 28 (1910), 143—179). A LEBESGUE-*féle állandók*, amelyeket FEJÉR nevezett el így ebben a munkájában, a

$$\varrho_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

számok. Ha $f(x)$ olyan 2π periódusú és a $(0, 2\pi)$ számközben RIEMANN szerint integrálható függvény, amelyre $|f(x)| \leqq 1$, akkor FOURIER-sorának $s_n(x)$ szeletére $|s_n(x)| \leqq \varrho_n$ és az egyenlőség alkalmasan választott függvénynél be is következik. H. LEBESGUE[27] kimutatta, hogy $\varrho_n \to +\infty$ s ennek alapján bizonyította be a divergens, ill. nem egyenletesen konvergens FOURIER-sorral bíró folytonos függvények létezését. FEJÉR a most említett dolgozatban e LEBESGUE-féle állandók egyszerűbb tárgyalása mellett ezeknek aszimptotikus kifejezését is megadta, bebizonyítván, hogy *a* ϱ_n LEBESGUE-*állandó*

$$\varrho_n = \frac{4}{\pi^2}\log n + c_0 + \varepsilon_n, \quad \textit{ahol} \quad \varepsilon_n \to 0$$

és c_0 *bizonyos fix érték.* Ennek alapján ki tudta mutatni, hogy bizonyos indextől kezdve ϱ_n növekedik. Sejtését, amely szerint ez kezdettől fogva fennáll, T. H. GRONWALL[28] bizonyította be, felhasználva FEJÉRnek a fentebb említett 1911. évi dolgozat függelékében közölt azt a rendkívül érdekes eredményét, hogy *a* ϱ_n LEBESGUE-*féle állandó explicit alakja*

$$\varrho_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\,\mathrm{tg}\,\frac{\nu\pi}{2n+1}.$$

[26] CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, i. m. [13], 166—169.

[27] H. LEBESGUE, Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier. *Comptes-Rendus*, 141 (1905), 875—877, továbbá ugyanattól i. m. [11], 84 89, és Sur les intégrales singulières, *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse,* (3) 1 (1909), 25—117, spec. art. 33, 48.

[28] T. H. GRONWALL, Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. *Math. Annalen,* 72 (1912), 244—261; továbbá ugyanattól, On Lebesgue's constants in the theory of Fourier series, *Annals of Math.* (2) 15 (1914), 125—128.

Később SZEGŐ GÁBOR[29] mutatta ki egyszerűbben ϱ_n monoton növekedését, s egyben bebizonyította GRONWALLnak azt a sejtését, hogy a $\varrho_1-\varrho_0, \varrho_2-\varrho_1, \ldots$ pozitív számok sorozata — mai kifejezéssel élve — totálisan monoton.

E cikksorozatot kiegészíti még a konjugált trigonometrikus sorokról írt dolgozata: *Über konjugierte trigonometrische Reihen,* Journal für die reine und angewandte Math., 144 (1914), 48—56, amely ugyancsak megjelent magyarul is (Mat. és Term. Értesítő, 32 (1914), 85—93). Ebben főeredményként megmutatja, hogy *ha az egységkörön belül konvergens hatványsor egy a zárt egységkörben folytonos függvénynek a* MACLAURIN-*sora, akkor a kör kerületén vett valós és képzetes része csak egyszerre lehet egyenletesen konvergens.* Ebből folyólag *a* DU BOIS—REYMOND-*féle szingularitásnak az egyik komponensben való fellépése szükségképpen a* LEBESGUE-*féle szingularitást vonja maga után a másikban, ha az konvergens.* Ezzel FEJÉR kiderítette, miszerint nem volt véletlen, hogy a folytonos függvény FOURIER-sorának szingularitásairól írt fenti dolgozatában a kétféle szingularitást egyazon konjugált sorpár sorain tudta kimutatni. A most szóban forgó dolgozatban bebizonyítja még azt a mélyebben fekvő tételt is, hogy *egyenletesen konvergens trigonometrikus sor konjugált sora majdnem mindenütt konvergens*[30]. Ez az ismert RIESZ—FISCHER-tétel felhasználásával következett a dolgozat eredményeiből annak alapján, hogy LEBESGUE szerint integrálható függvény FOURIER-sora majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummábilis.

3. DIRICHLET klasszikus tételének kiegészítését tartalmazza FEJÉR következő dolgozata: *Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe,* Journal für die reine und angewandte Math., 142 (1913), 165—188 (magyarul Mat. és Term. Értesítő, 31 (1913), 385—415). Itt azt a kérdést veti fel, hogy amíg a DIRICHLET-féle feltételeknek eleget tevő függvény FOURIER-sora valamely x_0 szakadási helyen az $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ számtani középet állítja elő, mint a részletösszegek határértékét, hogyan lehet egyszerű határátmenettel a FOURIER-sorból az $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0)$ értékeket különkülön meghatározni? Arra a csodálnivaló eredményre jut, hogy *az*

$$\int_z^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0$$

[29] G. SZEGŐ, Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. *Math. Zeitschrift,* 9 (1921), 163—166.

[30] Vagyis a divergencia-pontok halmazának LEBESGUE-féle mértéke 0. Ez utóbbi azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon>0$ mellett lefedhető a halmaz olyan intervallum-sorozattal, amelynek összhosszúsága $<\varepsilon$.

transzcendens egyenlet valamelyik pozitív gyökét g-vel jelölve, a FOURIER-*sor* $s_n(x)$ *szeletére* $n \to +\infty$ *esetén*

$$s_n\left(x_0+\frac{g}{n}\right) \to f(x_0+0), \quad s_n\left(x_0-\frac{g}{n}\right) \to f(x_0-0),$$

hacsak $f(x)$ *eleget tesz a* DIRICHLET-*féle feltételeknek és az* x_0 *helyen szakadása van.* Továbbá, hogy *ugyanazon feltételek mellett*

$$s_n\left(x_0+\frac{\beta}{n^\alpha}\right) \to f(x_0+0), \quad s_n\left(x_0-\frac{\beta}{n^\alpha}\right) \to f(x_0-0)$$

valahányszor $0<\alpha<1$ *és* $\beta>0$.

Később CSILLAG PÁL[31] bebizonyította, más módszerrel pedig SIDON SIMON[32], hogy általánosabban a $(0, 2\pi)$ számközben korlátos variációjú $f(x)$ függvény esetén

$$\lim_{n=+\infty} \pi \frac{\sum_{k=1}^{n} k(b_k \cos kx - a_k \sin kx)}{n} = f(x+0)-f(x-0),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k=1,2,3,\ldots),$$

vagyis a függvény FOURIER-állandói. Ezt maga FEJÉR csak szűkebb feltételek mellett mutatta ki. E „szakadás" ismeretében a jobb- és baloldali határérték külön-külön is meghatározható, minthogy számtani közepüket a DIRICHLET—JORDAN-tétel megadja. A FEJÉR által felvetett kérdésre még sokkal általánosabb feltételek mellett azután LUKÁCS FERENC[33] adott igen tetszetős választ, bebizonyítván, hogy ha $f(x)$ a $(0, 2\pi)$ számközben LEBESGUE szerint integrálható 2π periódusú függvény és az x helyen létezik a

$$D_x = \lim_{h=+0} [f(x+h)-f(x-h)]$$

határérték, akkor

$$\frac{D_x}{\pi} = \lim_{n=+\infty} \frac{s_n^*(x)}{\log n},$$

31 CSILLAG PÁL, Korlátos ingadozású függvények Fourier-féle állandóiról. *Mat. és Fiz. Lapok*, 27 (1918), 301—308.

32 SIDON SIMON, A függvény ugrásának meghatározása a függvény Fourier-féle sorából. *Mat. és Fiz. Lapok*, 27 (1918), 309—311.

33 F. LUKÁCS, Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe. *Journal für die reine und angewandte Math.*, 150 (1920), 107—112.

ahol $s_n^*(x)$ az $f(x)$ FOURIER-sorához tartozó $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ konjugált sor n-edik szelete.

4. FEJÉR 1908-ban a LAPLACE-féle sorok elméletében is új utat tört, a szummábilitást illető vizsgálatait a FOURIER-sorokról ezekre a sorokra vitte át. Az 1908. február 3-i füzetben megjelent Comptes-Rendus cikke után, ugyanezen év április 6-án került bemutatásra az Akadémiában részletes dolgozata: *A Laplace-féle sorokról,* Mat. és Term. Ért., 26 (1908), 323—373, amelynek német átdolgozása: *Über die Laplacesche Reihe,* Math. Annalen, 67 (1909), 76—109. E munkája szintén remekmű, méltó társa az 1904. évi Annalen-cikknek. Lényegét annak a felismerése képezi, hogy a LEGENDRE-polinomokkal[34] képezett

$$(P) \qquad P_0(\cos\gamma) + 3P_1(\cos\gamma) + \cdots + (2n+1)P_n(\cos\gamma) + \cdots$$

sor nem egyéb, mint a

$$(L) \qquad P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma) + \cdots$$

és

$$(C) \qquad 2\left(\frac{1}{2} + \cos\gamma + \cdots + \cos n\gamma + \cdots\right)$$

sorok CAUCHY-féle szorzata, továbbá e két sor közül a (L) sornak a 0-adrendű összegei (a közönséges részletösszegei), a (C) sornak viszont az 1-edrendű összegei (a részletösszegek összegei) nem-negatívok. Ez utóbbi elemi tény, mint tudjuk, már a FOURIER-sorra vonatkozó vizsgálataiban is alapvető szerepet játszott (1. pont, 107. old.); az előbbit a FEJÉR-*féle*

$$P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi} \frac{\left(\sin(n+1)\frac{t}{2}\right)^2}{\sin\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos\gamma - \cos t)}}\,dt$$

[34] A LEGENDRE-polinomok az

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + P_1(x)z + \cdots + P_n(x)z^n + \cdots$$

hatványsorban szereplő együtthatók, amelyeknek explicit alakja

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2n-1)}{n!}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right\}.$$

A 0-adfokú LEGENDRE-polinom $P_0(x) \equiv 1$.

integrál-alak mutatta, amelyet ő a LEGENDRE-polinomok MEHLER-féle integrálalakjából nyert. E felismerés alapján már be tudta bizonyítani, hogy *a (P) sor másodrendű* HÖLDER-*féle közepei (a részletösszegek közepeinek a számtani közepei) nem-negatívok és a* $0<\gamma \leqq \pi$ *intervallumban 0-hoz tartanak, mégpedig ennek minden* (ε, π) *részintervallumában egyenletesen.* Ennek birtokában azután könnyen volt bebizonyítható a dolgozat főeredménye:

A S egységgömbön korlátos és RIEMANN *szerint integrálható* $f(\vartheta, \lambda)$ *függvény* LAPLACE-*sorának*[35] *másodrendű* HÖLDER-*féle közepei minden folytonossági helyen az* $f(\vartheta, \lambda)$ *függvényértékhez tartanak. Ha* $f(\vartheta, \lambda)$ *az egész S gömbön folytonos, akkor e közepek egyenletesen tartanak a függvényhez. Ha pedig* $f(\vartheta, \lambda)$ *a gömbnek csak valamely T részén folytonos, akkor az egyenletes konvergencia minden olyan* T^* *résztartományban fennáll, amely a gömbfelületen T belsejébe esik.*

[35] A S egységgömbön a ϑ sarktávolság és λ földrajzi hosszúság függvényeként megadott $f(\vartheta, \lambda)$ függvény LAPLACE-sora a neki formálisan megfelelő

$$f(\vartheta, \lambda) \sim \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} f(\vartheta', \lambda')\, dS' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos\gamma)\, dS'$$

sor, ahol γ a változó (ϑ', λ') gömbi pontnak a (ϑ, λ)-tól való gömbi távolsága, tehát

$$\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\lambda - \lambda'),$$

és dS' az egységgömb felületeleme. Ebben az

$$f(\vartheta, \lambda) \sim Y_0(\vartheta, \lambda) + Y_1(\vartheta, \lambda) + \cdots + Y_n(\vartheta, \lambda) + \cdots$$

kétváltozós függvénysorban a tagok LAPLACE-*féle gömbfüggvények,* vagyis $Y_n(\vartheta, \lambda)$ az

$$x = \sin\vartheta \cos\lambda, \quad y = \sin\vartheta \sin\lambda, \quad z = \cos\vartheta$$

derékszögű koordinátákban n-edfokú homogén és a

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_n}{\partial z^2} = 0$$

térbeli LAPLACE-*egyenletet* kielégítő háromváltozós polinom, amilyen maga $P_n(\cos\gamma)$ rögzített (ϑ', λ') mellett. E tagok előállítása formálisan történik, nevezetesen $P_n(\cos\gamma)$-val való végigszorzással s azután ϑ, λ szerint való tagonkénti integrálással a gömbfüggvények ortogonalitási tulajdonsága alapján, amelynek értelmében

$$\iint\limits_{(S)} Y_n(\vartheta, \lambda)\, P_\nu(\cos\gamma)\, dS = \begin{cases} 0, & \text{ha } \nu \neq n \\ \dfrac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta', \lambda'), & \text{ha } \nu = n. \end{cases}$$

Ha végül ϑ', λ' helyébe rendre ϑ, λ tétetik és viszont, ily módon előáll

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos\gamma)\, dS'.$$

A szóban forgó másodrendű közepeknek, amelyeket *a* LAPLACE-*sor* FEJÉR-*féle közepeinek* nevezhetnénk, még az a figyelemre méltó tulajdonságuk van, hogy *ugyanazon m és M korlátok közé esnek, mint maga az $f(\vartheta, \lambda)$ függvény*, vagyis e tekintetben úgy viselkednek, mint a FOURIER-sor FEJÉR-féle közepei. Nem-korlátos függvény esetén a LAPLACE-sornál a szummábilitás szempontjából is kedvezőtlenebb a helyzet, mint a FOURIER-sornál. Amíg ugyanis az utóbbinál FEJÉR tétele nem-korlátos függvényre is igaz, hacsak a függvény RIEMANN szerint integrálható, addig a LAPLACE-sornál a fenti tétel érvényességéhez fel kell tennünk a függvény abszolút integrálhatóságát.

Ez a dolgozat is, éppen úgy, mint a FOURIER-sor szummábilitására vonatkozó, a vizsgálatok egész sorát indította meg, a LAPLACE-sor újabb irodalmának kiindulópontja lett. Ez részben talán annak is volt köszönhető, hogy dolgozata végén FEJÉR több kérdést vetett fel, amelyek még jobban felkeltették a matematikusok érdeklődését.

HAAR ALFRÉD[36] konstruált olyan folytonos függvényt, amelynek LEGENDRE-sora[37] valamely helyen divergens, s ezzel igenlő választ adott FEJÉRnek arra az első kérdésére, hogy létezik-e olyan, az egész egységgömbön folytonos függvény, amelynek LAPLACE-sora valahol divergens?

FEJÉRnek arra a második kérdésére, hogy van-e olyan, az egységgömbön folytonos függvény, amelynél a LAPLACE-sor elsőrendű közepei valahol divergálnak, véglegesen T. H. GRONWALL[38] adta meg a tagadó választ. Neveze-

[36] A. HAAR, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Math. Annalen*, 69 (1910), 331—371, spec. §3, 345—348. E dolgozat mint doktori értékezés 1909-ben jelent meg Göttingenben.

[37] A LEGENDRE-sor a LAPLACE-sornak [35] az a speciális esete, midőn a függvény csak a ϑ sarktávolságtól függ, mondjuk $f(\vartheta, \lambda) = \varphi(\cos\vartheta)$. Ez esetben az ismert

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, d\lambda' = 2\pi P_n(\cos\vartheta)\, P_n(\cos\vartheta')$$

reláció alapján a LAPLACE-sor

$$\varphi(\cos\vartheta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \varphi(\cos\vartheta') P_n(\cos\vartheta') \sin\vartheta'\, d\vartheta'\right) P_n(\cos\vartheta),$$

amely pedig az $x = \cos\vartheta$ helyettesítéssel a

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(x) P_n(x)\, dx\right) P_n(x)$$

sorba megy át. Ezt szokás a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben integrálható $\varphi(x)$ függvény LEGENDRE-sorának nevezni.

[38] T. H. GRONWALL, Über die Laplacesche Reihe. *Math. Annalen*, 74 (1913), 213—270. spec. 251—254.

tesen bebizonyította, hogy az egységgömbön abszolút integrálható függvény LAPLACE-sorának már az elsőrendű közepei is minden folytonossági helyen a függvényhez konvergálnak, s az egész gömbön folytonos függvény esetén ugyanott egyenletes konvergencia áll fenn. LUKÁCS FERENC[39] doktori disszertációjában, amely a szerző halála után némi rövidítéssel és módosítással németül is megjelent[40] SZEGŐ GÁBOR fordításában, egyszerű és rövid új bizonyítását adta GRONWALL tételének, s ugyanott új példával szolgált olyan folytonos függvényre, amelynek LAPLACE-sora valamely helyen divergens. Még egyszerűbben bizonyította be GRONWALL tételét maga FEJÉR egy későbbi dolgozatában: *Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch Arithmetische Mittel*, Math. Zeitschrift, 24 (1925) 267—284. Ugyanitt általánosította GRONWALL tételét LEBESGUE szellemében, mégpedig nemcsak az elsőrendű közepekre, hanem általánosabban a $k > \frac{1}{2}$ rendű közepekre vonatkozólag is. E dolgozatát kiegészíti: *Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome*, uo. 285—298, ahol is a felhasznált egyenlőtlenségeknek elemi, komplex integrálást nem igénylő bebizonyítását adja.

Ezekkel kapcsolatban említem egyik igen fontos dolgozatát: *Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen*, Rendiconti di Palermo, 38 (1914), 79—97 (magyarul Mat. és Term. Értesítő, 32 (1914), 462—486). Ebben többek között más, elemibb bizonyítását adta annak az alapvető ténynek, hogy *a fenti (L) sor részletösszegei nem-negatívok.* Itt nem használta fel a MEHLER-féle integrált, hanem a FOURIER-sor elsőrendű közepeire vonatkozó fenti egyenlőtlenségére (107. old.) támaszkodott. Ismét más elemi bizonyítással szolgált egy későbbi cikkében: *Über Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten*, Szegedi Acta, 2 (1925), 75—86, spec. 83—84. Ily módon a szóban forgó összegek nem-negatív voltára három egyszerű bizonyítást is publikált. Különben utóbbi cikkének egyik jegyzetében (i. h. 84) a MEHLER-féle integrálnak igen egyszerű előállítását adta, s ezzel is hozzájárult a LAPLACE-sorra vonatkozó vizsgálatainak egyszerűbbé tételéhez.

5. Eddigi dolgozatai mellett, amelyekben új utakat is tört, ugyancsak az egyszerű tételek és módszerek mestereként lép elénk az algebrai egyenletek gyökeinek helyzetével foglalkozó cikkeiben, amelyek közül a legfőbb: *Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung*, Math. Annalen, 65 (1908), 413—423 (magyarul Mat. és Fiz. Lapok, 17 (1908),

[39] LUKÁCS FERENC, A Laplace-sorról. *Mat. és Fiz. Lapok*, 23 (1914), 356—357.
[40] F. LUKÁCS, Über die Laplacesche Reihe. *Math. Zeitschrift*, 14 (1922), 250—262.

308—324). Ebben E. LANDAU[41] egy kérdésével kapcsolatban FEJÉR igen eredeti gondolatmenettel, amely azt a GAUSStól eredő tételt használja fel, hogy valamely $f(z)$ polinom gyökeit tartalmazó legkisebb konvex sokszög egyben az $f'(z)$ összes gyökeit is tartalmazza, bebizonyítja a következő tételt:

Valamely $(k+1)$*-tagú*

$$a_0+a_1z^{\nu_1}+a_2z^{\nu_2}+\cdots+a_kz^{\nu_k}=0$$
$$(1\leqq\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_k;\quad a_0\neq 0,\ a_1\neq 0)$$

egyenletnek mindig van gyöke a

$$|z|\leqq\left[\frac{\nu_2\nu_3\ldots\nu_k}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_3-\nu_1)\cdots(\nu_k-\nu_1)}\right]^{\frac{1}{\nu_1}}\cdot\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}$$

körben.

Ebben az az érdekes, hogy a megadott kör sugara független az $a_2, a_3, \ldots, a_k$ együtthatóktól. E tételből már folyik, hogy *a szóban forgó egyenletnek van gyöke a*

$$|z|\leqq\binom{\nu_1+k-1}{k-1}^{\frac{1}{\nu_1}}\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}$$

körben. Ennek sugara már csak a ν_1, k, a_0, a_1 értékektől függ. Ez utóbbi tételt O. PERRON[42] felvette algebrai tankönyvének II. kötetébe. A $\nu_1=1$ esetben a tétel azt mondja, hogy *minden* $(k+1)$*-tagú*

$$a_0+a_1z+a_2z^{\nu_2}+\cdots+a_kz^{\nu_k}=0$$
$$(1<\nu_2<\cdots<\nu_k;\quad a_0\neq 0,\ a_1\neq 0)$$

egyenletnek van gyöke a

$$|z|\leqq k\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$$

körben. Kisebb sugarú körben ez általánosságban nem érvényes. E tételt $k=2$ esetére (trinom egyenletre) már E. LANDAU[43] bebizonyította, a $k=3$ esetben azonban csak nagyobb sugarú kört tudott megadni a gyök számára.[44]

E dolgozatban FEJÉR érdekes függvénytani következtetésre is jut, nevezetesen a fenti első tétel alkalmazásával kimutatja a következőt:

[41] E. LANDAU, Sur quelques généralisations du theorème de M. Picard. *Annales de l'École Normale Supérieure,* 24 (1907), 179—201.

[42] O. PERRON, *Algebra I—II,* Berlin und Leipzig 1927, spec. II. §6, Satz 35.

[43] E. LANDAU, Über den Picardschen Satz. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich,* Jahrg. 51 (1906), 252—318, spec. §16.

[44] E. LANDAU, i. h. [41].

ha valemely mindenütt konvergens

$$a_0 + a_1 z^{\nu_1} + a_2 z^{\nu_2} + \cdots + a_k z^{\nu_k} + \cdots$$

$$(a_1 \neq 0, \quad 1 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k < \cdots)$$

hatványsor hézagai olyanok, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$ *sor konvergens, akkor e hatványsor nem bír* PICARD-*féle kivételes értékkel, vagyis minden komplex értéket felvesz.* Ezzel az eredménnyel elsőként létesített kapcsolatot a hézagos hatványsorok elmélete és a PICARD-féle problémakör között. Ebben az irányban később lényegesen tovább jutott M. BIERNACKI,[45] majd pedig PÓLYA GYÖRGY.[46]

6. A komplex függvénytan területén a korlátos hatványsorok elmélete is fontos eredményeket köszön FEJÉRnek. Abból a már említett 1910. évi eredményéből (112. old.), amely szerint a zárt egységkörben folytonos és azon belül reguláris függvény MACLAURIN-sora a kerület valamely pontjában divergens lehet, mégpedig úgy, hogy a részletösszegei nem korlátosak, nyilván következik, miszerint *egy az egységkör belsejében korlátos hatványsor szeleteinek nem kell e körön belül korlátosoknak lenniök.* Erre valamivel később más bizonyítást is adott egy LANDAUhoz intézett levélben, aki ez utóbbit vette fel a függvénytan újabb eredményeiről írt könyvébe.[47] E. LANDAU[48] azután megmutatta, hogy ha az

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots \qquad (|z| < 1)$$

hatványsorra $|f(z)| \leqq 1$, akkor az n indexű $s_n(z)$ szelet abszolút értékére $|s_n(z)| \leqq G_n$, ahol

$$G_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \; 2\nu} \right)^2$$

s az egyenlőség alkalmasan választott $f(z)$ függvénynél be is következik. FEJÉRnek a már említett 1914. évi palermói dolgozatában (120. old.) foglalt egyik eredménye szerint sokkal egyszerűbb a helyzet a részletösszegek számtani közepeinél, nevezetesen

[45] M. BIERNACKI, Sur les équations algébriques contenant des paramètres. *Thèse,* Paris 1928.

[46] G. PÓLYA, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Zeitschrift,* 29 (1929), 549—640, spec. 639.

[47] E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.* 2. Aufl., Berlin 1929, §3, 29—31.

[48] E. LANDAU, Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (Zweite Mitteilung). *Archiv der Math. und Phys.,* (3) 21 (1913), 250—255.

az $|f(z)| \leqq 1$ $(|z|<1)$ *esetben a hatványsor szeleteinek számtani középeire is*

$$\left|\frac{s_0(z)+s_1(z)+\cdots+s_n(z)}{n+1}\right| \leqq 1 \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Ebben az irányban tovább jutott I. SCHUR,[49] aki kimutatta, hogy ugyanez a szeletek abszolút értékére, sőt azok négyzetére is érvényes. SZÁSZ OTTÓ[50] pedig oly általános tételt bizonyított be, amelynek mind ez a FEJÉR-féle, mind a fenti LANDAU-féle egyenlőtlenség speciális esete. Maga FEJÉR a már szintén említett 1925. évi szegedi cikkében (120. old.) megmutatta, hogy

az $|f(z)| \leqq 1$ $(|z|<1)$ *feltételnek eleget tevő hatványsor szeleteire*

$$|s_n(z)| \leqq 1, \quad \text{ha} \quad |z| \leqq \frac{1}{2},$$

de ez valamely $|z| \leqq \frac{1}{2}+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ *körben általánosságban nem érvényes.*

Erre a tételre E. LANDAU[51] szolgált még egyszerűbb bizonyítással, felhasználva a számtani közepekre vonatkozó előbbi FEJÉR-féle egyenlőtlenséget. Egyben megjegyezte, hogy FEJÉR e tétele speciális esete W. ROGOSINSKI[52] egy valamivel előbbi tételének. Érdekes megállapítást közölt hamarosan maga FEJÉR egy fontos dolgozatában: *Über die Koeffizientensumme einer beschränkten und schlichten Potenzreihe,* Acta Mathematica, 49 (1926), 183—190. Ebben megmutatja, miszerint

van olyan K pozitív állandó, hogy az egységkör belsejében egyrétű és az $|f(z)| \leqq 1$ *feltételnek megfelelő hatványsor szeleteire* $|s_n(z)| \leqq K$ $(|z|<1)$.

Ez állandóra FEJÉR az $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ értéket kapta, amely azonban nem a legkisebb ilyen korlát. Tovább jutott SZEGŐ GÁBOR,[53] akinek sikerült valamivel kisebb állandót kapnia, s ugyanő $n=2$ esetére meghatározta az $|s_2(z)|$ felső határát a szóban forgó hatványsorok osztályánál.

[49] I. SCHUR, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Zweite Mitteilung). *Journal für die reine und angewandte Math.,* 148 (1918), 122—145, spec. § 11.

[50] O. SZÁSZ, Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe. *Math. Zeitschrift,* 1 (1918), 163—183, spec. § 1. Satz I.

[51] E. LANDAU, Über einen Fejérschen Satz. *Nachrichten von der Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.—Phys. Kl.,* Jahrg. 1925, 22.

[52] W. ROGOSINSKI, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten. *Math. Zeitschrift,* 17 (1923), 260—276, spec. 271, Satz II, 5.

[53] G. SZEGŐ, Zur Theorie der schlichten Abbildungen. *Math. Annalen,* 100 (1928), 188—211, spec. 204—211.

7. Meglepően egyszerű tételeket bizonyított be FEJÉR a hatványsornak a konvergencia-kör kerületén való viselkedésére vonatkozólag. E tárgykör kiterjedt irodalmát nagymértékben gazdagító dolgozata: *Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene,* Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, 42—53. Ennek alapját a híres HARDY—LANDAU tétellel rokon következő tétele képezi:

ha a komplex tagú $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *sor az aritmetikai közepek módszerével szummálható és* $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n|^2$ *konvergens, akkor e* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *sor is konvergens.*

A tétel bizonyításából az is látható, hogy *ha a sor tagjai bizonyos intervallumban adott* $u_n(x)$ *függvények, akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *egyenletes szummábilitása és* $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n(x)|^2$ *egyenletes konvergenciája maga után vonja a* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *sor egyenletes konvergenciáját.* Ennek és a 2π periódusú folytonos függvény FOURIER-sora egyenletes szummábilitására vonatkozó tételének felhasználásával FEJÉR bebizonyítja a következő tételt:

ha az egységkörön belül konvergens hatványsor ugyanott egyrétű s az előállított függvény a zárt $|z| \leqq 1$ *körlapon folytonos, akkor a hatványsor a kerületen egyenletesen konvergens.*

E tételnek nyomban érdekes alkalmazását adta PÁL GYULA[54] a FOURIER-sorok elméletében. Tételét később H. BOHR[55] élesítette, ugyancsak az előbbi tétel felhasználásával, bebizonyítván, hogy valamely 2π periódusú folytonos $f(x)$ függvényhez mindig található olyan $g(u)$, amely a $0 \leqq u \leqq 2\pi$ számközben folyvást növekedik $g(0)=0$ értéktől a $g(2\pi)=2\pi$ értékig, s amely mellett a $h(u)=f(g(u))$ függvény FOURIER-sora az egész $0 \leqq u \leqq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens. PÁL GYULA az egyenletes konvergenciát csak belső subintervallumra tudta biztosítani. FEJÉR tételét E. LANDAU[56] általánosította.

A fenti tételből OSGOOD sejtésképp kimondott s utána CARATHÉODORY, KOEBE és mások által bebizonyított tétele alapján, amely a határpontok megfelelkezésére vonatkozik,[57] FEJÉR levonja dolgozatában azt a szép következtetést, hogy *ha a hatványsor a konvergencia-kör belsejét* JORDAN-*görbe belsejére képezi le egyrétűen, akkor a kör kerületén egyenletesen konvergens.*

[54] J. PÁL, Sur les transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier. *Comptes-Rendus,* 158 (1914), 101.

[55] H. BOHR, Über einen Satz von J. Pál, *Szegedi Acta,* 7 (1934—35), 129—135.

[56] E. LANDAU, i. h.[47] § 13, 65—67.

[57] Vö. *Encyklopädie der Math. Wiss. etc.,* II B, 56.

A folytonos függvény FOURIER-sora szingularitásainak tárgyalásánál követett módszerét a hatványsorra kiterjesztő dolgozata: *Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist,* Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. der Wiss., Math.-phys. Kl., Jahrg. 1917, 33—50. Ebben FEJÉR *elsőként állított elő olyan hatványsort, amely a konvergencia-kör kerületén mindenütt konvergens, de annak valamely pontja környezetében a kerületen nem egyenletesen konvergens, s amelynél az előállított függvény a zárt körlapon folytonos.* Ez megfelel a folytonos függvény FOURIER-sora LEBESGUE-féle szingularitásának [a DU BOIS-REYMOND-félének megfelelő szingularitás létezését a hatványsornál még 1910-ben kimutatta, mint már láttuk (112. old.)]. Amint cikkének egy jegyzetében elmondja, H. BOHR 1910-ben felvetette előtte olyan hatványsor keresésének problémáját, amely a konvergencia-kör kerületén egyenletesen konvergens (tehát a zárt körben folytonos függvényt állít elő), de a kerület egyetlen pontjában sem abszolút konvergens. Ennek nyomán FEJÉR sejtése az volt, hogy a

$$\sqrt{1-z}\,e^{\frac{1}{z-1}} = e_0 + e_1 z + \cdots + e_n z^n + \cdots$$

hatványsor (amelynek konvergencia-köre az egységkör) ilyen tulajdonságú. E FEJÉR-féle sejtést RIESZ MARCELL nyomban igazolta is, olvashatjuk tovább a jegyzetben. *Ez volt az első példa olyan, a zárt egységkörben folytonos s azon belül reguláris függvényre, amelynek* MACLAURIN-*sora a kerületen egyenletesen konvergens, de nem abszolút konvergens a kerület egyetlen pontjában sem,* amint H. BOHR kívánta. Később ugyancsak RIESZ MARCELL és G. H. HARDY[58] konstruáltak ilyen hatványsorokat. Maga FEJÉR is ad további példát ilyen hatványsorra ebben a dolgozatában.

A fenti hatványsor speciális esete az

$$(F) \qquad \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(1-z)^{\varrho}} = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

hatványsornak, ahol ϱ valamely valós szám s $(1-z)^{\varrho}$ a hatvány főértékét jelenti a $|z|<1$ körben, vagyis

$$(1-z)^{\varrho} = e^{\varrho \log^{*}(1-z)} = e^{-\varrho\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots\right)}.$$

E hatványsorral foglalkozik FEJÉR akadémiai székfoglaló értekezésében, amelyet 1908-ban levelező taggá történt megválasztása után mutatott be: *Asymptotikus értékek meghatározásáról,* Mat. és Term. Értesítő 27 (1909), 1—33. Ennek csak rövid francia kivonata jelent meg (Comptes-Rendus, 1908. nov.

[58] G. H. HARDY, A Theorem concerning Taylor's series. *Quarterly Journal of Math.*, 44 (1913), 147—160, spec. 157—160; továbbá E. LANDAU, i. h.[47] § 14, 68—69.

30.), s ennek ellenére nagy hatást váltott ki külföldön. Ez talán annak is volt az eredménye, hogy később O. PERRON[59] új bizonyítással szolgált FEJÉR itteni tételére, majd általánosította is azt.[60] E tétel a következő:

az (F) hatványsorban bármely valós ϱ mellett

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi e}} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}-\frac{\varrho}{2}}} \left\{ \sin\left[2\sqrt{n} + \left(\frac{3}{4} - \frac{\varrho}{2}\right)\pi\right] + \frac{\lambda(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \right\},$$

ahol

$$|\lambda(n)| < G (= \text{const})$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ez lényegileg a LAGUERRE-polinomokra[61] vonatkozó aszimptotikus formula. A módszer, amelyet FEJÉR alkalmazott, lényegében már B. RIEMANN[62] habilitációs értekezésében szerepel, de neki azt teljesen szilárd alapokra kellett helyeznie, hogy egészen szigorúan bizonyíthassa be ezt a tételét.

8. Ugyancsak komplex függvénytani tárgyú kiemelkedő dolgozata: *Interpolation und konforme Abbildung*, Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918, 319—331. Ebben egy lényegileg

[59] O. PERRON, Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe. *Archiv der Math. und Phys.*, (3) 22 (1914), 329—340.

[60] O. PERRON, Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenzten Wachstum eines Parameters. *Journal für die reine und angewandte Math.*, 151 (1921), 63—78, spec. 78.

[61] Az $\alpha > -1$ parameternek megfelelő $L_n^{(\alpha)}(x)$ LAGUERRE-polinomok generátor-sora

$$\frac{e^{\frac{xz}{z-1}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x)z + \cdots + L_n^{(\alpha)}(x)z^n + \cdots.$$

Explicit alakban

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}.$$

Az aszimptotikus formula a LANDAU-féle O szimbólumot használva

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi}\, x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}} \frac{\cos\left[2\sqrt{nx} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi\right]}{n^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}} + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) \qquad (x > 0),$$

ahol is tehát a $O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right)$ maradéktag $n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}$-del osztva korlátos, midőn $n \to +\infty$.

[62] B. RIEMANN, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. *Bernhard Riemann's gesammelte math. Werke etc.*, Leipzig 1876, 213—250, spec. § 13, 246—248.

C. RUNGE[63] által felvetett problémának adja klasszikusan szép megoldását. E probléma a következő:

Legyen C megadott JORDAN-görbe az x komplex változó síkjában. Vegyünk fel a görbén valamely pontcsoport-sorozatot, amelyben az n-edik pontcsoport n pontból áll: $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ha az $f(x)$ függvény a C görbén értelmezve van, ehhez és az n-edik pontcsoporthoz meghatározhatjuk azt az egyetlen legföljebb $(n-1)$-edfokú $L_n(x)$ racionális egész függvényt (LAGRANGE-féle interpolációs polinomot), amelyre

$$L_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)..$$

Kérdés, választható-e a C görbén a pontcsoport-sorozat egyszer s mindenkorra úgy, hogy valahányszor $f(x)$ a C görbén belül és azon rajta reguláris függvény, e zárt tartományban $L_n(x) \to f(x)$ egyenletesen fennálljon? E feladatot a kör speciális esetében C. RUNGE[64] meg is oldotta, n-edik pontcsoportnak a körbe beírt szabályos n-szög szögpontjait választván. FEJÉR valóban zseniális módon általánosította a megoldást tetszőleges C JORDAN-görbe esetére, nevezetesen bebizonyította a következő tételt:

Legyenek a C görbén az $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ pontok úgy választva, hogy C külsejének valamely K kör külsejére való és ∞-t a ∞-be átvivő egyrétű konformis leképezésénél e pontok a határpontok megfelelkezése folytán a K körbe beírt szabályos n-szög szögpontjaiba menjenek át. Akkor bármely, a C görbén belül és azon rajta reguláris $f(x)$ függvény esetén, az n-edik pontcsoport és ez $f(x)$ által meghatározott $L_n(x)$ LAGRANGE-féle interpolációs polinomra e zárt tartományban $L_n(x) \to f(x)$ egyenletesen áll fenn.

Ez a dolgozata is nagy hatást váltott ki az irodalomban. Erre nézve utalok J. L. WALSH[65] könyvére. Érdemes kiemelni, hogy később FEKETE MIHÁLY[66] a konformis leképezés felhasználása nélkül, teljesen elemi úton határozott meg minden JORDAN-görbén a kívánt tulajdonsággal bíró pontcsoport-sorozatot. KALMÁR LÁSZLÓ[67] viszont doktori értekezésében a konformis leképezés segédeszközét használva, FEJÉR e dolgozata nyomán megadta a szükséges és elegendő feltételét is annak, hogy valamely pontcsoport-sorozat az adott görbén a szóban forgó tulajdonságú legyen, s ezzel egyenesen meg-

[63] C. RUNGE, *Theorie und Praxis der Reihen*, Leipzig 1904, spec. 137.

[64] C. RUNGE, i. h. [63], 136—137.

[65] J. L. WALSH, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.* American Math. Soc. Colloquium Publications, 20 (1935).

[66] M. FEKETE, Über Interpolation. *Zeitschrift für angewandte Math. und Mech.*, 6 (1926), 410—413.

[67] KALMÁR LÁSZLÓ, Az interpolációról. *Mat. és Fiz. Lapok*, 33 (1926), 120—149.

határozta a keresett pontcsoport-sorozatok összességét. E feltétel az, hogy a C görbén választott pontcsoport-sorozatnak az említett konformis leképezésnél a K körön „egyenletes eloszlású" pontcsoport-sorozat feleljen meg, vagyis ha a kör valamely σ hosszúságú ívére ν_n számú pont esik az n-edik pontcsoportból, akkor $n \to +\infty$ esetén mindig $\frac{\nu_n}{n} \to \frac{\sigma}{2r\pi}$ álljon fenn, ahol r a kör sugara.

9. A LAPLACE-sorról írt újabb dolgozatával kapcsolatban már említett *„Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome"* c. munkájában (120. old.) FEJÉR új utat is nyitott, amennyiben messzemenően általánosította a LEGENDRE-polinomok fogalmát és megkezdte ez általánosabb polinomok elméletét. Ez az általánosítás következőképp történt. Legyen (esetleg csak formálisan)

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots$$

valós együtthatós hatványsor. A z komplex változó helyébe először $re^{i\vartheta}$, azután $re^{-i\vartheta}$ tétetvén, a két hatványsor CAUCHY-féle szorzata

$$F(re^{i\vartheta})F(re^{-i\vartheta}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)r^n,$$

ahol

$$P_n(\cos\vartheta) = 2\alpha_0\alpha_n \cos n\vartheta + 2\alpha_1\alpha_{n-1} \cos(n-2)\vartheta + \cdots +$$

$$+ \begin{cases} 2\alpha_\nu\alpha_{\nu+1} \cos\vartheta, & \text{ha } n = 2\nu + 1 \\ \alpha_\nu^2, & \text{ha } n = 2\nu. \end{cases}$$

Ez n-edrendű cosinus-polinom s így az $x = \cos\vartheta$ változóban n-edfokú racionális egész függvény. Az így értelmezett

$$P_0(\cos\vartheta), P_1(\cos\vartheta), \ldots, P_n(\cos\vartheta), \ldots$$

polinomokat nevezi FEJÉR a fenti hatványsor (vagy annak együtthatósorozata) LEGENDRE-polinomjainak. Ezek a FEJÉR-*féle általánosított* LEGENDRE-*polinomok,* amint SZEGŐ GÁBOR[68] nevezi őket. A közönséges LEGENDRE-polinomokat kapjuk, midőn a hatványsor

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots\ 2n} z^n.$$

Ez általánosított LEGENDRE-polinomokat FEJÉR a szóban forgó dolgozatban az esetben vizsgálta, midőn a $F(z)$ hatványsor együtthatói monoton fogyó

[68] G. SZEGŐ, *Orthogonal Polynomials.* American Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. 23, New York 1959, 134.

nem-negatív számok. Többek között kimutatta, hogy *ez általánosított* LEGENDRE-*polinomokra az* $\alpha_n \geqq \alpha_{n+1} \geqq 0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *esetben*

$$|P_n(\cos\vartheta) - P_{n+2}(\cos\vartheta)| \leqq K\alpha_{[n/2]} \qquad (K = \text{const}),$$

ami egy STIELTJES-féle egyenlőtlenségnek nagymérvű általánosítása s érvényes pl. az $(1-z)^{-\varrho}$ hatványsorának megfelelő ún. *ultraszferikus polinomokra,* ha $0 < \varrho \leqq 1$. SZEGŐ GÁBOR[69] mindjárt követte FEJÉRt ezen az úton, s lényegesen tovább is jutott, a $P_n(x)$ polinom gyökeit is vizsgálva és a LAPLACE-féle aszimptotikus formulát is általánosítva ezekre a polinomokra. Maga FEJÉR akkor jutott mélyebbre e polinomok elméletében, midőn azokat *totálisan monoton* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sorozat[70] mellett vizsgálta. Idevágó dolgozata: *Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendre-Polynome,* Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., 31 (1935) 307—316. Ebben többek között bebizonyította a következő tételt, amellyel a közönséges LEGENDRE-polinom gyökeire vonatkozó MARKOV—STIELTJES-féle becslést kiterjesztette az ő általánosított LEGENDRE-polinomjaira:

ha az $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ *sorozat totálisan monoton (eltekintve az* $1, 0, 0, \ldots$ *és* $1, 1, 1, \ldots$ *esetektől), akkor az ehhez tartozó* $P_n(\cos\vartheta)$ *általánosított* LEGENDRE-*polinomnak a* $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ *számközbe eső* ϑ_k *gyökeire (*$n \geqq 2$ *esetén)*

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\pi < \vartheta_k < \frac{k}{n+1}\pi \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Megjegyzendő, hogy FEJÉR bizonyítása új még a közönséges LEGENDRE-polinomok esetében is. Különben ez utóbbi polinomok élesebb SZEGŐ-féle becslését[71] a STIELTJES-féle integrálalak alapján bizonyította be FEJÉR egy

69 G. SZEGŐ, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome. *Math. Zeitschrift,* 25 (1926), 172—187.

70 Valamely $\{\alpha_n\}$ számsorozatot *k-szorosan monotonnak* mondunk, ha

$$\alpha_n \geqq 0, \ \Delta^1\alpha_n \geqq 0, \ \Delta^2\alpha_n \geqq 0, \ldots, \ \Delta^k\alpha_n \geqq 0,$$

ahol $\Delta^\nu\alpha_n$ az α_n „ν-edik differenciája", vagyis

$$\Delta^\nu\alpha_n = \alpha_n - \binom{\nu}{1}\alpha_{n+1} + \binom{\nu}{2}\alpha_{n+2} - \cdots + (-1)^\nu\binom{\nu}{\nu}\alpha_{n+\nu}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; \ \nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Totálisan monoton $\{\alpha_n\}$ sorozatról beszélünk, midőn

$$\alpha_n \geqq 0, \ \Delta^\nu\alpha_n \geqq 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Az $\alpha_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ esetet kizárjuk.

71 G. SZEGŐ, Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related fonctions. *Transactions of the American Math. Soc.,* 39 (1936), 1—17, spec. 8, form. (3).

másik dolgozatában: *Bestimmung von Grenzen für die Nullstellen des Legendreschen Polynoms aus der Stieltjesschen Integraldarstellung desselben,* Monatshefte für Math. und Phys., 43 (1936), 193—209. Ugyanezen cikkben a STIELTJES-félének a LAPLACE- és a MEHLER-féle integrálalakkal együtt egyszerű előállítását adta. Ugyanitt találjuk a közönséges $P_n(\cos\vartheta)$ LEGENDRE-polinom HEINE-féle sinus-sor alakjának[72] egyszerű és szigorú előállítását.

A többszörösen monoton együtthatósorozattal bíró trigonometrikus sorok és hatványsorok elméletét megindító nagy dolgozata: *Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge,* Transactions of the American Math. Soc., 39 (1936), 18—59. Ebben újra mint az egyszerű tételek és módszerek mestere tündököl, a többszörösen monoton sorozatok E. JACOBSTAHL[73] által kezdeményezett és már szépen kiépült elméletét újabb diadalhoz juttatja. SZEGŐ GÁBOR[74] egy eredeti következtetésmódjának felhasználásával (amely különben a FEJÉR-mag nem-negatív voltán alapszik) többek között bebizonyítja a következő tételt:

ha $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ háromszorosan monoton 0-sorozat, akkor a

$$c_0 \sin(n+1)\vartheta + c_1 \sin(n+3)\vartheta + \cdots$$

sinus-sornak 0 és π között legalább n zérushelye van $\left(\frac{\pi}{2}\text{-re szimmetrikusan}\right)$, mégpedig 0 és $\frac{\pi}{2}$ között ($n \geqq 2$ esetén) vannak oly $t_1, t_2, \ldots, t_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ gyökök, amelyekre

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} < t_k < k\frac{\pi}{n+1} \qquad \left(k=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Ezt a közönséges $P_n(\cos\vartheta)$ LEGENDRE-polinomot előállító HEINE-féle sinussorra alkalmazva (amelyről egyszerűen meg tudja mutatni, hogy együtthatósorozata totálisan monoton), e polinom gyökeinek MARKOV—STIELTJES-féle határolását nyeri. Különben a LEGENDRE-polinomra vonatkozó LAPLACE-féle

[72] Ez a Heine-féle sinus-sor a közönséges $P_n(\cos\vartheta)$ LEGENDRE-polinom számára

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+n}}\,\frac{\sin(n+2\nu+1)\vartheta}{2n+2\nu+1},$$

ahol

$$\alpha_0 = 1,\quad \alpha_m = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots 2m} \qquad (m=1,2,3,\ldots).$$

[73] E. JACOBSTAHL, Mittelwertbildung und Reihentransformation, *Math. Zeitschrift,* 6 (1920), 110—117, spec. § 3, 108—117.

[74] G. SZEGŐ, i. h. [71].

aszimptotikus formulának is elemi bizonyítását adja a HEINE-féle sinus-sor alapján. Hatványsorokra vonatkozó egyik tétele így hangzik: *ha az*

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

hatványsorban a $c_1, c_2, \ldots$ *együtthatósorozat négyszeresen monoton, akkor e hatványsor a* $|z| < 1$ *körbelsőben konvergens és egyrétű.*

SZEGŐ GÁBOR ezen az úton is követte FEJÉRt, érdekes kölcsönhatásban állottak egymással, s FEJÉR egész cikksorozatot írt a tárgyról. SZEGŐvel közös cikke: *Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge,* Prace Matematyczno Fiziczne, 44 (1935), 15—25, amelyben az 1. és 4. § FEJÉR, a 2. és 3. § SZEGŐ munkája. Itt SZEGŐ pl. megmutatja, hogy már kétszeresen monoton sorozatra igaz egy tétel, amelyet FEJÉR csak háromszorosan monoton sorozatra bizonyított be, nevezetesen a következő:

ha az

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

hatványsorban a $c_0, c_1, \ldots$ *együtthatósorozat kétszeresen monoton, akkor az egységkör belsejében e hatványsor* $s_0(z), s_1(z), \ldots$ *szeleteire*

$$|f(z)| \geqq |f(z) - s_0(z)| \geqq \cdots \geqq |f(z) - s_n(z)| \geqq \cdots$$

(FEJÉR—SZEGŐ-tétel.) Ez egyszeresen monoton együtthatósorozat mellett (mikor is a hatványsor az egységkör belsejében mindenesetre konvergens) általánosságban már nem érvényes. Ez egyenlőtlenségek fennállását FEJÉR úgy fejezte ki, hogy *az* $s_n(z)$ *részletösszeg monoton konvergál a sor* $f(z)$ *összegéhez.* E rendkívül érdekes tényt előtte, úgy látszik, még az $(1-z)^{-\varrho}$ binomiális soránál sem vették észre, amelynek együttható sorozata $0 \leqq \varrho \leqq 1$ esetén totálisan monoton. Az $|f(z)| \geqq |f(z) - s_n(z)|$ egyenlőtlenségből nyilván következik, hogy

$$|s_n(z)| \leqq 2|f(z)|,$$

tehát kétszeresen monoton együtthatósorozat mellett a hatványsor szeleteire ez is fennáll. Ez a FEJÉR-féle becslés azért figyelemre méltó, mert a hatványsor szeleteinek abszolút értékét a z helyen magán fellépő $f(z)$ függvényérték abszolút értékével határolja, nem pedig pl. az $|f(z)|$-nek a $|z| = \text{const}$ körön vett maximumával, amint általában szokásos.

10. A folytonos függvény FOURIER-sorának szingularitásaira vonatkozó vizsgálataival kapcsolatban, FEJÉR még 1910-ben kifejezte egy LANDAUhoz írott levélben azt a sejtését, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sinus-sor szeletei 0 és π

között mind pozitívok, vagyis

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} > 0, \text{ ha } 0 < x < \pi$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Annyit be tudott bizonyítani, hogy e $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ sinus-polinom a $(0, \pi)$ számközben a $\frac{\pi}{n+1}$ helyen veszi fel legnagyobb értékét, s e maximumok az n növesztésénél folyvást növekednek és az $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > \frac{\pi}{2}$ értékhez tartanak (miért is a szóban forgó sor, mint a $\frac{\pi - x}{2}$ $(0 < x < 2\pi)$ függvény FOURIER-sora mutatja az ún. GIBBS-féle jelenséget). Sejtését D. JACKSON[75] és T. H. GRONWALL[76] egymástól függetlenül hamarosan be is bizonyították. Azután még többen foglalkoztak e teljesen elemi tény bizonyításával, köztük TURÁN PÁL,[77] aki a fenti sinus-polinom érdekes komplex integrálalakját állította elő, amelyből a pozitivitás evidenciába lép, s ugyanő[78] általánosítások mellett élesítette is a tételt, pozitív minoránst adva e sinus-polinom számára. A legközvetlenebb és legelemibb bizonyítással maga FEJÉR szolgált, lásd: *Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen; nebst Anwendungen etc.*, Monatshefte für Math. und Phys., 35 (1928), 305—344, spec. 339—342. E bizonyítást megfelelő előadásban középiskolai tanulók is megérthetik. E speciális elemi tétel felhasználásával később L. KOSCHMIEDER[79] bebizonyította azt az általános tételt, hogy egy a $0 < x < \pi$ számközben pozitív és felülről nem-konkáv függvény FOURIER-féle sinus-sorának részletösszegei mind pozitívok ebben az intervallumban. Ez volt az első ilyen típusú általános tétel, amelyet a mondott tulajdonságú függvény sinus-sorára bebi-

[75] D. JACKSON, Über eine trigonometrische Summe, *Rendiconti di Palermo,* 32 (1911), 257—262.

[76] T. H. GRONWALL, Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{1}{n} \sin nx$. *Math. Annalen,* 72 (1912), 228—243, spec. 229—231.

[77] P. TURÁN, Über die Partialsummen der Fourierreihe. *Journal of the London Math. Soc.*, 13 (1938), 278—282.

[78] P. TURÁN, On a trigonometrical sum. *Annales de la Société Polonaise de Math.*, 25 (1952) 155—161.

[79] L. KOSCHMIEDER, Vorzeicheneigenschaften der Abschnitte einiger physikalisch bedeutsamer Reihen. *Monatshefte für Math. und Phys.*, 39 (1932), 321—344.

zonyították. Maga FEJÉR lényegesen tovább jutott, megmutatva az ismételt középképzés „kiegyenlítő hatását" a következő tétellel:

Ha az $f(x)$ függvény a $0 < x < \pi$ számközben pozitív és felülről konvex (nem-konkáv), akkor FOURIER-*féle sinus-sorának k-adrendű* CESÀRO-*közepeit*[80] *$S_n^{(k)}(x)$-szel jelölve (mikor is $S_n^{(0)}(x)$ a közönséges részletösszeg), a* KOSCHMIEDER-féle $S_n^{(0)}(x) > 0$ *egyenlőtlenségen kívül*

$$0 < S_n^{(k)}(x) \leqq f(x)$$
$$(n, k = 1, 2, 3, \ldots;\ 0 < x < \pi)$$

és a harmadrendű $S_n^{(3)}(x)$ közepek már szintén konvexek ebben a szakaszban. E konvexitás a 0-, 1-, 2-edrendű közepekre általánosságban nem érvényes. De ha a függvény még az $f(\pi - x) = f(x)$ szimmetria tulajdonsággal is bír, akkor már a másodrendű $S_n^{(2)}(x)$ közepek konvexek a $0 < x < \pi$ számközben.

Ez irányú vizsgálatait FEJÉR több dolgozatban tette közzé, részben csak bizonyításvázlatokkal. Ezek egyike: *Neue Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen,* Journal of the London Math. Soc., 8 (1933), 53—62. Ebben részletesen be van bizonyítva a következő két tétel, amelyek e vizsgálatok alapját képezik:

I. *A* $\sum_{n=0}^{\infty} n \sin n\vartheta$ *sinus-sor 3-adrendű* $S_n^{(3)}(x)$ CESÀRO-*közepei pozitívok a* $0 < \vartheta < \pi$ *számközben.*

II. *A* $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\sin(2n-1)\vartheta$ *sinus-sor 2-edrendű* $S_n^{(2)}(x)$ CESÀRO-*közepei pozitívok a* $0 < \vartheta < \pi$ *intervallumban, kivéve, ha* $n = 2\nu$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. (E tételek a HÖLDER-féle közepekre is érvényesek.)

80 Nem-negatív egész k-ra az

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

végtelen sor k-adrendű CESÀRO-közepei

$$S_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ahol

$$s_n^{(0)} = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu, \quad s_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{(k-1)}.$$

A HÖLDER-féle közepek egyszerűen $H_n^{(0)} = s_n^{(0)}$ és

$$H_n^{(k)} = \frac{H_0^{(k-1)} + H_1^{(k-1)} + \cdots + H_n^{(k-1)}}{n+1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

FEJÉR előbbi tételével kapcsolatban TURÁN PÁL[81] a 0-adrendű közepekre vagyis a közönséges részletösszegekre is adott majoránst, bebizonyítván, hogy $S_n^{(0)}(x) \leqq 2f(x)$. Az általános esetet FEJÉR módszerével vezette vissza a $\frac{\pi - x}{2}$ és $\frac{x}{2}$ függvények speciális esetére.

11. FEJÉRnek azt az egyik jellemző vonását, hogy a bonyolult és magasabb régiókban mozgó vizsgálatokból le tudta szűrni az egyszerűt és az elemit, különösen mutatják azok a cikkei, amelyeket a harmonikus, ill. trigonometrikus és racionális polinomokról írt. Első ilyen nagyobb dolgozata: *Über trigonometrische Polynome*, Journal für die reine und angewandte Math. 146 (1915), 53—82. A végtelen harmonikus kifejtések helyett a harmonikus és a trigonometrikus polinomokat vizsgálva, trigonometrikus polinomokra pl. bebizonyítja ebben a dolgozatban a következő elemi tételt:

Ha a legföljebb n-edrendű

$$a_0 + a_1 \cos \vartheta + b_1 \sin \vartheta + \cdots + a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta$$

trigonometrikus polinom legnagyobb és legkisebb értéke M és μ, akkor a $M - a_0$ és $a_0 - \mu$ nem-negatív számokra

$$M - a_0 \leqq n(a_0 - \mu), \quad a_0 - \mu \leqq n(M - a_0).$$

Itt az egyenlőségi jel az egyik vagy a másik egyenlőtlenségben csak az esetben érvényes, midőn a trigonometrikus polinom

$$\gamma + \alpha[n \cos(\vartheta - \beta) + (n-1)\cos 2(\vartheta - \beta) + \cdots + \cos n(\vartheta - \beta)]$$

ahol α, β és γ tetszőleges valós állandók.

A szóban forgó egyenlőtlenségek más szóval azt jelentik, hogy a trigonometrikus polinom abszolút tagjára

$$\mu + \frac{M - \mu}{n+1} \leqq a_0 \leqq M - \frac{M - \mu}{n+1}.$$

Ez ekvivalens azzal a síkbeli potenciálelméleti tétellel, hogy *ha $u(x, y)$ legföljebb n-edfokú harmonikus polinom (vagyis kielégíti a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ síkbeli Laplace-egyenletet) és valamely (x_0, y_0) középpontú körön a legnagyobb és legkisebb értéke M és μ, akkor*

$$\mu + \frac{M - \mu}{n+1} \leqq u(x_0, y_0) \leqq M - \frac{M - \mu}{n+1}.$$

81 P. TURÁN, i. h. 77.

Egyenlőség valamelyik oldalon csak az esetben áll fenn, midőn $u(x, y)$ a valós része valamely

$$\gamma+\alpha\{n[w\cdot(z-c)]+(n-1)[w\cdot(z-c)]^2+\cdots+[w\cdot(z-c)]^n\}$$

komplex polinomnak, ahol γ és α tetszőleges valós, w és c tetszés szerinti komplex állandók. Ez harmonikus polinomokra való élesítése a $\mu \leqq u(x_0, y_0) \leqq M$ egyenlőtlenségnek, amely a körön belül és azon rajta reguláris $u(x, y)$ harmonikus függvényre mindig fennáll.

E tételre FEJÉR megelőzően már két bizonyítást is közölt (Comptes-Rendus 157 (1913), 506 és 571), a szóban forgó dolgozatban alapul szolgált neki 1910. évi következő sejtése, amelyet általánosságban RIESZ FRIGYES, majd más módszerrel EGERVÁRY JENŐ bizonyított be:

a nem-negatív $\tau(\vartheta)$ trigonometrikus polinomok összességét a

$$\tau(\vartheta)=|\gamma(z)|^2_{z=e^{i\vartheta}}$$

képlet állítja elő, ahol $\gamma(z)$ tetszőleges komplex polinom (FEJÉR—RIESZ-tétel).

Dolgozatában FEJÉR a RIESZ FRIGYEStől származó bizonyítást közli némi módosítással és részletesen. E sejtésre O. TOEPLITZ[82] egy munkája vezette, ahol is szerepel az

$$\frac{n+1}{2}+n\cos\vartheta+(n-1)\cos 2\vartheta+\cdots+\cos n\vartheta=$$
$$=\frac{1}{2}|1+z+\cdots+z^n|^2_{z=e^{i\vartheta}}$$

képlet. A fenti általános képlet más szóval a legföljebb n-edrendű nem-negatív trigonometrikus polinomok együtthatóinak egy parameteres előállítását jelenti, amelyben $2n+2$ valós parameter szerepel, amelyek a komplex polinom együtthatóinak koordinátái.

Ugyanezen dolgozatban FEJÉR azt is bebizonyította, hogy *az 1 abszolút taggal kezdődő nem-negatív*

$$1+\lambda_1\cos\vartheta+\cdots+\lambda_n\cos n\vartheta\geqq 0$$

cosinus-polinomban a λ_1 együtthatóra

$$-2\cos\frac{\pi}{n+2}\leqq\lambda_1\leqq 2\cos\frac{\pi}{n+2}$$

s itt az egyenlőség be is következhetik.

82 O. TOEPLITZ, Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. *Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Kl.* 1910, §4. Form. (3).

Ezekbe a vizsgálataiba SZÁSZ OTTÓ[83], EGERVÁRY JENŐ[84] és SZEGŐ GÁBOR[85] is bekapcsolódtak s az utóbbi tételt kiterjesztették általában nem-negatív trigonometrikus polinomokra, bebizonyítván (külön SZÁSZ OTTÓ, ill. SZÁSZ OTTÓ és EGERVÁRY, és külön SZEGŐ), hogy az 1 abszolút taggal kezdődő nem-negatív

$$1+(a_1\cos\vartheta+b_1\sin\vartheta)+\cdots+(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta)\geqq 0$$

trigonometrikus polinomban a k-adrendű tag ϱ_k amplitudójára

$$\varrho_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{2}\right]+2}\qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Igen egyszerű bizonyítással szolgál (a $k=1$ esetre, amelyből az általános tétel már egyszerűen adódik) FEJÉR későbbi dolgozata: *Über eine Aufgabe der Harnackschen Potentialtheorie,* Nachrichten der Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1928, 109—117.

E cikkek közé tartozik még a már említett 1928. évi Monatshefte-cikk (132. old.). Ebben három elemi tétel szolgál a tárgyalás alapjául, amelyeket az ABEL-féle átalakítás ismételt alkalmazásával nyert képletekből olvasott ki FEJÉR. Ezek egyike a következő: *ha az*

$$s=a_0+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n$$

összegben a $\lambda_0=1,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *valós együtthatókra*

$$\lambda_0-\lambda_1\geqq\lambda_1-\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_{n-1}-\lambda_n\geqq\lambda_n\geqq 0,$$

akkor a

$$\sigma_k=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_k}{k+1},\ s_k=a_0+a_1+\cdots+a_k\qquad (k=0,1,\ldots,n)$$

jelöléssel (vagyis, ha $\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ *az* $a_0+a_1+\cdots+a_n$ *összeg elsőrendű Cesàro-közepei) ez s összeg a számsíkon a* $\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ *pontokat tartalmazó legkisebb konvex sokszögbe esik.*

Ebből és a másik két hasonló tételből egyszerűen adódtak régebbi és részben új eredmények az egységkörön, ill. az egységgömbön belül pozitív harmonikus függvény sorkifejtésére vonatkozólag. Így pl. végelemzésben az

[83] O. SZÁSZ, Elementare Extremalprobleme über nichtnegative trigonometrische Polynome. *Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wiss., Math.-Phys. Kl.* 1927, 185—196.

[84] E. EGERVÁRY und O. SZÁSZ, Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome. *Math. Zeitschrift,* 27 (1928), 641—652.

[85] G. SZEGŐ, Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen. *Math. Annalen,* 96 (1927), 601—632.

idézett tételből következett az a régebbi FEJÉR—SIDON[86]-féle eredmény, hogy *ha*

$$u(r, \vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) r^n$$

a $0 \leqq r < 1$ *egységkörben konvergens harmonikus kifejtése egy e körön belül pozitív harmonikus függvénynek, akkor e sor részletösszegei is pozitívok a* $0 \leqq r < \frac{1}{2}$ *körben; itt* $\frac{1}{2}$ *nem pótolható nagyobb számmal* (FEJÉR—SIDON-tétel).

12. Míg a komplex interpoláció területén C. RUNGE vizsgálatait vitte lényegesen tovább (**8.** pont), addig a valós interpoláció elméletében FEJÉR új utat nyitott, megalapítva a *lépcsőparabolák* konvergencia-elméletét. A M. T. A. 1915. november 15-i osztályülésén bemutatott *„Interpolációról”* c. dolgozatát (Mat. és Term. Értesítő, 34 (1916), 209—229) nyomban követte bővebb közleménye: *Über Interpolation*, Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1916, 66—91. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egymástól különböző abszcisszák és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tetszőleges ordináták, FEJÉR a sík (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots,$ (x_n, y_n) pontjai által meghatározott *lépcsőparabolának* nevezi azt a legföljebb $(2n-1)$-edfokú $H(x)$ racionális egész függvényt, amelyre

$$H(x_k) = y_k, \quad H'(x_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez más szóval az a legföljebb $(2n-1)$-edfokú parabola, amely az adott pontokon átmegy és érintője ezekben a pontokban párhuzamos az abszcisszatengellyel. Ilyen egy és csak egy van, amint az HERMITE-féle interpoláció elméletéből jól ismeretes. Bevezetve az

$$\omega(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \quad C \neq 0$$

polinomot, ez a lépcsőparabola

$$H(x) = y_1 h_1(x) + y_2 h_2(x) + \cdots + y_n h_n(x),$$

ahol

$$h_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez utóbbiakat FEJÉR a szóban forgó interpoláció *alappolinomjainak (alapfüggvényeinek)* nevezi. Ezek összege $\equiv 1$, éppen úgy, mint a LAGRANGE-interpolációnál fellépő

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

[86] S. SIDON, Ein Satz über positive harmonische Polynome. *Jahresbericht der deutschen Mat.-Ver.*, 35 (1926), 97—99.

LAGRANGE-féle alappolinomoké, s amelyekkel kifejezve az adott x_k helyeken rendre az előírt y_k értékeket felvevő legföljebb $(n-1)$-edfokú racionális egész függvény, az ún. LAGRANGE-parabola

$$L_n(x)=y_1 l_1(x)+y_2 l_2(x)+\cdots+y_n l_n(x).$$

FEJÉR figyelmét mindjárt az a két speciális eset vonta magára, midőn az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyek a $P_n(x)$ LEGENDRE-, ill. a $T_n(x)=[\cos n\vartheta]_{x=\cos\vartheta}$ elsőfajú CSEBISEV-polinom gyökei, mikor is az alapfüggvények nem-negatívok a $-1\leqq x\leqq 1$ számközben. Ebből az egyszerű tényből tüstént következett, hogy ha az y_k ordináták egy a $-1\leqq x\leqq 1$ intervallumban definiált $f(x)$ valós függvény $f(x_k)$ értékei, akkor LEGENDRE- vagy CSEBISEV-abszcisszák esetén a lépcsőparabolák összessége e számközben *„stabilis"* az $f(x)$-től való függésük tekintetében. Ez pontosan a következőt jelenti: *ha az $f(x)$ függvényhez tartozó lépcsőparabola $H(x)$, az $f(x)+\delta(x)$ függvényhez tartozó pedig $H^*(x)$, akkor*

$$|H(x)-H^*(x)|\leqq\delta \quad (-1\leqq x\leqq 1),$$

hacsak

$$|\delta(x)|\leqq\delta \quad (-1\leqq x\leqq 1),$$

bármelyik $P_n(x)$ vagy $T_n(x)$ polinom gyökeit választjuk is $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alappontokul.

Ugyancsak folyománya volt FEJÉRnél az alappolinomok nem-negatív voltának, hogy *ha $m\leqq f(x)\leqq M$, akkor* LEGENDRE- *vagy* CSEBISEV-*abszcisszák esetén egyben $m\leqq H(x)\leqq M$ $(-1\leqq x\leqq 1)$.*

A lépcsőparabolák konvergenciáját illetően FEJÉR LEGENDRE-abszcisszák esetére a következő tételt bizonyította be: *ha $f(x)$ a $-1\leqq x\leqq 1$ számközben korlátos függvény s valamely belső ξ helyen folytonos, akkor a $P_n(x)$ polinom $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ gyökeihez mint alappontokhoz és az $y_k^{(n)}=f(x_k^{(n)})$ értékekhez mint ordinátákhoz tartozó $H_n(x)$ lépcsőparabolára $n\to+\infty$ esetén*

$$H_n(\xi)\to f(\xi);$$

amennyiben $f(x)$ folytonos a $-1\leqq x\leqq 1$ intervallumban, a konvergencia ennek minden belső subintervallumában egyenletes.

Különös viselkedést mutattak a lépcsőparabolák a ± 1 helyeken. Először is tüstént következett, hogy LEGENDRE-*abszcisszák esetén*

$$H_n(1)=H_n(-1)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} H_n(x)dx.$$

Mivel pedig a szóban forgó abszcisszák és ordináták által meghatározott $L_n(x)$

LAGRANGE-parabolára GAUSSnak a közelítő kvadratúrára vonatkozó tételéből kifolyólag

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} H_n(x)\,dx$$

és STIELTJES tétele értelmében (melyről még alább is szó lesz) $n \to +\infty$ esetén

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\,dx \to \int_{-1}^{1} f(x)\,dx,$$

hacsak $f(x)$ korlátos és RIEMANN szerint integrálható függvény, FEJÉR ily módon a következő eredményre jutott:

Ha $f(x)$ korlátos és RIEMANN *szerint integrálható függvény a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben, akkor* LEGENDRE-*abszcisszák mellett*

$$\lim_{n=+\infty} H_n(\pm 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

(FEJÉR-*féle jelenség.*[87])

A CSEBISEV-abszcisszáknak megfelelő lépcsőparabolák konvergenciájára vonatkozólag FEJÉR a fentebbihez hasonló tételt talált azzal az egyszerűbb záradékkal, hogy *ha $f(x)$ folytonos a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben, akkor a* CSEBISEV-*abszcisszákhoz tartozó lépcsőparabolák ebben az egész zárt intervallumban egyenletesen tartanak e függvényhez.*

Különösen e második approximáció-tételben WEIERSTRASS első approximáció-tételének igen egyszerű és szemléletes konkrét esetével állunk szemben. Ez a trigonometrikus polinomokkal való közelítést illető FEJÉR-féle approximáció-tételnek felel meg (107. old.), de annál annyiban elemibb, hogy az integrál fogalmát nem használja fel. A tétel érdekességét nagyban emeli, hogy amint G. FABER[88] vizsgálatai óta ismeretes, a LAGRANGE parabolákra vonatkozólag ilyen approximáció-tétel nem áll fenn, bárhogyan válasszuk is az alapul szolgáló pontcsoportok sorozatát a szóban forgó intervallumban.

Ezt az approximáció-tételt FEJÉR később általánosította. Ha ui. az előbbi (x_k, y_k) pontokhoz rendre meg vannak adva tetszőleges y'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ értékek, e pontokon át egy és csak egy legföljebb $(2n-1)$-edfokú parabola vezethető, amelynek érintője ezekben a pontokban rendre az adott $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ iránytangensekkel bír. Ezt nevezhetjük az adott pontok és érintők által meg-

[87] Az elnevezést illetően vö. E. EGERVÁRY and P. TURÁN, Notes on interpolation V (On the stability of interpolation). *Acta Math. Hung.*, 9 (1958), 259—267, spec. 261.

[88] G. FABER, Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. *Jahresbericht der deutschen Math.-Ver.*, 23 (1914), 192—210.

határozott *általánosított lépcsőparabolának;* ez képletben kifejezve

$$\chi(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x)+\sum_{k=1}^{n} y_k' \mathfrak{H}_k(x),$$

ahol $h_k(x)$ a fenti alappolinom, míg

$$\mathfrak{H}_k(x)=(x-x_k)\left[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right]^2 \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Ez utóbbiakat FEJÉR *másodfajú alappolinomoknak* nevezi az előbbi *elsőfajú alappolinomokkal* szemben, a jelzett általánosítással foglalkozó későbbi dolgozatában: *Über Weierstrasssche Approximation besonders durch Hermitesche Interpolation,* Math. Annalen, 102 (1930), 707—725. Ebben bebizonyítja az előbbinél általánosabb következő konkrét approximáció-tételt:

Ha $f(x)$ *a* $-1\leqq x\leqq 1$ *számközben folytonos függvény s a* $T_n(x)$ CSEBISEV-*polinom*

$$x_{nk}=\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

gyökeinek megfelelő $(x_{nk}, f(x_{nk}))$ *pontok és bizonyos* y'_{nk} *derivált értékek által meghatározott* $\chi_n(x)$ *lépcsőparabolát annak a megszorításnak vetjük alá, hogy*

$$|y'_{nk}|\leqq \Delta \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

ahol Δ *az* n*-től független állandó, akkor e zárt intervallumban* $n\to+\infty$ *esetén*

$$\chi_n(x)\to f(x)$$

egyenletesen áll fenn.

E FEJÉR által megkezdett úton lényegesen tovább jutott SZEGŐ GÁBOR[89], aki az általánosított lépcsőparabolák vizsgálatát kiterjesztette arra az általános esetre, midőn az alappontok a $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ JACOBI-polinom[90] gyökei. Többbek

[89] G. SZEGŐ, Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören. *Math. Zeitschrift,* 35 (1932), 579—602; vö. ugyanattól, i. m. [68] 338—342.

[90] Ha $\alpha>-1$ és $\beta>-1$, az e parametereknek megfelelő n-edfokú JACOBI-polinom

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{d^n[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]}{dx^n} \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

vagy más alakban

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+n}{\nu}\binom{\beta+n}{n-\nu}\left(\frac{x+1}{2}\right)^\nu\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-\nu}.$$

A $P_n(x)$ LEGENDRE-polinom ennek $J_n^{(0,0)}(x)$ speciális esete. Konstans faktortól eltekintve a $T_n(x)$ CSEBISEV-polinom is JACOBI-polinom, nevezetesen

$$J_n^{(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2})}(x)=\frac{1\cdot3\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots2n}T_n(x).$$

Általában az $\alpha=\beta$ esetnek megfelelő JACOBI-polinomok az ún. *ultraszferikus polinomok.*

között megmutatta, hogy $-1<\alpha<0$, $-1<\beta<0$ esetén az előbbi tétel akkor is érvényes, ha alappontokul a $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ JACOBI-polinom gyökeit választjuk. Más módszerrel élt hasonló vizsgálataiban J. SHOHAT[91].

Igen gyümölcsözőnek bizonyult azután az elmélet további fejlődésére nézve a *normális pontcsoport* és *szigorúan normális pontcsoport-sorozat* fogalmának FEJÉR által történt bevezetése. Erre vonatkozó fontos dolgozata: *Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte,* Math. Annalen, 106 (1932), 1—55. Itt (különben már előbbi cikkében is) a $h_k(x)$ elsőfajú alapfüggvény fenti képletében szereplő

$$1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)$$

tényezőt FEJÉR *karakterisztikus lineártényezőnek,* ennek 0-helyét (ha $\omega''(x_k)\neq 0$), vagyis a

$$X_k=x_k+\frac{\omega'(x_k)}{\omega''(x_k)}$$

helyet az x_k alapponthoz tartozó *konjugált pontnak* nevezi az adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontcsoportra vonatkozólag. Ha $\omega''(x_k)=0$, akkor e lineártényező $\equiv 1$ s ez esetben FEJÉR azt mondja, hogy a X_k konjugált pont a „végtelenben" van. Midőn az alappontok pl. a $-1\leqq x\leqq 1$ számközbe esnek, de ennek belsejébe nem esik egyetlen konjugált pont sem, FEJÉR későbbi elnevezésével az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontcsoport *normális* e számközre vonatkozólag. Ebben az esetben a karakterisztikus lineártényezők nem-negatívok az adott $-1\leqq x\leqq 1$ intervallumban, s ennélfogva ugyanez áll a $h_k(x)$ elsőfajú alapfüggvényekre is. A fentebb szerepelt LEGENDRE-, ill. CSEBISEV-abszcisszák ilyen normális pontcsoportot alkotnak. Ha a szóban forgó $-1\leqq x\leqq 1$ számközben valamely

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

pontcsoport-sorozat van adva, amelyben tehát az n-edik pontcsoport éppen n pontból áll, ezt FEJÉR akkor nevezi *szigorúan normálisnak,* ha van olyan $\varrho>0$ szám, amelynél valamennyi pontcsoport karakterisztikus lineártényezői nem kisebbek ugyanebben a számközben, vagyis a ± 1 helyeken mindegyik ilyen tényező $\geqq\varrho$. (Szükségképp $\varrho\leqq 1$, minthogy az x_k helyen a megfelelő karakterisztikus lineártényező $=1$.) Például a $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ JACOBI-polinomok $(n=1, 2, 3, \ldots)$ gyökcsoportjai alkotta pontcsoport-sorozat szigorúan normális a $-1\leqq x\leqq 1$ számközben, hacsak $-1<\alpha<0$, $-1<\beta<0$, így speciálisan a $T_n(x)$ CSEBISEV-polinom esetében, amelynél $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$. Mármost GRÜN-

[91] J. SHOHAT, On interpolation, *Annals of Mathematics,* (2) 34 (1933), 130—146.

WALD GÉZA[92] megmutatta, hogy FEJÉR előbbi approximáció-tétele minden szigorúan normális pontcsoport-sorozat alapulfektetése mellett igaz, s ezzel igenlő választ adott FEJÉR idevágó kérdésére, amelyet ő *„On the characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points"* c. dolgozatában (American Math. Monthly, 41 (1934), 1—14, spec. 13—14) felvetett. A *„normális pontcsoport"*, ill. *„szigorúan normális pontcsoport-sorozat"* elnevezést is itt használta FEJÉR először.

Fontos felismerése volt FEJÉRnek, hogy a lépcsőparabolák elméletében fellépő konjugált pontok, amelyekről éppen szó volt, hasznosíthatók a LAGRANGE-interpolációnál is. Az ezzel foglalkozó fent idézett dolgozatában a LAGRANGE-parabolák konvergenciájára vonatkozólag többek között bebizonyította a következő szép tételt:

Ha az $f(x)$ függvény az $a \leqq x \leqq b$ számközben $\alpha > \frac{1}{2}$ kitevőjű LIPSCHITZ-*feltételnek tesz eleget, vagyis*

$$|f(x')-f(x'')| \leqq C|x'-x''|^{\alpha} \qquad \left(a \leqq x' < x'' \leqq b, \ \alpha > \frac{1}{2}\right),$$

akkor ez intervallumban szigorúan normális pontcsoport-sorozatot fektetvén alapul, az n-edik pontcsoporthoz és az $f(x)$ függvényhez tartozó $L_n(x)$ LAGRANGE-*parabolára $n \to +\infty$ esetén*

$$L_n(x) \to f(x)$$

az egész számközben egyenletesen áll fenn.

E tételből egyszerűen következett, miszerint *normális pontcsoport-sorozat az intervallumot mindenütt sűrűn tölti ki abban a szigorúbb értelemben, hogy bármily kis subintervallumban van pontja az n-edik pontcsoportnak, ha n elég nagy.* Ilyen „FEJÉR-típusú tételeket", amelyekben a pontcsoport-sorozat eloszlására történik következtetés az interpolátórius tulajdonságokból, később ERDŐS PÁL és TURÁN PÁL[93] találtak.

A fenti approximáció-tételben elkerülhetetlen, hogy az adott folytonos függvényre ne tegyünk valami megszorító feltevést, mint amilyen itt a LIPSCHITZ-feltétel (amely a folytonosságot már maga után vonja). Ugyanis a G. FABER idézett dolgozatában (lásd e tanulmány 139. oldalán) foglalt híres tétel (amelynek bebizonyítása ott azonban nem kifogástalan) éppen azt mondja, hogy bármiképp véve is fel a szóban forgó számközben valamely pontcsoport-

[92] G. GRÜNWALD, On the theory of interpolation. *Acta Mathematica,* 75 (1943), 219—245. Vagy ugyanattól, Az Hermite-féle interpolációról. *Mat. és Fiz. Lapok,* 48 (1941), 272—284.

[93] P. ERDŐS and P. TURÁN, On interpolation, III. Interpolatory theory of polynomials. *Annals of Mathematics,* 41 (1940), 510—553, spec. 515.

sorozatot, mindig van olyan folytonos függvény, amelynél a megfelelő Lagrange-parabolák ugyanott nem tartanak egyenletesen a függvényhez. E tételnek egy igen egyszerű és kifogástalan bebizonyítása FEJÉRtől származik. Ezt függelékként tartalmazó dolgozata: *Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen,* Math. Zeitschrift, 32 (1930), 426—457. Ebben különben fenti approximáció-tételét tovább általánosította, bebizonyítván, hogy *a* CSEBISEV-*abszcisszákra vonatkozó approximáció-tétel akkor is érvényes, ha az n-edik pontcsoporthoz előírt* $\chi_n'(x_{nk})=y_{nk}'$ *derivált-értékekre*

$$|y_{nk}'|\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x_{nk}^2}}\,\frac{n}{\log n}\,\varepsilon_n,$$

ahol $\varepsilon_n\to 0$.

Érdekes CSEBISEV-típusú feladattal foglalkozó interpoláció-elméleti dolgozata: *Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst kleines Maximum besitzt,* Annali della R. Scuola Norm. Sup. die Pisa, (2) 1 (1932), 263—276. Ebben FEJÉR bebizonyítja a LEGENDRE-polinomokból képezett

$$P_n(x)-P_{n-2}(x)=\frac{2n-1}{n(n-1)}(x^2-1)P_{n-1}'(x)$$

polinom gyökcsoportjának következő jellemző minimum-tulajdonságát:

A $-1\leqq x\leqq 1$ *számközben fekvő* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *helyeknek mint alappontoknak megfelelő* LAGRANGE-*féle alapfüggvények négyzetösszege e számközre vonatkozó maximumának lehető legkisebb értéke*

$$\min\max_{-1\leqq x\leqq 1}\{l_1(x)^2+l_2(x)^2+\cdots+l_n(x)^2\}=1$$

s ezt a minimális értéket a $P_n(x)-P_{n-2}(x)$ *polinom gyökeinek csoportja és csakis ez, szolgáltatja.*

Ezzel kapcsolatban közbevetőleg megjegyzem, hogy FEJÉR problémafelvetése nyomán EGERVÁRY JENŐ[94] megmutatta, miszerint a $P_n(x)-P_{n-2}(x)$ polinomot az n-edfokúak között egy konstans faktortól eltekintve az jellemzi, hogy az $x_1=-1$ és $x_n=1$ gyökökön kívül még $n-2$ olyan különböző $x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}$ gyökkel bír, amelyek inflexiós pontok. Maga FEJÉR a $P_n(x)$ LEGENDRE-polinom geometriai jellemzését a következő tétellel adta meg: *a*

[94] E. EGERVÁRY, Über die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome. *Archiv der Math. und Phys.,* (3) 27 (1918), 17—24, spec. 22—23.

$P_n(x)$ LEGENDRE-*polinomot, mint n-edfokú racionális egész függvényt azzal jellemezhetjük, hogy az* $x=1$ *helyen az* 1 *értéket veszi fel,* 1 *és* -1 *között n különböző* $x_1<x_2<\cdots<x_n$ *gyöke van, s deriváltjának* $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{n-1}$ *gyökeire a polinom görbéje és az abszcissza-tengely közti terület abszolút értéke* (-1)*-től* x_1*-ig akkora, mint* x_1*-től* ξ_1*-ig, azután általában* ξ_k*-tól* x_{k+1}*-ig akkora, mint* x_{k+1}*-től* ξ_{k+1}*-ig, végül* ξ_{n-1}*-től* x_n*-ig akkora, mint* x_n*-től* 1*-ig.* FEJÉRnek e gyönyörű elemi tételét és annak bizonyítását EGERVÁRY közölte idézett cikkében[95]. E két utóbbi tétel értelmében mind a $P_n(x)-P_{n-2}(x)$ polinom, mind $P_n(x)$ maga bizonyos fokig a $\sin x$ függvényre emlékeztet.

Figyelemre méltó elemi tényeket talált FEJÉR az interpolációval szoros kapcsolatban álló közelítő kvadratúra elméletében. Ezzel foglalkozó dolgozata: *Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen,* Math. Zeitschrift, 37 (1933), 287—309. Ha $f(x)$ integrálható függvény az $a\leqq x\leqq b$ számközben s $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ennek különböző helyei, az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál helyett a függvénnyel ez x_k helyeken megegyező legföljebb $(n-1)$-edfokú $L_n(x)$ racionális egész függvény integrálját véve, ez a „közelítő kvadratúra-érték" e LAGRANGE-parabola fentebbi képletére tekintettel

$$Q[f(x)]=f(x_1)\int_a^b l_1(x)\,dx+f(x_2)\int_a^b l_2(x)\,dx+\cdots+f(x_n)\int_a^b l_n(x)\,dx.$$

Az itt szereplő

$$A_1=\int_a^b l_1(x)\,dx,\quad A_2=\int_a^b l_2(x)\,dx,\ldots,\quad A_n=\int_a^b l_n(x)\,dx$$

számokat (amelyek függetlenek az $f(x)$ függvénytől), a közelítő kvadratúra *állandóinak* vagy COTES-*féle számainak* nevezzük. Megadván az $a\leqq x\leqq b$ számközben valamely pontcsoport-sorozatot, amelynek n-edik pontcsoportja $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, kérdezhetjük, hogy a

$$Q_n[f(x)]=f(x_1^{(n)})A_1+f(x_2^{(n)})A_2+\cdots+f(x_n^{(n)})A_n$$

közelítő kvadratúra-érték $n\to+\infty$ esetén az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrálhoz tart-e? T. J. STIELTJES ismert klasszikus tétele szerint ez minden korlátos és RIEMANN szerint integrálható $f(x)$ függvényre fennáll, ha n-edik pontcsoportnak a $P_n(x)$ LEGENDRE-polinom gyökeit választjuk, mikor is „GAUSS-féle közelítő kvadratúráról" szokásos beszélni. Ez esetben a COTES-féle számok tudvalevőleg

95 A fogalmazást illetően vö. SZÁSZ PÁL, *A differenciál- és integrálszámítás elemei,* 2. kiad., Budapest 1951, II. köt. 72.

mind pozitívok. Mármost FEJÉR bebizonyította STIELTJES tételének következő nagymérvű általánosítását (amelyet előtte W. STEKLOV is közölt egy orosz nyelvű dolgozatban[96]):

Ha az n-edik pontcsoportnak megfelelő COTES-*féle számok bizonyos n-től kezdve nem-negatívok, akkor az adott pontcsoport-sorozattal definiált közelítő kvadratúránál*

$$\lim_{n=+\infty} Q_n[f(x)] = \int_a^b f(x)dx,$$

valahányszor $f(x)$ korlátos és RIEMANN *szerint integrálható függvény az $a \leqq x \leqq b$ számközben.*

Különös érdekességgel bír FEJÉRnek az a megállapítása, hogy *a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumra vonatkozólag a $T_n(x)$, valamint a másodfajú $U_n(x)$* CSEBISEV-*polinom*[97] *gyökeihez mint alappontokhoz tartozó* COTES-*féle számok pozitívok.*

A $P_n(x)$ LEGENDRE-polinom gyökcsoportján kívül pedig az ilyen pontcsoportok egész osztályát megadja FEJÉR következő tétele: *ha az A, B valós számok úgy vannak választva, hogy az*

$$\omega(x) = P_n(x) + AP_{n-1}(x) + BP_{n-2}(x)$$

polinomnak (ahol $P_n(x)$ az n-edfokú LEGENDRE-*polinom) a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben n különböző gyöke van, továbbá $B \leqq 0$, akkor ez intervallumra vonatkozólag e gyököknek mint alappontoknak megfelelő* COTES-*féle számok pozitívok.* Eszerint a $P_n(x)$ polinom gyökcsoportján kívül ($A = B = 0$ eset), ilyen pl. a $P_n(x) - P_{n-1}(x)$ valamint a $P_n(x) - P_{n-2}(x)$ polinom gyökcsoportja ($A = -1$, $B = 0$, ill. $A = 0$, $B = -1$ eset).

Ebben az irányban tovább jutott SZEGŐ GÁBOR[98], aki megmutatta, hogy a $J_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ ultraszferikus polinom gyökcsoportjának megfelelő COTES-féle számok a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközre vonatkozólag $-1 < \alpha \leqq \frac{3}{2}$ esetén bizonyos n-től kezdve pozitívok, sőt a $-1 < \alpha \leqq 0$, valamint az $\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1$ esetben kezdettől fogva ilyenek.

[96] *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences,* Petrograd (6) 10 (1916), 169—186, spec. 176—179. Vö. G. SZEGŐ [68], 347, 407.

[97] Az $U_n(x)$ másodfajú CSEBISEV-polinom

$$U_n(x) = \left[\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}\right]_{x=\cos\vartheta}.$$

[98] G. SZEGŐ, i. m. [68] 356—360.

Mindezekben az esetekben tehát FEJÉR fenti kvadratúra-tétele alkalmazható. Tételéből FEJÉR levonta még azt a szép következtetést, hogy

ha az n-edik pontcsoportnak megfelelő $A_k^{(n)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ COTES-*féle számok bizonyos n-től kezdve nem-negatívok, akkor a pontcsoport-sorozat az intervallumot mindenütt sűrűn tölti ki a szó szigorúbb értelmében, azaz bármely kis subintervallumban van pontja az n-edik csoportnak, ha n elég nagy; és* $\max A_k^{(n)} \to 0$, *midőn* $n \to +\infty$.

Amíg FEJÉR kvadratúra-tétele elegendő feltételt fejez ki, PÓLYA GYÖRGY[99] megadta a szükséges és elegendő feltételét is annak, hogy az $a \leqq x \leqq b$ számközben felvett pontcsoportsorozat alapulfektetése mellett a $Q_n[f(x)]$ közelítő kvadratúra-érték minden *folytonos* függvény esetén az $\int_a^b f(x)dx$ integrálhoz tartson. E feltétel az, hogy az n-edik pontcsoportnak megfelelő COTES-féle számok abszolút értékeinek összege korlátos legyen.

STIELTJES említett kvadratúra-tételének más irányú általánosítását később ERDŐS PÁL és TURÁN PÁL adták[100]. Ezt megelőzően SZEGŐ GÁBOR[101] megmutatta, hogy a $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ JACOBI-polinom gyökcsoportját véve n-edik pontcsoportnak, STIELTJES kvadratúra-tétele $\max(\alpha,\beta)<\frac{3}{2}$ esetén érvényes, viszont $\max(\alpha,\beta)>\frac{3}{2}$ esetén általában nem érvényes.

Különben az irodalom, amely FEJÉR interpoláció-elméleti munkái nyomán keletkezett, s amelyhez magam is ismételten hozzájárultam[102], szintén olyan kiterjedt, hogy annak ismertetése külön tanulmány tárgyát képezhetné.

*

Nem érintettem FEJÉRnek azokat a munkáit, amelyeket más szerzőkkel közösen írt annak megjelölése nélkül, hogy mely részek erednek tőle magától. Ezek közül csak a konformis leképezés alaptételének FEJÉRtől és RIESZ FRIGYEStől származó híres egyszerű bizonyítását említem meg, amelyet ők

[99] G. PÓLYA, Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. *Math. Zeitschrift*, 37 (1933), 264—286.

[100] P. ERDŐS and P. TURÁN, On interpolation. I. Quadrature- and mean-convergence in the Lagrange interpolation. *Annals of Math.*, 38 (1937), 142—155, spec. 146, Theorem II.

[101] G. SZEGŐ, Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome. *Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft*, 10 (1933), 48, 102—108.

[102] Lásd pl. P. SZÁSZ, On quasi-Hermite-Fejér interpolation. *Acta Math. Hung.*, 10 (1959), 413—439.

maguk nem publikáltak, hanem engedelmükkel RADÓ TIBOR[103] tett közzé, s amelynek keletkezését FEJÉR saját elbeszéléséből ismerem.

Végezetül azt hiszem, aki az elmondottak nyomán FEJÉR munkáit tanulmányozza is, az meg fog győződni arról, hogy FEJÉR *Lipót az egyszerű tételek és módszerek új utakat törő mestere volt.*

Meghalt 1959. október 15-én, kitölthetetlen űrt hagyva maga után. Öt nap múlva temettük a Pantheonban, a nemzet nagyjai közé. Vele közszeretetben és köztiszteletben álló nagy ember, maga körül iskolát alapító nagyhatású tanár, és világhírű nagy tudós, századunk egyik vezető matematikusa szállott sírba. De munkáiban továbbra is él, mert utakat nyitott meg, amelyeken az utána jövők tovább haladhatnak!

Szász Pál

[103] T. RADÓ, Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete. *Szegedi Acta,* 1 (1922/23), 240—251, spec. 241—242.

BOLYONGÁSI PROBLÉMÁKRA VONATKOZÓ HATÁRELOSZLÁSTÉTELEK

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

E dolgozatban arra szeretnénk a figyelmet felhívni, hogy a független (vagy majdnem független) valószínűségi változók összegeire vonatkozó „klasszikus" határeloszlástételeken kívül még számos egyéb, más típusú határeloszlástétel adható meg. Célunk az, hogy minél több típusát mutassuk be a határeloszlástételeknek; ezért a lehető legegyszerűbb esetekre szorítkozunk. Az 1. §-ban a többdimenziós, a 2. §-ban pedig már csak az egydimenziós bolyongás (fej-vagy-írás játék) esetével foglalkozunk.[1] Látni fogjuk, hogy már ezekre az egyszerű példákra vonatkozólag is milyen sok, meglepőbbnél meglepőbb törvényszerűség állapítható meg, amelyek megismerése elősegíti a véletlen ingadozások jellegének mélyebb megértését. Bár részletesen csak az említett egyszerű példákkal foglalkozunk, utalunk a tárgyalt tételek általánosításával foglalkozó irodalomra. E dolgozat ismertető jellegű, a tárgyalt eredmények túlnyomórészt ismertek, azonban a bizonyítások egy része vagy egészében vagy egyes részleteiben új. A megfogalmazásnál arra törekedtünk, hogy a dolgozat minél kevesebb előismerettel megérthető legyen.

1. §. Bolyongás az r-dimenziós pontrácson

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ teljesen független valószínűségi változók, amelyek a $+1$ és -1 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel és legyen

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k. \tag{1.1}$$

ζ_n felfogható, mint a fej-vagy-írás játékban az egyik játékos nyeresége n dobás után, ha a játékos minden dobásnál 1 forintot nyer vagy veszít, aszerint, hogy az eredmény fej vagy írás. A ζ_n változó értékét (amely mindig

[1] A többdimenziós bolyongásra vonatkozólag igen figyelemre méltó új eredményeket értek el ERDŐS PÁL és S. J. TAYLOR [12].

egész szám) a szemléletesség kedvéért úgy interpretáljuk, mint egy véletlen helyzetű pont abszcisszáját az x-tengelyen, a $t=n$ időpontban. A szóban forgó pont tehát a számegyenes „rácspontjainak” (egész koordinátájú pontjainak) halmazán végez véletlen „bolyongást”.

E §-ban ennek a feladatnak a többdimenziós általánosításával foglalkozunk. Legyen G_r az r-dimenziós euklideszi tér rácspontjainak (azaz egész koordinátájú pontjainak) halmaza, és tekintsünk egy, a G_r-rácson véletlen bolyongó mozgást végző pontot. Ezen azt értjük, hogy ha a t időpontban a bolyongó pont a P rácspontban van, akkor a $t+1$ időpontban a pont egyforma valószínűséggel lehet a P ponttal „szomszédos” $2r$ rácspont bármelyikében, függetlenül attól, hogy a pont hogyan jutott el a t időpontra a P pontba. (A P rácspont szomszédos pontjain azokat a rácspontokat értjük, amelyek $r-1$ koordinátája megegyezik P megfelelő koordinátájával, egy koordinátája azonban ± 1-gyel különbözik P megfelelő koordinátájától). Ha $\vec{\zeta}_n$ jelöli azt a vektort, amely abba a rácspontba mutat, ahol a bolyongó pont a $t=n$ időpotban van, akkor a $\vec{\zeta}_n$ valószínűségi vektor-változók homogén és additív (vektoriális) Markov-láncot alkotnak, ugyanis

$$\vec{\zeta}_n-\vec{\zeta}_0=\vec{\xi}_1+\cdots+\vec{\xi}_n,$$

ahol a $\vec{\xi}_k$ valószínűségi vektorváltozók, amelyek a bolyongó pont elmozdulásai a $(k, k+1)$ időintervallumok alatt, feltevésünk szerint független és egyforma eloszlású vektorváltozók, amelyek az r-dimenziós tér koordinátatengelyeinek pozitív, ill. negatív irányával megegyező egységvektorok mindegyikével $\frac{1}{2r}$ valószínűséggel egyenlők. Az $r=1$ speciális esetben $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n$ valós értékűek, függetlenek és a ± 1 értékeket veszik fel $1/2$ valószínűséggel, másszóval a fentebb említett egydimenziós bolyongást nyerjük speciális esetként.

Először a következő, PÓLYA GYÖRGYtől származó szép tételt [1] bizonyítjuk be.

1. TÉTEL. *Az r-dimenziós rácson bolyongó mozgást végző pont* 1 *valószínűséggel végtelen sokszor visszakerül a kiindulási pontba, ha $r=1$, vagy $r=2$, míg ha $r\geqq 3$, annak a valószínűsége, hogy végtelen sokszor térjen vissza,* 0*-val egyenlő.*

BIZONYÍTÁS. Feltehetjük, hogy a bolyongó pont a $t=0$ időpontban a $\vec{0}$ kezdőpontból indult. Jelölje $P_n^{(r)}$ annak a valószínűségét, hogy n lépés után a pont újból a kiindulási pontba tér vissza, vagyis, hogy $\vec{\zeta}_n=0$. Nyilván ahhoz, hogy a pont n lépés után a kiinduló helyzetbe térjen vissza, szükséges és elégséges, hogy mind az r tengelynek mind a pozitív, mind a negatív irányába ugyanannyi lépést tegyen. Így tehát $P_{2n+1}^{(r)}=0$ és

(1.2) $$P_{2n}^{(r)}=\frac{1}{(2r)^{2n}}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\frac{2n!}{(n_1!\,n_2!\ldots n_r!)^2}=\frac{\binom{2n}{n}}{(2r)^{2n}}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\left(\frac{n!}{n_1!\ldots n_r!}\right)^2$$

tehát

(1.2a) $$P_{2n}^{(1)}=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

és

(1.2b) $$P_{2n}^{(2)}=\frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}}$$

és

(1.2c) $$P_{2n}^{(3)}=\frac{\binom{2n}{n}}{6^{2n}}\sum_{k+l\leqq n}\left(\frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}\right)^2.$$

Ilyen módon a STIRLING-formula szerint

(1.3a) $$P_{2n}^{(1)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

és

(1.3b) $$P_{2n}^{(2)}\sim\frac{1}{\pi n}.$$

Valamivel bonyolultabb $P_{2n}^{(r)}$ megbecsülése, ha $r\geqq 3$. Mivel a polinomiális együtthatók összegét ismerjük,

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\frac{n!}{n_1!\ldots n_r!}=r^n,$$

és — mint könnyen belátható — a polinomiális együtthatók közül azok a legnagyobbak, amelyekben az $n_1,\ldots,n_r$ számok egymástól legfeljebb ± 1-gyel különböznek, figyelembe véve a polinomiális együtthatóknak a STIRLING-formula segítségével nyerhető aszimptotikus kifejezését (lásd pl. [4], V. fejezet 28. feladat), adódik, hogy

$$\sum_{n_1+\cdots+n_r=n}\left(\frac{n!}{n_1!\ldots n_r!}\right)^2\leqq\max_{\Sigma n_j=n}\frac{n!}{n_1!\ldots n_r!}\,r^n=O\left(\frac{r^{2n}r^{\frac{r}{2}}}{(2\pi n)^{\frac{r}{2}-1}}\right)$$

és így

(1.3c) $$P_{2n}^{(r)}=O\left(\frac{1}{n^{\frac{r}{2}}}\right).$$

$P_{2n}^{(r)}$-re egyébként a következő integrálelőállítás és abból folyó aszimptotika adható meg:

$$P_{2n}^{(r)}=\frac{\binom{2n}{n}}{(2\pi)^r(2r)^{2n}}\int_{-\pi}^{+\pi}\cdots\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\sum_{k=1}^{r}e^{i\vartheta_k}\right|^{2n}d\vartheta_1\ldots d\vartheta_r \tag{1.4a}$$

és így

$$P_{2n}^{(r)}\sim\frac{1}{2^{r-1}}\left(\frac{r}{n\pi}\right)^{\frac{r}{2}}. \tag{1.4b}$$

Ilyen módon $\sum_{n=1}^{\infty}P_n^{(r)}=+\infty$, ha $r=1$ vagy $r=2$ és $\sum_{n=1}^{\infty}P_n^{(r)}<+\infty$ ha $r\geqq 3$.

Szükségünk lesz a következő két segédtételre, amelyek közül az első a jólismert BOREL—CANTELLI-féle lemma, a második (lásd [2]) a BOREL—CANTELLI-lemma második állításának általánosítása. A következőkben, ha A_n egy eseménysorozat, $\overline{\lim}\, A_n$ azt az eseményt jelöli, hogy az A_n események közül egyidejűleg végtelen sok következik be.

1. LEMMA. *Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tetszőleges események, amelyekre $\Sigma\mathbf{P}(A_n)<+\infty$, akkor az A_n események közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be egyidejűleg, azaz $\mathbf{P}(\overline{\lim}\, A_n)=0$. Ha $\Sigma\mathbf{P}(A_n)=+\infty$ és az A_n események teljesen függetlenek, akkor az események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be, azaz $\mathbf{P}(\overline{\lim}\, A_n)=1$.*

2. LEMMA. *Ha $\Sigma\mathbf{P}(A_n)=+\infty$ és*

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k A_l)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\right)^2}=1, \tag{1.5}$$

akkor $\mathbf{P}(\overline{\lim}\, A_n)=1$.

MEGJEGYZÉS. Az (1.5) feltétel nyilván teljesül, például, ha az A_k események páronként függetlenek.

Az 1. lemmából azonnal következik, hogy az $r\geqq 3$ esetben 1 valószínűséggel csak véges sokszor tér vissza a pont a kiindulási helyzetébe. Az $r=1$ és $r=2$ esetben, figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{P}(\vec{\zeta}_n=0,\vec{\zeta}_{n+k}=0)=\mathbf{P}(\vec{\zeta}_n=0)\,\mathbf{P}(\vec{\zeta}_k=0)=P_n^{(r)}P_k^{(r)}, \tag{1.6}$$

könnyen belátható, hogy a $\vec{\zeta}_n=0$ eseményekre, $n=1,2,\ldots$, teljesül a 2. lemma

(1.5) feltevése, ugyanis

$$\sum_{n=1}^{N} P_{2n}^{(1)} \sum_{k=0}^{N-n} P_{2k}^{(1)} \sim \frac{4N}{\pi} \sim \left(\sum_{n=1}^{N} P_{2n}^{(1)} \right)^2$$

és

$$\sum_{n=1}^{N} P_{2n}^{(2)} \sum_{k=0}^{N-n} P_{2k}^{(2)} \sim \frac{\log 2N}{\pi^2} \sim \left(\sum_{n=1}^{N} P_{2n}^{(2)} \right)^2.$$

Ennélfogva az $r=1$ és az $r=2$ esetben az említett lemma szerint a bolyongó pont 1 valószínűséggel végtelen sokszor kerül vissza a kiindulási pontba.

Vizsgáljuk meg először alaposabban, hogy milyen valószínűséggel kerül vissza a bolyongó pont oda, ahonnan elindult. Jelölje $Q_n^{(r)}$ annak valószínűségét, hogy az r-dimenziós rácson bolyongó pont n lépésben jut vissza *először* a kiindulási pontba. Akkor nyilvánvalóan fennállanak a

$$P_{2n}^{(r)} = Q_{2n}^{(r)} + \sum_{k=1}^{n-1} P_{2k}^{(r)} Q_{2n-2k}^{(r)} \tag{1.7}$$

egyenletek. Bevezetve a

$$G_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}^{(r)} x^k \tag{1.8}$$

és a

$$H_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k}^{(r)} x^k \tag{1.9}$$

jelölést, (1.7)-ből következik, hogy

$$G_r(x) = H_r(x) + G_r(x) H_r(x),$$

tehát

$$H_r(x) = \frac{G_r(x)}{1+G_r(x)} \tag{1.10a}$$

és

$$G_r(x) = \frac{H_r(x)}{1-H_r(x)}. \tag{1.10b}$$

Nyilván

$$H_r(1) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k}^{(r)} = Q^{(r)} \tag{1.11}$$

annak a valószínűségét jelöli, hogy a pont egyáltalán visszajusson a kiindulási pontjába. Elvégezve az $x \to 1-0$ határátmenetet, nyerjük, hogy ha $\sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}^{(r)}$ divergens (azaz, ha $r=1$ vagy $r=2$, akkor $Q^{(r)}=1$, míg ha $\sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}^{(r)}$ konvergens, akkor

$$Q^{(r)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}^{(r)}}{1+\sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}^{(r)}} \tag{1.12}$$

vagyis, ha $r \geqq 3$, akkor $0 < Q^{(r)} < 1$ (pl. $Q^{(3)} \sim 0{,}35$). Fennáll tehát a következő

2. TÉTEL. *A bolyongó pont az* $r \geqq 3$ *esetben az* (1.12) *alatti* 1*-nél kisebb* $Q^{(r)}$ *valószínűséggel kerül vissza a kezdőpontba.*

A fenti 1. és 2. tételhez hasonló módon bizonyítható be, hogy az 1- és 2-dimenziós esetben a bolyongó pont 1 valószínűséggel a rács minden pontjába végtelen sokszor eljut (míg $r \geqq 3$ esetben ez nem igaz).

2. §. Az egydimenziós bolyongás tüzetesebb vizsgálata

E §-ban csak az $r=1$ esettel, tehát az egyenesen bolyongó ponttal foglalkozunk.

Határozzuk meg explicit alakban a $Q_{2k}^{(1)}$ valószínűségeket.

$$G_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1, \tag{2.1}$$

tehát

$$H_1(x) = \frac{G_1(x)}{1+G_1(x)} = 1-\sqrt{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^{k-1} x^k \tag{2.2}$$

Ilyen módon

$$Q_{2k}^{(1)} = (-1)^{k-1} \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k 2^{2k-1}} = \frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)2^{2k}} = \frac{P_{2k}^{(1)}}{2k-1}. \tag{2.3}$$

Egyszerű számolással adódik (2.1) és (2.2)-ből, vagy (2.3)-ból és (1.2a)-ból, hogy fennáll a

$$Q_{2k}^{(1)} = P_{2k-2}^{(1)} - P_{2k}^{(1)} \tag{2.4}$$

azonosság[2], amelyre a következőkben szükségünk lesz.

[2] A (2.4) azonosságra valószínűségszámítási meggondoláson alapuló közvetlen bizonyítás is adható (lásd [14]) amely azon alapszik, hogy egyrészt nyilván $Q_{2k}^{(1)} = R_{2k-2} - R_{2k}$, ahol R_{2k} annak a valószínűségét jelöli, hogy $2k$ lépés alatt a bolyongó pont nem tér vissza a 0 pontba, másrészt indukcióval (2.14) alapján kimutatható, hogy $R_{2k} = P_{2k}^{(1)}$.

Jelölje a ν_1 valószínűségi változó azt, hogy hány lépés szükséges ahhoz, hogy a bolyongó pont *először* visszakerüljön a kiindulási helyére: nyilvánvalóan következik (2.3)-ból, hogy

$$\mathbf{P}(\nu_1 = 2k) = Q_{2k}^{(1)} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}} \tag{2.5}$$

és így az, hogy a $\Sigma 2kQ_{2k}^{(1)}$ sor divergens. Ez más szóval azt jelenti, hogy ν_1 *várható értéke végtelen nagy.*

Jelölje $\varphi(t)$ ν_1 karakterisztikus függvényét, akkor

$$\varphi(t) = 1 - \sqrt{1 - e^{2it}}$$

és így

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi\left(\frac{t}{n^2}\right)^n = e^{-\sqrt{-2it}}. \tag{2.6}$$

Egyszerű számolással adódik, hogy

$$e^{-\sqrt{-2it}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{ixt - \frac{1}{2x}}}{x^{3/2}} dx, \tag{2.7}$$

tehát $e^{-\sqrt{-2it}}$ annak az eloszlásnak a karakterisztikus függvénye, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{2\pi}\, x^{3/2}} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Mivel

$$\int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{2u}}}{\sqrt{2\pi}\, u^{3/2}} du = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right), \tag{2.9}$$

ahol $\Phi(y)$ a standardizált normális eloszlásfüggvény, tehát, felhasználva a karakterisztikus függvényekre vonatkozó konvergenciatételt (lásd [4], 461. o.) a következő tételt nyerjük:

3. TÉTEL. *Jelöljék $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots$ azokat az időpontokat, amikor az egyenesen bolyongó pont a kiindulási pontba tér vissza (azaz amelyekre $\zeta_\nu = 0$), akkor*

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu_k}{k^2} < x\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right), \text{ ha } x > 0. \tag{2.10}$$

BIZONYÍTÁS. A $\nu_1, \nu_n - \nu_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ változók nyilván függetlenek és egyforma eloszlásúak és

$$\frac{\nu_k}{k^2} = \frac{\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) + \cdots + (\nu_k - \nu_{k-1})}{k^2};$$

ilyen módon (2.10) következik (2.6)-ból, (2.7)-ből és (2.9)-ből.

MEGJEGYZÉS. A 3. tételben szereplő határeloszlás, amelynek karakterisztikus függvénye $e^{-\sqrt{-2it}}$, nyilván az $\alpha = \frac{1}{2}$ kitevőhöz tartozó stabilis eloszlás és így a $\{Q_{2k}^{(1)}\}$ eloszlás ennek a stabilis eloszlásnak a vonzási tartományába tartozik.[3]

A 3. tételt még egy másik alakban is felírhatjuk. Jelölje ϑ_n a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ számok közül a zérussal egyenlők számát, akkor

$$\mathbf{P}(\nu_k < n) = \mathbf{P}(\vartheta_n > k) \tag{2.11}$$

és így nyerjük a következő tételt.

4. TÉTEL. *Jelölje ϑ_n azt, hogy a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ számok közül hány egyenlő 0-sal. Akkor*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\vartheta_n}{\sqrt{n}} < y\right) = \begin{cases} 2\Phi(y) - 1, & \text{ha } y \geqq 0 \\ 0, & \text{ha } y < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Tehát $\frac{\vartheta_n}{\sqrt{n}}$ határértékben olyan eloszlású, mint egy standardizált normális eloszlású valószínűségi változó abszolút értéke.

Most áttérünk annak vizsgálatára, hogy a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ számok közül a pozitívak, ill. negatívak számának mi az eloszlása; a szimmetria kedvéért azokat a ζ_j-ket, amelyek 0-val egyenlők, de ugyanakkor ζ_{j-1} pozitív, a „pozitívak"-hoz, míg azokat a ζ_j-ket, amelyek 0-val egyenlők, de ζ_{j-1} negatív, a negatívakhoz számítjuk. (Tekintettel a 4. tételre, nem túlságosan lényeges, hogy a 0-kat hová számítjuk.) Jelölje π_n a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ számok közül az ilyen értelemben „pozitívak" számát. Be fogjuk bizonyítani a következő K. L. CHUNGtól és W. FELLERtől [18] származó tételt:

[3] A ν_k valószínűségi változó eloszlása explicit alakban is kifejezhető, mégpedig (lásd [14])

$$\mathbf{P}(\nu_k = 2n) = \frac{k}{2n-k}\binom{2n-k}{n}\frac{1}{2^{2n-k}} \qquad (n = k, k+1, \ldots) \tag{$*$}$$

($*$)-ból egy másik bizonyítás nyerhető a 3. tételre.

5. TÉTEL*

$$\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k)=\frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}}=P_{2k}^{(1)}P_{2n-2k}^{(1)} \qquad (k=0,1,\ldots,n) \tag{2.13}$$

MEGJEGYZÉS. Nyilvánvaló, hogy π_{2n} nem lehet páratlan, ugyanis π_2 csak a 2 és 0 értékeket veheti fel, aszerint, hogy $\zeta_1=+1$ vagy $\zeta_1=-1$; hasonlóképpen $\pi_{2n}-\pi_{2n-2}$ is csak a 2, ill. 0 értékeket veheti fel, ugyanis ζ_{2n-2} nyilván páros, és így, ha $\zeta_{2n-2}>0$, akkor $\zeta_{2n-2}\geqq 2$ és így $\pi_{2n}-\pi_{2n-2}=2$; ha $\zeta_{2n-2}<0$, akkor $\zeta_{2n-2}\leqq -2$ és így $\pi_{2n}-\pi_{2n-2}=0$, míg ha $\zeta_{2n-2}=0$, akkor $\pi_{2n}-\pi_{2n-2}$ értéke 0 vagy 2. Szükségünk lesz a következő azonosságra:

3. LEMMA.

$$\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=1 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.14}$$

MEGJEGYZÉS. A (2.14) reláció következménye (2.13)-nak, ugyanis ha (2.13) érvényes, akkor, összeadva az összes $\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k)$ valószínűségeket és figyelembe véve, hogy — mint már említettük — π_{2n} mindig páros, 1-et kell kapnunk. Mivel azonban nekünk (2.14)-re éppen (2.13) bizonyításához lesz szükségünk, más úton kell (2.14)-et bizonyítanunk.

BIZONYÍTÁS. Mint láttuk

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}x^k. \tag{2.15}$$

(2.15) mindkét oldalát négyzetre emelve, figyelembe véve, hogy $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ és összehasonlítva x^n együtthatóját az egyenlőség két oldalán, következik (2.14).

Lássuk most (2.13) bizonyítását. A bizonyítást teljes indukcióval fogjuk végezni. (2.13) nyilvánvalóan érvényes, ugyanis, ha $n=1$,

$$\mathbf{P}(\pi_2=0)=\mathbf{P}(\pi_2=2)=\frac{1}{2}.$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha (2.13) érvényes $n<N$-re, akkor $n=N$-re is érvényes. Jelölje újból ν_1 azt a legkisebb j számot, amelyre $\zeta_j=0$, akkor ν_1 csak páros értékeket vehet fel és

$$\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k)=\sum_{l=1}^{N}\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1=2l)+\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1>2N). \tag{2.16}$$

* $k=0$-ra $\binom{2k}{k}$ alatt 1 értendő.

Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\text{(2.17)}\qquad \mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1=2l)=\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1=2l,\ \zeta_1=+1)+$$
$$+\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1=2l,\ \zeta_1=-1),$$

továbbá

$$\text{(2.18)}\qquad \mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1=2l,\ \zeta_1=+1)=\frac{1}{2}\mathbf{P}(\pi_{2(N-l)}=2(k-l))\,\mathbf{P}(\nu_1=2l)$$

és

$$\text{(2.19)}\qquad \mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1=2l,\ \zeta_1=-1)=\frac{1}{2}\mathbf{P}(\pi_{2(N-l)}=2k)\,\mathbf{P}(\nu_1=2l).$$

Figyelembe véve, hogy (2.4) szerint

$$\mathbf{P}(\nu_1=2l)=Q_{2l}^{(1)}=P_{2l-2}^{(1)}-P_{2l}^{(1)},$$

következik, hogy fennáll a

(2.20)
$$\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}[\mathbf{P}(\pi_{2(N-l)}=2k)+\mathbf{P}(\pi_{2(N-l)}=2(k-l))]\,(P_{2l-2}^{(1)}-P_{2l}^{(1)})+$$
$$+\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1>2N)$$

rekurzió. A $\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1>2N)$ tag nyilván mindig 0, kivéve ha $k=0$ vagy $k=N$, ez esetben

$$\text{(2.21)}\qquad \mathbf{P}(\pi_{2N}=2N,\ \nu_1>2N)=\mathbf{P}(\pi_{2N}=0,\ \nu_1>2N)=\frac{1}{2}\mathbf{P}(\nu_1>2N),$$

és (2.4) szerint

$$\text{(2.22)}\qquad \frac{1}{2}\mathbf{P}(\nu_1>2N)=\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{+\infty}\mathbf{P}(\nu_1=2k)=\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{+\infty}Q_{2k}^{(1)}=\frac{1}{2}P_{2N}^{(1)}=\frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N+1}}.$$

Mármost tegyük fel, hogy (2.13) igaz $n=1,2,\ldots,N-1$-re, akkor a (2.14) azonosság miatt (2.20)-ból némi számolással következik, hogy (2.13) $n=N$-re is igaz. Ezzel az 5. tételt bebizonyítottuk.

Az 5. tétel segítségével most bebizonyítjuk az ún. *„arcus-sinus törvényt"*, amelyet a következő tétel fejez ki:

6. TÉTEL.

$$\text{(2.23)}\qquad \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\pi_n}{n}<x\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x},\quad \text{ha } 0\leqq x\leqq 1.$$

BIZONYÍTÁS. A STIRLING-formula szerint[4]

$$\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right),$$

tehát ha $0 < y < x < 1$, akkor

$$\mathbf{P}\left(y \leqq \frac{\pi_{2n}}{2n} < x\right) \sim \sum_{k=[ny]+1}^{[nx]} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=[ny]+1}^{[nx]} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \cdot \frac{1}{n}. \tag{2.24}$$

és így, mivel a (2.24) jobboldalán álló összeg az $\frac{1}{\pi}\int\limits_x^y \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ integrál RIEMANN-féle közelítő összegeként fogható fel, következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(y \leqq \frac{\pi_{2n}}{2n} < x\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_y^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{x} - \arcsin\sqrt{y}\right), \tag{2.25}$$

ha $0 < y < x < 1$.

(2.25)-ből könnyen következik, hogy bármely x-re $(0 < x < 1)$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi_{2n}}{2n} < x\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}. \tag{2.26}$$

Mármost $\pi_{2n} \leqq \pi_{2n+1} \leqq \pi_{2n} + 1$, így tehát $\frac{\pi_{2n}}{2n}$ és $\frac{\pi_{2n+1}}{2n+1}$ határeloszlása azonos. Ezzel a 6. tételt bebizonyítottuk.

A 6. tétel egy másik lehetséges bizonyítása, amely elegánsabb, de több segédeszközt használ fel, a 3. lemma következő általánosításán alapszik.

4. LEMMA.

$$\frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} e^{it(2k-n)} = P_n(\cos t), \tag{2.27}$$

ahol $P_n(x)$ *az n-edik* LEGENDRE-*polinom, azaz* $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

A 4. lemmát a következőképpen bizonyíthatjuk be.

A (2.27) baloldalán álló összeg nyilván egyenlő x^n együtthatójával az

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^{it}x)(1-e^{-it}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\cos tx + x^2}}$$

[4] Itt a Stirling-formula következő alakjára van szükség: $k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

függvény hatványsorában. Mármost ismeretes (l. pl. [3], II. 291. o.), hogy

$$(2.28)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-2\cos t x + x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos t) x^n,$$

ahol $P_n(t)$ az n-edik LEGENDRE-polinom, amivel a 4. lemmát bebizonyítottuk. A 4. lemma segítségével a 6. tétel a következőképpen bizonyítható be.

BIZONYÍTÁS. (2.27)-ből

$$(2.29)\qquad \mathbf{M}\left(e^{it\frac{\pi_{2n}}{2n}}\right) = e^{\frac{it}{2}} P_n\left(\cos\frac{t}{2n}\right).$$

LAPLACE egy klasszikus formulája szerint (lásd [3], loc. cit.)

$$(2.30)\qquad P_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\vartheta + i\cos\varphi\sin\vartheta)^n\, d\varphi,$$

(2.29)-ből és (2.30)-ból nyerjük, hogy

$$(2.31)\qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}\left(e^{it\frac{\pi_{2n}}{2n}}\right) = \frac{e^{\frac{it}{2}}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\frac{it\cos\varphi}{2}}\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{itx}}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx.$$

Tekintettel a karakterisztikus függvényekre vonatkozó folytonossági tételre (lásd [4]), (2.31)-ből a 6. tétel állítása leolvasható. A 4. lemmából látható, hogy a LEGENDRE-féle polinomoknak egyszerű valószínűségszámítási interpretációja adható meg: $P_n(\cos t)$ nem más, mint a $\pi_{2n}-n$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, ahol a π_{2n} valószínűségi változó megadja, hogy a fej-vagy-írás játéknál egy játékos $2n$ dobás során hányszor lesz nyerésben.

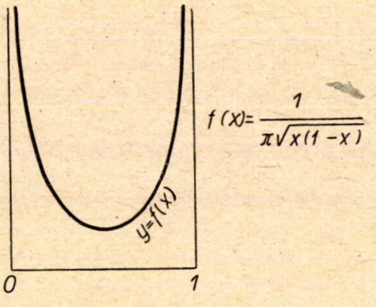
A 4. lemma segítségével könnyen kiszámíthatjuk π_{2n} momentumait. Szimmetria okokból nyilvánvaló, hogy $\mathbf{M}(\pi_{2n}) = n$. A következőképpen nyerjük (2.27)-ből π_{2n} szórását

$$\mathbf{D}^2(\pi_{2n}) = -\left[\frac{d^2 P_n(\cos t)}{dt^2}\right]_{t=0} = P_n'(1) = \binom{n+1}{2},$$

tehát

$$\mathbf{D}(\pi_{2n}) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

MEGJEGYZÉS. A 6. tétel eredménye egy igen érdekes és paradox jelenséget ír le. Vegyük észre ugyanis, hogy az $F(x) = \frac{2}{\pi}\arc\sin\sqrt{x}$ eloszlásfüggvény deriváltja $F'(x) = f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ az $x = \frac{1}{2}$ pontra szimmetrikus és az $x=\frac{1}{2}$ pontban veszi fel a minimumát. Ez azt jelenti, hogy $\frac{\pi_n}{n}$ legvalószínűtlenebb értéke az $\frac{1}{2}$ érték, és minél távolabb van x az $\frac{1}{2}$-től, annál nagyobb valószínűséggel lesz $\frac{\pi_n}{n}$ x közelében $(0<x<1)$. Az ember éppen ennek az ellenkezőjét várná: az látszik természetesnek, ha a bolyongó pont a kb. fele időt töltené a pozitív féltengelyen és a fele időt a negatív féltengelyen. Ez azonban, mint a 6. tétel mutatja, nem igaz. A fej-vagy-írás játék terminológiájával: azt hinné az ember, hogy ha τ jelenti a játék tartalmának azt a hányadát, amely alatt az első játékos „nyerésben van", akkor τ legvalószínűbb értéke $\frac{1}{2}$; ezzel azonban ennek éppen az ellenkezője igaz: *az* $\frac{1}{2}$ *érték* τ *legvalószínűtlenebb értéke!* Ha az ember jobban utánagondol, ez az első pillanatra meglepő eredmény érthetővé válik, hiszen ζ_n lassan változik $(|\zeta_{n+1}-\zeta_n|=1)$, ha tehát ζ_n elér egy „nagy" pozitív értéket, akkor hosszú ideig pozitív marad, hasonlóképpen, ha egy nagy negatív értéket ér el, akkor hosszú ideig negatív marad. Márpedig, ha n nagy, a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ számsorozatban kell lenni nagy értékeknek (az iterált logaritmustétel szerint $\max_{k\leq n}|\zeta_k|$ 1 valószínűséggel végtelen sok n-re megközelíti a $\sqrt{2n\log\log n}$ értéket).



1. ábra

Ezt a paradox jelenséget P. Lévy fedezte fel (lásd [5]).

Megjegyzendő, hogy a 6. tétel messzemenően általánosítható. Erdős P. és M. Kac [6] bebizonyították, hogy ha a ξ_k teljesen független változókra $\mathbf{M}(\xi_k)=0$, $\mathbf{D}(\xi_k)=1$ és teljesül a Lindeberg-féle feltétel, $\zeta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ és π_n jelöli a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ számok közül a pozitívak számát, akkor (2.22) érvényes. E. Sparre-Andersen [7] pedig kimutatta, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ egyforma szimmetrikus és folytonos eloszlású független valószínűségi változók, akkor érvényes a

$$\mathbf{P}(\pi_n=k)=\frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}} \tag{2.32}$$

pontos formula, amiből következik, hogy szimmetrikus eloszlású változók esetében (2.22) akkor is érvényes, ha a változók szórása nem létezik. A tétel további általánosításaira vonatkozólag utalunk a [15], [16] és [17] dolgozatokra.

Vizsgáljuk most meg ϑ_n pontos eloszlását. Páros n esetében ezt az eloszlást könnyen meghatározhatjuk, amennyiben érvényes a következő, W. FELLERtől [14] származó

7. TÉTEL.

$$\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k)=\frac{2^k}{2^{2n}}\binom{2n-k}{n}. \tag{2.33}$$

BIZONYÍTÁS. A teljes valószínűség tétele szerint, ha újból ν_1 jelöli azt a legkisebb $m \geqq 1$ számot, amelyre $\zeta_m=0$,

$$\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k)=\sum_{r=1}^{n-1}\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k,\ \nu_1=2r)+\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k,\ \nu_1\geqq 2n).$$

Így tehát fennáll a következő rekurzív reláció

$$\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k)=\sum_{r=1}^{n-1}\mathbf{P}(\vartheta_{2n-2r}=k-1)\,\mathbf{P}(\nu_1=2r)+\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k,\ \nu_1\geqq 2n).$$

Ebből (2.33) indukcióval könnyen bebizonyítható, hasonlóan ahhoz, ahogy az 5. tételt bebizonyítottuk. (2.33)-ból egy újabb bizonyítást nyerhetünk a 4. tételre.

A 7. tételből könnyen levezethető a *Stirling*-formula segítségével, hogy $\mathbf{M}(\vartheta_n)\sim\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

A 6. tétel a következő alakban is kimondható: *Legyen*

$$\varepsilon_k=\operatorname{sign}\zeta_k=\begin{cases}1 & \textit{ha } \zeta_k>0 \textit{ vagy ha } \zeta_k=0 \textit{ és } \zeta_{k-1}=1\\ -1 & \textit{ha } \zeta_k<0 \textit{ vagy ha } \zeta_k=0 \textit{ és } \zeta_{k-1}=-1,\end{cases}$$

akkor

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{n}<x\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1+x}{2}\qquad(-1\leqq x\leqq +1).$$

Ilyen módon $\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{n}$ nem konvergál 0-hoz, bár ez volna „plauzibilis". Ezzel szemben igaz a következő, ERDŐS PÁLtól és G. HUNTtól [8] származó

8. TÉTEL.

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon_k}{k}}{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}}=0\right)=1. \tag{2.34}$$

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, hogy $M(\varepsilon_n)=0$ és $M(\varepsilon_k^2)=1$. Számítsuk ki az $M(\varepsilon_n\varepsilon_m)$ várható értékét, $m>n$. Nyilván

$$\mathbf{M}(\varepsilon_n\varepsilon_m)=2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\zeta_n=k)(2\mathbf{P}(\zeta_m>0|\zeta_n=k)-1)=$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\zeta_n=k)\mathbf{P}(-k<\zeta_{m-n}\leqq 0).$$

Mivel az n-edrendű $\frac{1}{2}$ paraméterű binomiális eloszlásnak a legnagyobb tagja az $n/2$-höz legközelebbi tag, és az aszimptotikusan $\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$,

$$\mathbf{P}(-k<\zeta_{m-n}\leqq 0)\leqq\frac{C_1 k}{\sqrt{m-n}}$$

és így

$$\mathbf{M}(\varepsilon_n\varepsilon_m)\leqq C_2\sqrt{\frac{n}{m-n}}. \tag{2.35}$$

(Itt és a következőkben $C_1, C_2, C_3, \ldots$ pozitív állandók.) Ha $m-n\leqq n$, akkor (2.35) helyett a triviális

$$|\mathbf{M}(\varepsilon_n\varepsilon_m)|\leqq 1$$

egyenlőtlenséget használjuk. Ilyen módon

$$\mathbf{M}\left(\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^2\right)\leqq c_3\log N.$$

De akkor, bevezetve a $\Delta_N=\dfrac{\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_n}{n}}{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}}$ jelölést, $M(\Delta_N)=0$ és $M(\Delta_N^2)\leqq 1$ és így a *Csebisev*-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{P}(|\Delta_N|>\varepsilon)\leqq\frac{C_4}{\varepsilon^2\log N}. \tag{2.36}$$

Ennélfogva a $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(|\Delta_{2^{k^2}}|>\varepsilon)$ sor tetszőleges $\varepsilon>0$-ra konvergens és így az 1. lemma szerint 1 valószínűséggel

$$|\Delta_{2^{k^2}}|\leqq\varepsilon \text{ ha } k \text{ elég nagy.}$$

Azonban, ha $2^{k^2} \leqq n < 2^{(k+1)^2}$, akkor

$$|\Delta_n| \leqq \Delta_{2^{k^2}} + \frac{C_5}{k}.$$

Így tehát 1 valószínűséggel $|\Delta_n| \leqq 2\varepsilon$, hacsak n elég nagy; mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, tehát (2.34) fennáll.

Befejezésül még néhány tételt említünk meg az egydimenziós bolyongás legnagyobb „kilengésére" vonatkozólag.

9. TÉTEL.

$$(2.37)\qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n} \zeta_k < x\sqrt{n}\right) = \begin{cases} 2\Phi(x)-1 & ha \quad x \geqq 0 \\ 0 & ha \quad x < 0. \end{cases}$$

10. TÉTEL.

$$(2.38)\qquad \lim \mathbf{P}\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n} |\zeta_k| < x\sqrt{n}\right) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8x^2}}}{2k+1} & \text{ha} \quad x > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqq 0. \end{cases}$$

A 9. tétel levezethető például[5] a következő pontos képletből[6] (lásd [4], V. fejezet 7. feladat)

$$(2.39)\qquad \mathbf{P}\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n} \zeta_k < m\right) = 1 - \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \binom{m+2k}{k} \frac{m}{m+2k} \cdot \frac{1}{4^k} \qquad (1 \leqq m \leqq n).$$

ERDŐS PÁL és M. KAC bebizonyították [9], hogy a 9. és 10. tételek messzemenően általánosíthatók és kiterjeszthetők egyforma eloszlású független valószínűségi változók sorozatainak részletösszegeire. E tételek nem egyforma eloszlású változókra való kiterjesztésére vonatkozólag lásd a [10] dolgozatot.

Az

$$(2.40)\qquad L(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8x^2}}}{2k+1}$$

függvény értékeinek táblázatát PALÁSTI ILONA készítette el (lásd pl. [13]).

Érdemes összehasonlítani a 9. és 10. tételt B. V. GNEDENKO és V. SZ. KOROLJUK tételeivel (lásd [4], 601. o.).

[5] A 9. tétel egy másik lehetséges bizonyítására vonatkozólag lásd a [11] dolgozatot.

[6] $m=0$, $k=0$ esetben $\dfrac{m}{m+2k}$ alatt 1 értendő.

A tételeket a következő alakban írhatjuk fel:

11. TÉTEL.

$$(2.41)\qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big(\max_{1\leq k\leq 2n} \zeta_k < x\sqrt{2n}\,|\,\zeta_{2n}=0\big) = \begin{cases} 1-e^{-2x^2} & ha \quad x\geqq 0 \\ 0 & ha \quad x<0. \end{cases}$$

12. TÉTEL

$$(2.42)\qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\max_{1\leq k\leq 2n} |\zeta_k| < x\sqrt{2n}\,|\,\zeta_{2n}=0\big) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2} & x>0 \\ 0 & x\leqq 0. \end{cases}$$

A 11. és 12. tételek tehát csak olyan utakra vonatkoznak, amelyeknél a bolyongó pont $2n$ lépés után visszatér kiindulási pontjába. Érthető, hogy e feltétel mellett a pont általában kevésbé távolodik csak el a 0 pontból, mint a feltétel nélküli „szabad” bolyongásnál. Ez fejeződik ki pl. abban, hogy a (2.41) alatti határeloszlás várható értéke

$$\int_0^\infty 4x^2 e^{-2x^2}\,dx = \frac{1}{4},$$

míg a (2.38) alatti határeloszlás várható értéke $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sim 0{,}78.$

Visszatérve az arcus-sinus törvényre, érdekes megvizsgálni, hogyan módosul π_{2n} eloszlása, ha feltesszük, hogy ismerjük s_{2n} értékét. Erre vonatkozólag az első — rendkívül meglepő — eredmény K. L. CHUNGtól és W. FELLERtől származik[7], és a következőképpen szól:

5. LEMMA. *Azon feltevés mellett, hogy* $s_{2n}=0$, π_{2n} *egyenlő valószínűséggel veszi fel a* $0, 2, 4, \ldots, 2n$ *értékeket, azaz*

$$(2.43)\qquad \mathbf{P}(\pi_{2n}=2k\,|\,s_{2n}=0) = \frac{1}{n+1} \qquad (k=0, 1, \ldots, n).$$

MEGJEGYZÉS: (2.43) nyilván ekvivalens a következő állítással:

$$(2.44)\qquad \mathbf{P}(\pi_{2n}=2k,\, s_{2n}=0) = \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)2^{2n}}.$$

(2.43) úgy is fogalmazható, hogy ha a fej vagy írás játéknál $2n$ dobás során mindkét játékos ugyanannyiszor (tehát n-szer) nyert, akkor e feltétel mellett egyenlően valószínű, hogy az első játékos $0, 2, 4, \ldots, 2n$ játék során vezetett. (2.43), ill. (2.44) egyszerű bizonyítása megtalálható a [19] tankönyvben.

[7] Lásd [18]. A [20] dolgozat e tétel általánosításával foglalkozik; még általánosabb alakban bizonyította be e tételt SPARRE ANDERSEN a [16] dolgozatban.

Abból a célból, hogy π_{2n} feltételes eloszlását minden $s_{2n}=2\lambda$ feltétel mellett meghatározhassuk, az 5. lemma mellett szükségünk lesz a következő, I. BERTRAND-tól származó segédtételre is.

6. LEMMA. *Vizsgáljuk az összes lehetséges olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+m}$ számsorozatokat, amelyek tagjai közül n darab $+1$-gyel, a többi m darab pedig -1-gyel egyenlő. (Az ilyen számsorozatok száma nyilván $\binom{n+m}{n}$.) Legyen $n>m$, és $s_k=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k$. A vizsgált számsorozatok közül azok száma, amelyeknél az $s_1, s_2, \ldots, s_{n+m}$ számok mind pozitívak $\frac{n-m}{n+m}\binom{n+m}{m}$.*

MEGJEGYZÉS: BERTRAND a 6. lemma állítását a következőképpen interpretálta: ha egy választásnál két jelöltre lehetett szavazni, A-ra és B-re, és az A jelölt n szavazatot, a B jelölt pedig m szavazatot kapott, ahol $n>m$, és a szavazatokat egyenként veszik ki az urnából, és folyamatosan számolják, akkor $\frac{n-m}{n+m}$ annak a valószínűsége, hogy az összeszámlálás során az A jelölt végig „vezessen".

A 6. lemma bizonyítása megtalálható [4]-ben (II. fej. 36. feladat.).

Az 5. és 6. lemma segítségével könnyen bebizonyítható a következő tétel:

13a TÉTEL[8].

$$\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k, s_{2n}=-2j)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{j\leq l\leq n-k}\binom{2n-2l}{n-l}\frac{1}{n-l+1}\cdot\frac{j}{l}\cdot\binom{2l}{l-j}, \tag{2.45}$$

ha $0\leq k\leq n$, és $j=0, 1, \ldots, n$.

A 13a tételből könnyen következik a

13b TÉTEL.

$$\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k, s_{2n}=+2j)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{j\leq l\leq k}\binom{2n-2l}{n-l}\frac{1}{(n-l+1)}\cdot\frac{j}{l}\binom{2l}{l-j}. \tag{2.46}$$

Ha ugyanis $\bar{\pi}_{2n}=2n-\pi_{2n}$ jelöli az $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}$ számok közül a negatívok számát (egy 0 „negatív"-nak, ill. „pozitív"-nak számít, aszerint, hogy a sorozat megelőző eleme negatív vagy pozitív), akkor szimmetria okokból

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k, s_{2n}=+2j)&=\mathbf{P}(\bar{\pi}_{2n}=2n-2k, s_{2n}=+2j)=\\&=\mathbf{P}(\pi_{2n}=2n-2k, s_{2n}=-2j)\end{aligned} \tag{2.47}$$

és így (2.46) következik (2.45)-ből.

[8] Ha $j=0$, akkor a (2.45) összeg első tagjában szereplő $\frac{0}{0}$ hányadoson 1 értendő; ebben a speciális esetben (2.45) redukálódik (2.44)-re.

A 13a és 13b tételekből némi számolással következik a

14. TÉTEL. *Legyen* y_n *egy tetszőleges egész számokból álló számsorozat* $(|y_n| \leqq n)$, *amelyre* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{\sqrt{n}} = y$. *Akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi_n}{n} \leqq x \,\middle|\, s_n = y_n\right) = \int_0^x f(t|y)\,dt, \tag{2.48}$$

ahol ha $y \geqq 0$,

$$f(x|y) = \frac{2e^{y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{y}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2}\,du}{\left(1-\frac{y^2}{u^2}\right)^{3/2}} \qquad 0 \leqq x \leqq 1, \tag{2.49}$$

míg ha $y \leqq 0$

$$f(x|y) = \frac{2e^{y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|y|}{\sqrt{1-x}}}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2}\,du}{\left(1-\frac{y^2}{u^2}\right)^{3/2}} = f(1-x|-y). \tag{2.50}$$

MEGJEGYZÉS: Ha $y=0$, akkor $f(x|0) \equiv 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$, vagyis az $\frac{s_n}{\sqrt{n}} \to 0$ feltevés mellett $\frac{\pi_n}{n}$ határeloszlása egyenletes a $(0, 1)$ intervallumban. Ez persze közvetlenül is következik az 5. lemmából.

A 14. tételből könnyen levezethetők az alábbi tételek:

15a TÉTEL.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi_n}{n} \leqq x \,\middle|\, s_n \geqq 0\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \sqrt{\frac{u}{1-u}}\,du = \tag{2.51}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right).$$

15b TÉTEL.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi_n}{n} \leqq x \,\middle|\, s_n \leqq 0\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \sqrt{\frac{1-u}{u}}\,du = \tag{2.52}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x(1-x)}\right).$$

Megjegyzés: (2.52) nyilván szimmetria-meggondolással következik (2.51)-ből, ha abba x helyett $(1-x)$-et helyettesítünk.

A 15a és 15b tételek E. SPARRE ANDERSENtől származnak (l. [16]).

A 15a és 15b tételek azt mutatják, hogy azon feltevés mellett, hogy a játék az első játékosra nézve kedvezően végződött, megváltozik $\frac{\pi_n}{n}$ határeloszlása, ha az A játékos a játék végeredményeként nyert, akkor igen valószínű, hogy a játék tartamának nagy része alatt nyerésben volt. Figyelembevéve, hogy $\mathbf{P}(s_n \geqq 0) = \mathbf{P}(s_n \leqq 0) \to \frac{1}{2}$, (2.51)-ből és (2.52)-ből az arcus-sinus tétel eredeti alakja következik, tekintve, hogy a (2.51) és (2.52) jobboldalán álló eloszlásfüggvények számtani közepe $\frac{2}{\pi}$ arc sin $\sqrt{x}$.

MEGJEGYZÉS (a korrektúra olvasásakor, 1960. V. 25-én). E. SPARRE ANDERSEN volt szíves a figyelmemet felhívni arra, hogy a 14. tétel megtalálható K. L. CHUNG és W. FELLER [18] dolgozatában; [18]-ban a szóban forgó határeloszlás egy, a fent megadottól különböző, de azzal ekvivalens alakban szerepel.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] PÓLYA, G.: Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend der Irrfahrt im Strassennetz, *Math. Ann.*, 84 (1921), 149—160.

[2] ERDŐS, P. — RÉNYI, A.: On Cantor's series with convergent $\Sigma \frac{1}{q_n}$, *Annales Univ. Sci. Budapest,* 2 (1959), 93—109.

[3] PÓLYA, G. — SZEGŐ, G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, 1925.

[4] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás*, Budapest, Tankönyvkiadó, 1954.

[5] LÉVY, P.: Sur certaine processus stochastiques homogènes, *Comp. Math.* 7 (1939), 283—339.

[6] ERDŐS, P. — KAC, M.: On the number of positive sums of independent random variables, *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947), 1011—1020.

[7] SPARRE ANDERSEN, E.: On the number of positive sums of random variables, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, (1949), 27—36.

[8] ERDŐS, P. — HUNT, G.: Changes of sign of sums of random variables, *Pacific Journal of Math.* 3 (1953), 678—679.

[9] ERDŐS, P. — KAC, M.: On certain limit theorems of the theory of probability, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), 292—302.

[10] RÉNYI, A.: On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4 (1953), 199—231.

[11] RÉNYI, A.: On the theorem of Borel and the law of the iterated logarithm, *Matematisk Tidsskrift.* B (1948), 41—48.

[12] ERDŐS, P. — TAYLOR, S. J.: Some problems concerning the structure of random walk paths, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, és Some intersection properties of random walk paths, *uo.*, *sajtó alatt.*

[13] JANKO, J.: *Statistické tabulky,* Praha, 1958. 246. o.

[14] Feller, W.: The numbers of zeros and of changes of sign in a symmetric random walk. *L'Enseignement mathématique* **3** (1957), 229—235.

[15] Sparre Andersen, E.: On sums of symmetrically dependent random variables, *Skandinavisk Aktuarietidskrift* **36** (1953), 123—138.

[16] Sparre Andersen, E.: On the fluctuations of sums of random variables, I., *Mathematica Skandinavica* **1** (1953), 263—285.; II. *uo.* **2** (1954), 193—223.

[17] Spitzer, F.: A combinatorial lemma and its application to probability theory, *Transactions of the American Mathematical Society* **82** (1956), 323—339.

[18] Chung, K. L. — Feller, W.: On fluctuations in coin-tossing, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35** (1949), 605—608.

[19] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. I. 2nd edition Wiley, New York, 1957.

[20] Lipschutz, Miriam: Generalization of a theorem of Chung and Feller, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 659—670.

(Beérkezett: 1960. III. 30.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete.

A KOMPLEX-RENDŰ ÁLTALÁNOSÍTOTT WEYL-INTEGRÁLOK ÉS DERIVÁLTAK EGYSÉGES ELMÉLETÉHEZ, II.*

Írta: MIKOLÁS MIKLÓS

7. §. W_s-limeszek a $0<\Re(s)\leqq 1$ sávban és Weyl-féle törtrendű integrálok; a zetafüggvényre emlékeztető további előállítások

1. Külön figyelmet, tüzetesebb vizsgálatot igényel a (4. 2), (4. 3) sorok és a (4. 4) integrál viselkedése a $\sigma>1$ alaptartományhoz közvetlenül csatlakozó $0<\sigma\leqq 1$ sávban.

Látni fogjuk pl., hogy s-et e sávban rögzítve, bármely (L-integrálható) függvény W_s-limitálható legalább *majdnem mindenütt* a $0<x<1$ intervallumban; ha pedig $f(u)$-t a RIESZ FRIGYES-féle $L^q(0,1)$ $(1<q\leqq\infty)$ osztályok[42] valamelyikéből választjuk, akkor $f_{[s]}(x)$ létezése $0<\sigma\leqq 1$ egy alkalmas részéből vett s-értékek mellett *minden* x-re is biztosítva van.

2. Részletesebben és pontosabban:

VI. tétel. 1. *Jelentse s a $0<\sigma\leqq 1$ sávnak egy pontját.*

Tetszőleges pozitív λ mellett fennáll a

$$(7.1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]\,dt= \\ \displaystyle =\cos\frac{\pi s}{2}\cdot \overset{(C,\lambda)}{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}+\sin\frac{\pi s}{2}\cdot \overset{(C,\lambda)}{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s}\end{cases}$$

kapcsolat az $\int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{P}_s(t)\,dt$, $\int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{Q}_s(t)\,dt$ *integrálok bármely közös* $(0,1)$*-beli Lebesgue-pontjában*[43] *s így m. m. x-re; a jobboldali sorok majdnem mindenütt konvergensek is. Speciálisan:* (7. 1) *minden x-re érvényes, midőn $\sigma=1$, sőt $s=1$ esetén a (C,λ)-szummák összegekkel helyettesíthetők.*

* A dolgozat I. része az MTA III. Osztályának Közleményei X/1. (1960) számában (59–91. old.) jelent meg. A fejezetek és a tételek számozása az előző részek számozásához kapcsolódik. A teljes irodalomjegyzéket az I. rész tartalmazza.

[42] Mint ismeretes, $L^q(a',a'')$ azoknak az (a',a'')-ben mérhető f függvényeknek az összességét jelenti, melyekre itt $|f|^q$ L-integrálható; $L^\infty(a',a'')$-t az alábbiakban azonosítjuk $B(a',a'')$-vel, az (a',a'')-ben korlátos, L-integrálható függvények osztályával.

[43] Egy $g(u)$ függvénynek x LEBESGUE-pontja, ha $\int_x^{x+h}|g(u)-g(x)|\,du=o(h)\ (h\to 0)$.

2. *Tegyük fel, hogy* $f(u) \in L^q(0,1)$ (q *fix*, $1 \leqq q \leqq \infty$).

Akkor (7. 1) *minden* x*-re érvényes* (C, λ)*-szummabilitás helyett konvergenciával, feltéve, hogy* $\sigma > 1/q$; *e félsíkbeli* s*-értékekre egyúttal* $f_{[s]}(x)$ *létezik és folytonos* $(0,1)$*-ben, nevezetesen*

$$f_{[s]}(x) = \int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t) - \mathfrak{Z}_s(x)]\,dt \qquad \left(\sigma > \frac{1}{q}\right). \tag{7. 2}$$

Itt a $q = \infty$ *esetben* $1/q$ *helyén* 0 *értendő; ha* $q = 1$, (7. 2) *és* $f_{[s]}(x)$ $(0,1)$*-beli folytonossága a* $\sigma = 1$ *határegyenesen is fennáll.*

BIZONYÍTÁS. 1. Legyen s fix, $0 < \sigma \leqq 1$.
Tekintsük a

$$\Phi_s(x) = \int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{P}_s(t)\,dt, \qquad \tilde{\Phi}_s(x) = \int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{Q}_s(t)\,dt \tag{7. 3}$$

integrálokat (vö. (3. 17), (3. 18)); minthogy ezek $L(0,1)$-beli periodikus függvények konvolúciói, mindkettő szintén L-integrálható és m. m. x-re létezik $(0,1)$-ben. Továbbá könnyen belátható, hogy a (7. 1) jobboldalán előforduló két sor $\Phi_s(x) - \alpha_0\mathfrak{P}_s(x)$, ill. $\tilde{\Phi}_s(x) - \alpha_0\mathfrak{Q}_s(x)$ $(0,1)$-hez tartozó FOURIER-sora.[44] — Így a kiterjesztett FEJÉR—LEBESGUE-féle szummáció-tétel alapján[45] fennáll ($\lambda > 0$)

$$\begin{cases} \Phi_s(x) = \overset{(C,\lambda)}{\sum_{n=1}^{\infty}} 2(2n\pi)^{-s}(\alpha_n \cos 2n\pi x + \beta_n \sin 2n\pi x), \\ \tilde{\Phi}_s(x) = \overset{(C,\lambda)}{\sum_{n=1}^{\infty}} 2(2n\pi)^{-s}(\alpha_n \sin 2n\pi x - \beta_n \cos 2n\pi x) \end{cases} \tag{7. 4}$$

$\Phi_s(x)$, ill. $\tilde{\Phi}_s(x)$ összes LEBESGUE-pontjaiban, tehát (vö. (3. 1)) egyúttal (7. 1) is a szóban forgó két halmaz közös részében. A $0 < x < 1$ intervallum azon pontjai, melyekben (7. 1) nem érvényes, nyilván nullamértékű halmazt alkotnak, mivel — mint ismeretes — bármely L-integrálható függvényre nézve az integrációs köz m. m. helye LEBESGUE-pont.

Vegyük még észre, hogy n^{-s} $(n = 1, 2, \ldots)$ $\sigma > 0$ mellett ún. quasi-konvex sorozat, úgyhogy alkalmazhatóvá válik egy *konvergencia-faktorokkal* kapcsolatos lemma[46]; innen adódik, hogy $f(u)$ $(0,1)$-hez tartozó FOURIER-sorának és a megfelelő konjugált sornak m. m. szummabilis volta, valamint az e sorok n-edik szeletére vonatkozó ismert $o(\log n)$ becslés (m. m.!) együttvéve maga után vonja a $\Sigma 2(2n\pi)^{-s}a_n(x)$, $\Sigma 2(2n\pi)^{-s}b_n(x)$ sorok m. m. való konvergenciáját.

[44] Vö. pl. [18], 10, Th. 4.; 23, Th. 29.
[45] L. pl. [58], 49, Th. 3.31.
[46] Vö. [58], 58.

Ha $\sigma = 1$, $\mathfrak{P}_s(t)$ és $\mathfrak{Q}_s(t)$ az 1. lemma szerint korlátos a $0 < t < 1$ intervallumban, amiből egy konvolúció-tétel[47] alapján $\Phi_s(x)$ és $\tilde{\Phi}_s(x)$ $(0, 1)$-beli *folytonossága* következik. Ennélfogva (7. 4) és (7. 1) esetünkben minden $x \in (0, 1)$ helyen érvényes; az $s = 1$ pontbeli konvergenciára vonatkozó állítás már előbb igazolást nyert (vö. (2. 12)).

Amennyiben (7. 1) fennáll egy rögzített x helyen $s = s_0$ mellett, akkor egy DIRICHLET-sorokra vonatkozó ABEL-típusú tételt (vö.[30]) felhasználva írhatjuk

$$(7.5)\quad \begin{cases} f_{[s_0]}(x) = \lim\limits_{\sigma \to \sigma_0 + 0} \left\{ \cos \dfrac{\pi s}{2} \cdot \overset{(C,1)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}} \dfrac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s} + \right. \\ \left. + \sin \dfrac{\pi s}{2} \cdot \overset{(C,1)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}} \dfrac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s} \right\} = \cos \dfrac{\pi s_0}{2} \cdot \overset{(C,1)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}} \dfrac{2a_n(x)}{(2n\pi)^{s_0}} + \\ + \sin \dfrac{\pi s_0}{2} \cdot \overset{(C,1)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}} \dfrac{2b_n(x)}{(2n\pi)^{s_0}} = \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_{s_0}(t) - \mathfrak{Z}_{s_0}(x)]\,dt. \end{cases}$$

2. Legyen $f(u) \in L^q(0, 1)$, $1 < q < \infty$.

Most alkalmazzuk a PARSEVAL-reláció következő (mélyebben fekvő) élesítését[48]: ha $\varphi(u) \in L^q(0, 1)$, $\psi(u) \in L^{q'}(0, 1)$, ahol $1 < q < \infty$, $1 < q' < \infty$; $1/q + 1/q' = 1$, továbbá mindkét függvény 1 szerint periodikus és

$$(7.6)\quad \begin{cases} \varphi(u) \sim A_0 + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2n\pi u + B_n \sin 2n\pi u), \\ \psi(u) \sim A_0' + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n' \cos 2n\pi u + B_n' \sin 2n\pi u), \end{cases}$$

akkor

$$(7.7)\quad \int_0^1 \varphi(u)\,\psi(u)\,du = A_0 A_0' + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (A_n A_n' + B_n B_n').$$

A $\varphi(u)$, $\psi(u)$ függvények szerepét az $f(x-u)$, $\mathfrak{P}_s(u)$, majd az $f(x-u)$, $\mathfrak{Q}_s(u)$ függvénypárnak átadva, arra jutunk, hogy bármely $(0, 1)$-beli x helyen

$$(7.8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{P}_s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2(2n\pi)^{-s} (\alpha_n \cos 2n\pi x + \beta_n \sin 2n\pi x), \\ \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{Q}_s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2(2n\pi)^{-s} (\alpha_n \sin 2n\pi x - \beta_n \cos 2n\pi x), \end{cases}$$

47 L. [18], 11, Th. 5.
48 L. [58], 154, (IV).

hacsak $\mathfrak{P}_s(u)$ és $\mathfrak{Q}_s(u)$ az $L^{q'}(0,1)$ osztályhoz tartozik. De az 1. lemma folytán az utolsó kikötések ekvivalensek azzal, hogy $u^{q'(\sigma-1)} \in L(0,1)$, azaz, hogy (*) $\sigma > 1-(q')^{-1} = q^{-1}$; következőleg (7.8) s az innen adódó

$$(7.9)\quad \int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]\,dt = \cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}+\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s}$$

képlet *minden* $x \in (0,1)$ pontban érvényes, midőn s kielégíti a (*) feltételt.

A $q=\infty$ esetre vonatkozólag vegyük figyelembe, hogy a $\varphi(u)$, $\psi(u)$ függvények „konjugált" osztályokhoz való tartozásának kikötése pótolható ezzel a premisszával is: $|\varphi(u)|\log^+|\varphi(u)| \in L(0,1)$, $\psi(u) \in B(0,1)$.[49] Ha $\sigma>0$ és $f(u) \in B(0,1)$, ez utolsó feltétel-pár $t^{\sigma-1}\log(1/t) \in L(0,1)$ miatt kielégül $\varphi(u) = \mathfrak{P}_s(u)$, $\psi(u)=f(x-u)$ vagy $\varphi(u)=\mathfrak{Q}_s(u)$, $\psi(u)=f(x-u)$ esetén, tehát (7.8) és (7.9) $x \in (0,1)$, $\sigma>0$ mellett is érvényes marad. — Végre a $q=1$ lehetőség, vagyis az $f(u) \in L(0,1)$, $\sigma>1$ eset már a 2. §-ban elintézést nyert.

A (7.2)-höz fűződő megállapítások az imént nyert eredményekből, valamint tételünk 1. részének utolsó mondatából folynak, kiegészítve azzal a ténynyel, hogy konjugált osztályokhoz tartozó függvények konvolúciója folytonos (Vö. [47]).

3. Felvetjük az eddigiekkel összefüggő kérdést: mi a kapcsolat $f_{[s]}(x)$ $(0<s<1)$ és az ún. WEYL-*féle törtrendű integrál:*

$$(7.10)\quad \begin{cases} f_\theta(x) = \Gamma(\theta)^{-1}\displaystyle\int_0^\infty f(x-t)\,t^{\theta-1}\,dt = \\ = \Gamma(\theta)^{-1}\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,(x-t)^{\theta-1}\,dt, \qquad (0<\theta<1) \\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

fogalma között? ($f_\theta(x)$ — mint ismeretes — általában csak m. m. x-re létezik.[50]) — E problémán kissé túlmenve, kimutatjuk a következőket:

VII. tétel. *Tegyük fel, hogy* $\int_0^\delta f(x-t)\,t^{s-1}\,dt$ $(0<\delta\leqq 1)$ *létezik egy adott* $x \in (0,1)$, $s=s_0=\sigma_0+i\tau_0$ $(\sigma_0<1)$ *értékpárra.*

[49] Vö. [58], 154, (V). — $\log^+|\varphi|$ $|\varphi|>1$ esetén $\log|\varphi|$-t jelenti, különben pedig $=0$.
[50] Vö. [58], 224.

Akkor a $\sigma_0 < \sigma < 1$ *sávban fennállnak az*

$$(7.11)\quad \begin{cases} f_{[s]}(x) = \Gamma(s)^{-1} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \int\limits_0^1 f(x-t)\left((m+t)^{s-1} - (m+x)^{s-1}\right) dt = \\ = \Gamma(s) \int\limits_0^1 f(x-t)\left(t^{s-1} - ([t]+x)^{s-1}\right) dt \end{cases}$$

előállítások.[51] *Speciálisan* $\int\limits_0^1 f(t)\,dt = 0$ *esetén*

$$(7.12)\qquad f_{[\theta]}(x) = f_\theta(x) \qquad (0 < \theta_0 < \theta < 1),$$

feltéve, hogy $f_{\theta_0}(x)$ *létezik.*

BIZONYÍTÁS. 1. Az V. tétel 1. feléből tudjuk, hogy a tett kikötés folyománya $f_{[s]}(x)$ létezése a $\sigma > \sigma_0$ félsíkban és a (6. 16) előállítás.

(7. 11)-et igazolandó, induljunk ki a $\sigma > 1$, $0 < x \leqq 1$, $0 < t \leqq 1$ mellett érvényes

$$(7.13)\qquad \zeta(s,t) - \zeta(s,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left((m+t)^{-s} - (m+x)^{-s}\right)$$

formulából.

Ha $\sigma \geqq \varepsilon > 0$, $|s| \leqq \varrho$, $m \geqq 2\varrho \geqq 2$, írhatjuk:

$$(7.14)\quad \begin{cases} |(m+t)^{-s} - (m+x)^{-s}| = (m+x)^{-\sigma} \left| 1 - \left(1 - \dfrac{x-t}{m+x}\right)^{-s} \right| \leqq \\ \leqq \varrho m^{-1-\varepsilon} \left(1 + \dfrac{\varrho}{m} \dfrac{1+\varrho^{-1}}{2} + \dfrac{\varrho^2}{m^2} \dfrac{(1+\varrho^{-1})(1+2\varrho^{-1})}{2 \cdot 3} + \cdots \right) \leqq 2\varrho m^{-1-\varepsilon}; \end{cases}$$

e becslés alapján (7. 13) fennáll a $\sigma > 0$ félsíkban is, minthogy a baloldal s-nek egész függvénye.

Egyúttal tehát

$$(7.15)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_s(t) - \mathfrak{Z}_s(x) = \Gamma(s)^{-1} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \left((m+t)^{s-1} - (m+x)^{s-1}\right) \\ \qquad (\sigma < 1;\ 0 < x \leqq 1,\ 0 < t \leqq 1) \end{cases}$$

s innen

$$(7.16)\quad \begin{cases} \int\limits_0^1 f(x-t)\left(\mathfrak{Z}_s(t) - \mathfrak{Z}_s(x)\right) dt = \\ = \Gamma(s)^{-1} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \int\limits_0^1 f(x-t)\left((m+t)^{s-1} - (m+x)^{s-1}\right) dt \qquad (\sigma_0 < \sigma < 1). \end{cases}$$

(A (7. 15) sor tagonkénti integrálása (7. 14)-re tekintettel nyilván megengedett.)

[51] Itt és az alábbiakban $[t]$ a t-ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

(7. 16) és a $\sigma > \sigma_0$ mellett érvényes (6. 16) összekapcsolása a (7. 11) alatti első előállítást szolgáltatja; a második ebből már következik, mivel

$$\int_0^1 f(x-t)\left((m+t)^{s-1}-(m+x)^{s-1}\right)dt = \int_m^{m+1} f(x-v)\left(v^{s-1}-([v]+x)^{s-1}\right)dv$$

$$(m=0,1,2,\ldots).$$

Végül, ha $f(u)$ $(0,1)$-re vonatkozó integrálközepe eltűnik és (7. 11)-et $s_0=\theta_0$, $s=\theta$, $0<\theta_0<\theta<1$ mellett alkalmazzuk, nyerjük:

$$f_{[\theta]}(x)=\Gamma(\theta)^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1 f(x-t)(m+t)^{\theta-1}dt=f_\theta(x); \tag{7. 17}$$

tételünk premisszája szerint (7. 17) fennáll, ha az

$$\int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{Z}_{\theta_0}(t)\,dt=f_{\theta_0}(x) \tag{7. 18}$$

integrál létezik.

4. A VI. és VII. tételre vonatkozólag kiemelendőnek tartunk néhány észrevételt.

Először is figyelmet érdemel, hogy *a VI. tétel 2. része szorosan összeköt egymással két, előzőleg más-más helyen nyert eredményt*, ti., hogy 1. $f_{[s]}(x)$ minden x-re létezik és egyenlő az $\int_0^1 f(x-t)[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]\,dt$ integrállal, ha $f(u)\in L(0,1)$ és $\sigma>1$ (vö. (2. 12)); továbbá, hogy 2. ugyanez áll $f(u)\in B(0,1)$ és $\sigma>0$ mellett (vö. V. tétel, 1. korollárium, $\delta=1$). A VI. tételben felhasznált $L^q(0,1)$ osztályok mintegy hidat alkotnak $L(0,1)$ és $B(0,1)$ között.

Ami (7. 11)-et illeti, ez úgy tekinthető, mint a WEYL-féle formuláknak komplex s rendszámok és tetszőleges L-integrálható, periodikus $f(u)$ függvények esetére való kiterjesztése; ha $\int_0^1 f(t)\,dt\neq 0$, a (7. 11)-beli sor és integrál konvergenciáját csupán a „járulékos" $(m+x)^{s-1}$, ill. $([t]+x)^{s-1}$ tag biztosítja, melyeknek fellépése a (7. 2) integrál $\mathfrak{Z}_s(x)$ tagjára vezethető vissza.

Mivel $f(u)\equiv -1$ mellett a szóban forgó előállítások a

$$\left.\begin{aligned} &\zeta(s,u)=\sum_{m=0}^{\infty}\left((m+u)^{-s}-\frac{(m+1)^{1-s}-m^{1-s}}{1-s}\right) && (7.\,19)\\ &\zeta(s,u)=\int_0^{\infty}\left(([t]+u)^{-s}-t^{-s}\right)dt && (7.\,20)\end{aligned}\right\}\ (0<\sigma<1)$$

képleteket[52] szolgáltatják, (7. 11) egyúttal ezeknek is általánosítása; különben (7. 20) speciális esete ($u=1$):

$$(7.21)\qquad \zeta(s)=\int_0^{\infty}\left(([t]+1)^{-s}-t^{-s}\right)dt=s\int_0^{\infty}([t]-t)t^{-s-1}\,dt \qquad (0<\sigma<1),$$

azaz a RIEMANN-féle zetafüggvény legegyszerűbb integrálelőállítása a kritikus sávban.[53]

II. RÉSZ. $W(s)=f_{[s]}(x)$ SZINGULARITÁSAINAK HELYZETÉRŐL; ANALITIKUS FOLYTATÁS AZ EGÉSZ SÍKRA. HOLOMORF-FÜGGVÉNY ESETE

8. §. Kiterjesztés az s-síkbeli legközelebbi szingularitásokig hatványsorba fejtéssel

1. $f_{[s]}(x)$ ($\sigma>1$) analitikus folytatásának eddig felhasznált módjai általában nem nyújtanak felvilágosítást a kiterjesztés természetes akadályainak, az s-síkbeli *szingularitások*nak helyzetéről: ismeretes például, hogy egy közönséges DIRICHLET-sor konvergencia-, (C,λ)- vagy (A)-szummabilitási félsíkjának határán vagy ehhez tetszőlegesen közel általában nincs az összegnek, ill. a megfelelő szummának szinguláris helye.[54] Minthogy viszont egy hatványsor konvergenciakörével kapcsolatban más a helyzet, ti. ennek határán az összegfüggvény nem lehet mindenütt reguláris, kínálkozik $W(s)=f_{[s]}(x)$ vagy egy alkalmas „rokon-függvény" hatványsorba fejtésének felhasználása.

E tekintetben főleg a IV. tétel 2. feléből folyó azon észrevételre támaszkodunk, hogy az $f_{[s]}(x)$ ($\sigma>1$) W_s-integrálból és a $\sin\pi s\cdot\int_0^1 f(x-t)t^{s-1}dt$ ($\sigma>1$) szorzatból s-síkbeli analitikus folytatással származó teljes analitikus függvényeknek pontosan ugyanazok a szingularitásai; az említett szorzatot TAYLOR-sorba fejtve, nemcsak a W_s-limeszeknek bizonyos új (egy körlemezben érvényes) előállítását nyerjük, hanem egyúttal meghatározható az együtthatók segítségével $W(s)=f_{[s]}(x)$ szingularitás-eloszlásának két jellemző adata: $W(s)$ „regularitási abszcisszája" és bármely $\sigma>1$ félsíkbeli s_0 ponthoz tartozó

[52] Vö. pl. [33], 262.

[53] L. pl. [53], 14.

[54] LANDAU egy tétele szerint mindenesetre kivételt jelent az a speciális eset, midőn az összes együtthatók *pozitivok*.

„regularitási sugara". — Hangsúlyozzuk, hogy mind itt, mind a következő fejezetben $f(u)$-ra vonatkozólag csak az állandó *„minimális"* kikötésekkel (L-integrálhatóság, 1 szerinti periodicitás) élünk.

2. Legyen $G(s)$ egy $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ pontban analitikus függvény. Tekintsük azon $|s-s_0|<\varrho^*$ körbelsők sugarainak $R(s_0)$ felső határát, melyekben $G(s)$ reguláris; $R(s_0)$-t $G(s)$ *s_0-hoz tartozó regularitási sugarának* fogjuk hívni. Ha $G(s)$ reguláris egy $\sigma>\eta>-\infty$ félsíkban, akkor analóg módon képezhetjük azon σ^* abszcisszák $\mathfrak{S}$ alsó határát, melyekre $G(s)$ a $\sigma>\sigma^*$ félsíkban holomorf; ennek neve: $G(s)$ *regularitási abszcisszája.*[55] — Az értelmezésből azonnal látható, hogy ha $R(s_0)$ véges, akkor $G(s)$-nek legalább egy szinguláris helye van az $|s-s_0|=R(s_0)$ körön; így $R(s_0)$ az s_0-hoz legközelebbi (egy vagy több) szinguláris helynek s_0-tól való távolságát jelenti. Hasonlóképpen: ha $\mathfrak{S}>-\infty$, akkor vagy a $\sigma=\mathfrak{S}$ egyenesen, vagy ettől tetszőlegesen kis távolságra található $G(s)$-nek szinguláris helye; pontosabban: $\mathfrak{S}$ a szinguláris helyek abszcisszáinak felső határa.

Mivel a CAUCHY—TAYLOR-féle kifejtési tétel szerint $R(s_0)$ megegyezik $G(s)$ s_0-hoz tartozó TAYLOR-sorának konvergencia-sugarával, a CAUCHY—HADAMARD-formula alapján közvetlenül nyerjük:

$$R(s_0)=\varliminf_{\nu\to\infty}\left(\frac{|G^{(\nu)}(s_0)|}{\nu!}\right)^{-\frac{1}{\nu}}. \tag{8.1}$$

3. Szükségünk lesz még a $\mathfrak{S}$ és $R(s_0)$ közötti kapcsolatot mutató következő segédtételre:

4. LEMMA. *Ha $G(s)$ holomorf egy $\sigma>\eta>-\infty$ félsíkban, akkor regularitási abszcisszájára fennáll a*

$$\mathfrak{S}=\sigma_0-\inf_{\sigma=\sigma_0} R(s) \qquad (\sigma_0>\eta) \tag{8.2}$$

előállítás.

BIZONYÍTÁS. Amennyiben $G(s)$ egész függvény, akkor $R(s)=+\infty$ minden s-re és (8.2) a triviális $\mathfrak{S}=-\infty$ képletbe megy át; tegyük fel, hogy $G(s)$-nek van legalább egy (végesben fekvő) szinguláris helye.

Ez esetben $U=\sigma_0-\inf\limits_{\sigma=\sigma_0} R(s)$ szükségkép véges és $\leqq\eta$. Mivel az $U<\sigma\leqq\sigma_0$ sáv minden pontja belefoglalható egy $|s-s'|<R(s')$ $(s'=\sigma_0+i\tau)$ körbelsőbe, azért itt s egyúttal a teljes $\sigma>U$ félsíkban $G(s)$ reguláris. Másfelől tudjuk, hogy bármely $|s-s'|=R(s')$ körön kell, hogy legyen $G(s)$-nek szinguláris helye, következőleg ugyanez állítható egy ilyen kör $\sigma_0-R(s')\leqq$ $\leqq\sigma\leqq U$ sávban eső részéről is. Továbbá $U=\sup\limits_{\sigma=\sigma_0}[\sigma_0-R(s)]$ folytán akár-

[55] Az utóbbi a DIRICHLET-sorok elméletéből ismert (vö. (5.16)).

milyen kis pozitív ε-hoz található a $\sigma=\sigma_0$ egyenesnek oly s' pontja, melyre $U-\varepsilon<\sigma_0-R(s')\leqq U$. — Mindent egybevetve látjuk: esetünkben $G(s)$-nek bármely $U-\varepsilon<\sigma\leqq U$ $(\varepsilon>0)$ sávban van, a $\sigma>U$ félsíkban pedig nincs szinguláris helye; eszerint U nem más, mint $G(s)$ szingularitás-abszcisszáinak felső határa, azaz $\mathfrak{S}$.

4. Nehézség nélkül adódik mármost a

VIII. tétel. *Legyen $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ a $\sigma>1$ félsíknak egy tetszőleges pontja.*

1. *$f(u)$ W_s-limitálható bármely $u=x$ helyen $|s-s_0|<\varrho_{s_0}$ mellett, ahol*

$$(8.3)\quad \begin{cases} \varrho_s=\varrho_s(x)=\varliminf\limits_{\nu\to\infty}\left(\dfrac{1}{\nu!}\,|Q_s^\nu(x)|\right)^{-\frac{1}{\nu}}, \\ Q_s^\nu=Q_s^\nu(x)=\dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_0^1 f(x-t)t^{s-1}[e^{i\pi s}(\log t+i\pi)^\nu-e^{-i\pi s}(\log t-i\pi)^\nu]dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu=0,1,2,\ldots); \end{cases}$$

továbbá érvényes az

$$(8.4)\quad \begin{cases} f_{[s]}(x)=\pi^{-1}\Gamma(1-s)\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!}\,Q_{s_0}^\nu(x)+\int_0^1 f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)dt-\mathfrak{Z}_s(x)\int_0^1 f(t)dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (|s-s_0|<\varrho_{s_0}) \end{cases}$$

előállítás.

2. *$W(s)=f_{[s]}(x)$-nek s_0-hoz tartozó regularitási sugara a (8.3)-mal megadott $\varrho_{s_0}=\varrho_{s_0}(x)$ érték, regularitási abszcisszája pedig:*

$$(8.5)\qquad \Omega=\sigma_0-\inf_{-\infty<\tau<\infty}\varrho_{\sigma_0+i\tau}.\text{[56]}$$

BIZONYÍTÁS. 1. Minthogy a $\mathfrak{v}(s;f,x)=\int_0^1 f(x-t)t^{s-1}dt$ függvény s-szerinti deriváltjai a $\sigma>1$ félsíkban (6.2) szerint képezhetők (vö. 3. lemma, 2.), a $V(s;f,x)=\sin\pi s\cdot\mathfrak{v}(s;f,x)$ szorzatnak egy $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ $(\sigma_0>1)$ ponthoz tartozó TAYLOR-együtthatói a LEIBNIZ-szabály alapján:

$$(8.6)\quad \begin{cases} A_{s_0}^\nu=\dfrac{1}{\nu!}\displaystyle\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\pi^k\sin\left(\pi s+k\frac{\pi}{2}\right)\cdot\int_0^1 f(x-t)\,t^{s_0-1}(\log t)^{\nu-k}dt=\frac{1}{\nu!}\,Q_{s_0}^\nu \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu=0,1,2,\ldots). \end{cases}$$

[56] Megjegyezzük, hogy a definícióból folyóan bármely $f(u)$-ra $\Omega\leqq 1$; ezenkívül mindenesetre $\Omega\leqq\max(\omega,\bar{\omega})$ (vö. (5.16)).

A CAUCHY—HADAMARD-formula szerint a megfelelő

$$V(s; f, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{s_0}^{\nu} \cdot (s - s_0)^{\nu} \tag{8. 7}$$

kifejtés konvergencia-sugara

$$\varrho_{s_0} = \varrho_{s_0}(x) = \varlimsup_{\nu\to\infty} \left(\frac{|Q_{s_0}^{\nu}(x)|}{\nu!} \right)^{-\frac{1}{\nu}} \tag{8. 8}$$

lévén, az $|s - s_0| < \varrho_{s_0}$ körnek a $\sigma > 1$ félsíkba eső részében mindenesetre (vö. (6. 14), (6. 15), (8. 6), (8. 7))

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{z}_s(t) - \mathfrak{z}_s(x)]\,dt &= I_s(f, x) + \pi^{-1}\Gamma(1-s) \sin \pi s \cdot \mathfrak{v}(s; f, x) = \\ &= I_s(f, x) + \pi^{-1}\Gamma(1-s) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Q_{s_0}^{\nu}(x)}{\nu!} (s - s_0)^{\nu}, \end{aligned} \right. \tag{8. 9}$$

ahol

$$I_s(f, x) = \int_0^1 f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)\,dt - \mathfrak{z}_s'(x) \int_0^1 f(t)\,dt. \tag{8. 10}$$

De $I_s(f, x)$ s-nek egész függvénye, a (8. 9) alatti utolsó tag pedig reguláris az s_0 középpontú, (8. 8) sugarú kör belsejében, úgyhogy (8. 9)-ből folyik $f_{[s]}(x)$ létezése a szóban forgó teljes körlemezben, valamint (8. 4).

2. Az állítás második részét — tekintettel a IV. tétel 2. felére — (8. 1)-nek és (8. 2)-nek $V(s) = V(s; f, x)$-re való alkalmazásával kapjuk. •

5. A $\varrho_s(x)$ regularitási sugárral kapcsolatban említésre érdemes, hogy $Q_s^{\nu}(x)$ legegyszerűbb, (8. 3)-beli integrál-alakján kívül bizonyos esetekben hasznos lehet a

$$Q_s^{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \pi^k \sin\left(\pi s + k\frac{\pi}{2}\right) \cdot q_s^{\nu-k}(x) \tag{8. 11}$$

összeg-alak is, melyben

$$q_s^m = q_s^m(x) = \int_0^1 f(x-t)\, t^{s-1} (\log t)^m\, dt = (-1)^m \int_0^{\infty} u^m f(x - e^{-u})\, e^{-su}\, du \tag{8. 12}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

(vö. (8. 6)). — Ez a helyzet nyilván, valahányszor a (8. 12) LAPLACE-transzformáltak kiszámíthatók, vagy legalább aszimptotikus viselkedésük ($m \to \infty$ mellett) meghatározható.[57]

[57] Vö. pl. [7], I. kötet, 45—52.

Hadd illusztráljuk $Q_s(x)$ kétféle kifejezésének felhasználását egy-egy könnyű példán!

1. Tegyük fel, hogy $f(u)$ *korlátos:* $|f(u)| \leqq K$ a $[0, 1]$ intervallumban. Akkor (8. 3)-ból

$$|Q^{\nu}_{2+i\tau}| \leqq K e^{\pi|\tau|} \int_0^1 t(|\log t| + \pi)^{\nu} dt =$$

$$= K e^{\pi|\tau|} e^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \int_{2\pi}^{\infty} e^{-u} u^{\nu} du < K e^{\pi(|\tau|+2)} 2^{-(\nu+1)} \nu!;$$

innen pedig

$$\varrho_{2+i\tau} \geqq 2 \qquad (-\infty < \tau < \infty) \tag{8.13}$$

és (8. 5) szerint

$$\Omega \leqq 0. \tag{8.14}$$

Kimondhatjuk tehát: $f(u) \in B(0, 1)$ mellett $W(s) = f_{[s]}(x)$ minden x-re (létezik és) reguláris[58] legalább a $\sigma > 0$ félsíkban. (Vö. V. tétel, 1. korollárium, $\delta = 1$ eset; VI. tétel, 2. rész; $q = \infty$ eset.)

2. Legyen μ adott komplex szám, melyre $\Re(\mu) > -1$, $x \in (0, 1)$ rögzített érték és válasszuk $f(u)$-nak azt az 1 szerint periodikus függvényt, mely $0 \leqq u \leqq 1$, $u \neq x$ mellett megegyezik $(x - u)^{\mu}$-vel. (Itt és az alábbiakban minden hatványnak a főértéke veendő.)

Egyszerű számolás mutatja, hogy esetünkben

$$\left\{\begin{aligned} q^{\nu}_{2+i\tau}(x) &= \int_0^1 t^{\mu+1+i\tau}(\log t)^{\nu} dt = (-1)^{\nu} \int_0^{\infty} u^{\nu} e^{-(\mu+2+i\tau)u} du = \\ &= \frac{(-1)^{\nu} \nu!}{(\mu+2+i\tau)^{\nu+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right. \tag{8.15}$$

és (8. 11) alapján

$$\left\{\begin{aligned} &Q^{\nu}_{2+i\tau}(x) = \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1} \nu!}{(\mu+2+i\tau)^{\nu+1}} \left\{ \sin \pi\mu - \operatorname{ch} \pi\tau \sum_{\varkappa=\left[\frac{\nu-1}{2}\right]+1} (-1)^{\varkappa} \frac{(\pi(\mu+2+i\tau))^{2\varkappa+1}}{(2\varkappa+1)!} + \right. \\ &\left. \qquad + i \operatorname{sh} \pi\tau \sum_{\varkappa=\left[\frac{\nu}{2}\right]+1}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \frac{(\pi(\mu+2+i\tau))^{2\varkappa}}{(2\varkappa)!} \right\}. \end{aligned}\right. \tag{8.16}$$

[58] Mint tudjuk, $f_{[s]}(x)$-nek az s-sík egy nyílt tartományában való létezése és regularitása ugyanazt jelenti.

De akkor a $2+i\tau$ ponthoz tartozó regularitási sugár:

$$(8.17)\quad \varrho_{2+i\tau}=\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left(\frac{1}{\nu!}\,|Q^{\nu}_{2+i\tau}(x)|\right)^{-\frac{1}{\nu}}=\begin{cases}|\mu+2+i\tau|, & \text{ha } \mu\neq 0,1,2,\ldots,\\ +\infty & \text{különben};\end{cases}$$

a regularitási abszcissza pedig:

$$(8.18)\quad \Omega=2-\inf_{-\infty<\tau<+\infty}\varrho_{2+i\tau}=\begin{cases}-\Re(\mu), & \text{ha } \mu\neq 0,1,2,\ldots,\\ -\infty, & \text{midőn } \mu \text{ nem-negatív egész szám.}\end{cases}$$

Szavakba foglalva: függvényünk az előírt x helyen minden s-re W_s-limitálható, ha $\mu=0,1,2,\ldots$; különben W_s-limitálható $\sigma>-\Re(\mu)$ mellett, és a $\sigma=-\Re(\mu)$ egyenesen vagy legalább minden $-\Re(\mu)-\varepsilon<\sigma\leqq-\Re(\mu)$ $(\varepsilon>0)$ sávban található szinguláris hely.

Az utolsó megállapítás azonnal élesíthető (8.17) alapján. Innen kitűnik ui., hogy nem-egész μ mellett bármely $|s-(2+i\tau)|=\varrho_{2+i\tau}$ $(-\infty<\tau<\infty)$ kör átmegy az $s=-\mu$ ponton, amiből következik: e pont mindenesetre szinguláris hely, továbbá $[(x-u)^{\mu}]_{[s]}(x)$ létezik és) reguláris az s-síknak a $\tau=-\Im(\mu)$ $(\sigma\leqq-\Re(\mu))$ félegyenes „kihasítása" után megmaradó részében.

Példánknál azonban még e félegyenes pontjainak jellege is teljesen tisztázható azon szerencsés körülmény folytán, hogy most az $\int_0^1 f(x-t)t^{s-1}\,dt$ integrált ki tudjuk számítani. — Valóban írhatjuk:

$$(8.19)\quad [(x-u)^{\mu}]_{[s]}(x)=\Gamma(s)^{-1}(s+\mu)^{-1}-\mathfrak{z}_s(x)(\mu+1)^{-1}+\int_0^1 t^{\mu}\mathfrak{z}_s(t)\,dt$$

minden oly s-re, ahol a jobboldali első tag reguláris. Eszerint az $[(x-u)^{\mu}]_{[s]}(x)$ $(\Re(\mu)>-1)$ W_s-limesznek egyáltalán nincs szinguláris helye az s-síkban, ha $\mu\geqq 0$ egész szám és $s=-\mu$ az egyetlen szinguláris pont, midőn μ nem-egész; az utóbbi esetben $s=-\mu$ *elsőrendű pólus* $\Gamma(-\mu)^{-1}$ *reziduummal*, úgyhogy itt $[(x-u)^{\mu}]_{[s]}(x)$ biztosan nem létezik.

Mint látjuk, (8.19) újabb példát szolgáltat oly W_s-limeszre, melynek az s-sík valamely pontja *izolált szinguláris helye.* (Vö. (4.11).)

9. §. További analitikus folytatás Borel-, Le Roy-, Lindelöf-, Mittag—Leffler-szummációval; $f(s,x)$ és $\tilde{f}(s,x)$ fő csillagtartományának meghatározása Riesz Marcell módszerével

1. Minthogy (8.4) érvényességi körének határa, a ϱ_{s_0} regularitási sugárral rajzolt $|s-s_0|=\varrho_{s_0}$ kör általában nem természetes határa a sor $V(s)=$ $=V(s;f,x)$ összegfüggvényének, tehát egyúttal $W(s)=f_{[s]}(x)$-nek, felvetődik

az említett körön túl való analitikus folytatás s az s-síkbeli esetleges többi szingularitások vizsgálatának problémája.

Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy hatványsorral definiált függvényeknek a konvergenciakörön túl való analitikus kiterjesztése a legegyszerűbbben bizonyos szummációs eljárásokkal valósítható meg, melyek közül a legfontosabb a BOREL-, LE ROY-, LINDELÖF- és MITTAG—LEFFLER-féle módszer. Egy $\sum_{m=0}^{\infty} h_m$ sor szóban forgó (B)-, (R)-, (L)-, ill. (M)-szummájának értelmezését rendre a

$$(9.1)\quad \begin{cases} \overset{(B)}{\sum_{m=0}^{\infty}} h_m = \lim\limits_{\xi\to+\infty}\left(e^{-\xi}\sum_{m=0}^{\infty} H_m\frac{\xi^m}{m!}\right) = \lim\limits_{\xi\to+\infty}\left[h_0+\sum_{m=1}^{\infty}(1-e^{-\xi}E_m)h_m\right], \\ H_m = \sum_{k=0}^{m} h_k, \quad E_m = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\xi^k}{k!}, \end{cases}$$

$$(9.2)\quad \overset{(R)}{\sum_{m=0}^{\infty}} h_m = \lim_{r\to 1-0}\frac{\Gamma(1+rm)}{m!}h_m,$$

$$(9.3)\quad \overset{(L)}{\sum_{m=0}^{\infty}} h_m = \lim_{\delta\to+0}\left(h_0+\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\delta m}h_m\right),$$

$$(9.4)\quad \overset{(M)}{\sum_{m=0}^{\infty}} h_m = \lim_{\delta\to+0}\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma(1+\delta m)^{-1}h_m$$

képletek szolgáltatják; a jobboldali soroknak $\xi>0$, $0<r\leqq 1$, ill. $\delta>0$ mellett való konvergenciája előzetes kikötés.[59]

Mint ismeretes, egy véges konvergencia-sugarú $\sum_{m=0}^{\infty} A_m(z-z_0)^m = P(z)$ hatványsor esetében a megfelelő szummabilitási tartományok a következők: 1. (9.1)-nél $P(z)$-nek z_0-ra vonatkozó ún. *Borel-poligon*ja, vagyis mindazon z_0-t tartalmazó nyílt félsíkoknak a közös része, melyeknek határegyenese átmegy $P(z)$-nek valamelyik, a konvergenciakörön fekvő Z szinguláris helyén és merőleges a $\overrightarrow{z_0 Z}$ vektorra; 2. (9.2)—(9.4)-nél viszont $P(z)$-nek z_0-ra vonatkozó ún. *Mittag—Leffler-féle csillagtartománya,* ami a teljes z-síkból úgy áll elő, hogy bármely Z szinguláris hellyel együtt elhagyjuk belőle a $\overrightarrow{z_0 Z}$ vektornak Z-n túli meghosszabbítását is.[60]

59 Vö. [15], 77—80; (9.2)-vel kapcsolatban l. még [20], 490—491.

60 Így pl. a $\sum_{m=0}^{\infty} z^m = (1-z)^{-1}$ $(|z|<1)$ geometriai sor 0-hoz tartozó MITTAG—LEFFLER-féle csillagtartománya a valós tengely $[1, \infty)$ intervalluma mentén felhasított z-sík.

2. E fogalmakat, valamint a (9.1)—(9.4) eljárások elméletének főtételeit[61] a (8.4) sorra alkalmazva, s újra támaszkodva a IV. tétel 2. felének utolsó megállapítására, a VIII. tétel alapján nyerjük:

IX. tétel. 1. *Jelöljük Π-vel $f_{[s]}(x)$ s-beli Borel-poligonját egy $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ $(\sigma_0 > 1)$ pontra vonatkozólag.*

$f(u)$ W_s-limitálható az $u = x$ helyen $s \in \Pi$ mellett, mégpedig

$$f_{[s]}(x) = \pi^{-1}\Gamma(1-s)\cdot \overset{(B)}{\sum_{\nu=0}^{\infty}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} Q_{s_0}^\nu(x) + \tag{9.5}$$
$$+ \int_0^1 f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)\,dt - \mathfrak{Z}_s(x)\int_0^1 f(t)\,dt,$$

ahol $Q_{s_0}^\nu$ jelentése ugyanaz, mint (8.3)-ban.

Speciálisan: ha $f_{[s]}(x)$-nek csak egyetlen $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$ $(\sigma_1 \leqq 1)$ szinguláris helye van, akkor (9.5) fennáll a $\sigma > \Omega$ félsíkban.

2. *Helyettesítsük a (9.5)-beli (B)-szummát rendre a megfelelő (R)-, (L)- vagy (M)-szummával. — Az így kapott előállítások érvényesek minden olyan s-re, mely $f_{[s]}(x)$-nek s_0-ra vonatkozó Σ Mittag—Leffler-féle csillagtartományában fekszik.*

3. *A szóban forgó (B)-, ill. (R)-, (L)-, (M)-szummák egyszersmind egyenletesen is léteznek a megfelelő szummabilitási tartomány, azaz Π, ill. Σ bármely korlátos zárt résztartományában.*

3. RIESZ MARCELLnek egy nevezetes, 1912-ben közölt dolgozatában ([47]) sikerült a MITTAG—LEFFLER-módszert

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{-\lambda_m s} \quad (0 \leqq \lambda_m < \lambda_{m+1};\ \lambda_m \to \infty) \tag{9.6}$$

típusú (általánosított) DIRICHLET-sorokra is átvinnie; az általa megadott eljárás — melyet MITTAG—LEFFLER—RIESZ-féle, röviden (MR)-szummációnak fogunk nevezni — a következő szumma-definíciót használja:

$$\overset{(MR)}{\sum_{m=0}^{\infty}} A_m e^{-\lambda_m s} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(1+\delta\lambda_m)^{-1} \cdot A_m e^{-\lambda_m s}. \tag{9.7}$$

((9.7) $\lambda_m = m$ esetén egy hatványsor (M)-szummájába megy át.)

Az említett RIESZ-féle eredmények lehetővé teszik, hogy — bármely adott $f(u)$ függvény és x hely esetében — meghatározzuk $f(s, x)$-nek és $\bar{f}(s, x)$-nek (vö. (4.2)—(4.4)) legnagyobb abszcisszájú szinguláris helyét az s-sík egy

[61] Vö. [15], 187—191.
[62] Vö. (8.5) és (8.18).

tetszőleges $\tau=\tau_0$ „vízszintes" egyenesén, tehát egyúttal e függvények ún. *fő csillagtartományát.* Az utóbbiak — mint tudjuk — $f(s,x)$, ill. $\tilde{f}(s,x)$ szingularitás-halmazából úgy képezendők, hogy minden $\mathfrak{s}$ szinguláris hellyel együtt „eltávolítjuk" az s-síkból az $\mathfrak{s}$-ből $-\infty$-be vezető vízszintes félegyenest is.

4. Célszerű rövid jelölést bevezetnünk $\mathfrak{Z}_s(u)$, $f(s,x)$ és $\tilde{f}(s,x)$ „(MR)-transzformáltja" számára:

$$\mathfrak{M}_s(x,\delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(1+\delta\log n)^{-1}\cdot\frac{2\cos\left(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\right)}{(2n\pi)^s}, \tag{9.8}$$

$$F(s,x,\delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(1+\delta\log n)^{-1}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}, \tag{9.9}$$

$$\tilde{F}(s,x,\delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(1+\delta\log n)^{-1}\frac{(2b_n(x)}{(2n\pi)^s}; \tag{9.10}$$

egyszerű becslések alapján belátható, hogy a (9.8)—(9.10) sorok minden s-re konvergensek s így mindhárom összeg s-nek egész függvénye, bármely rögzített $x\in(0,1)$ és $\delta>0$ mellett.

Jelöljük továbbá $\omega(\tau_0)$-val azon σ^* abszcisszák alsó határát, melyekre $f(s,x)$ reguláris az $s=\sigma+i\tau_0$ $(\sigma>\sigma^*)$ félegyenes mentén és legyen $\tilde{\omega}(\tau_0)$ jelentése analóg $\tilde{f}(s,x)$-re vonatkozólag (Vö. (5.16) és 8. §. *2.*).

X. tétel. 1. *Fennállnak az*

$$\omega(\tau_0)=\lim_{\delta\to+0}\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\left(\delta\log\log|F(-\sigma+i\tau_0,x,\delta)|-\sigma\right), \tag{9.11}$$

$$\tilde{\omega}(\tau_0)=\lim_{\delta\to+0}\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\left(\delta\log\log|\tilde{F}(-\sigma+i\tau_0,x,\delta)|-\sigma\right) \tag{9.12}$$

képletek, feltéve, hogy a jobboldali határértékek léteznek; ha valamelyik nem létezik, a megfelelő baloldali érték $-\infty$*-nek veendő.*

2. *Jelöljük* Σ_p*-vel és* $\tilde{\Sigma}_p$*-vel* $f(s,x)$, *ill.* $\tilde{f}(s,x)$ *fő csillagtartományát s írjuk:* $\Sigma_*=\Sigma_p\cap\tilde{\Sigma}_p$.

Akkor $f(u)$ W_s*-limitálható az* $u=x$ *helyen minden* $s\in\Sigma_*$ *mellett és* W_s*-limesze:*

$$\begin{cases} f_{[s]}(x)=\cos\frac{\pi s}{2}\overset{(MR)}{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}+\sin\frac{\pi s}{2}\overset{(MR)}{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s}= \\ \quad=\lim_{\delta\to+0}\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{M}_s(t,\delta)-\mathfrak{M}_s(x,\delta)]\,dt. \end{cases} \tag{9.13}$$

Továbbá megadható Σ_* *valódi részhalmazainak egy* $\{\Delta_*^{(\delta)}\}(0<\delta<1)$ *rendszere úgy, hogy* Σ_* *bármely pontja elegendő kis* δ *esetén* $\Delta_*^{(\delta)}$*-hoz is hozzátartozik és minden rögzített* δ*-ra* $s\in\Delta_*^{(\delta)}$ *mellett érvényes az*

$$(9.14)\qquad \begin{cases} f_{[s]}(x)=\int\limits_0^\infty e^{-v}\,\psi_s(x,\delta;v)\,dv, \\ \psi_s(x,\delta;v)=\int\limits_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{M}_{s-\delta\log v}(t,\delta)-\mathfrak{M}_{s-\delta\log v}(x,\delta)]\,dt \end{cases}$$

előállítás.

3. (9. 13) *és* (9. 14) *egyenletesen fennáll* Σ_*, *ill.* $\Delta_*^{(\delta)}$ *bármely korlátos, zárt résztartományában;* (9. 14) *divergens* $\Delta_*^{(\delta)}$ *nyílt kiegészítő halmazában (a teljes s-síkra vonatkozólag).*

BIZONYÍTÁS. 1° $\omega(\tau_0)$ és $\tilde{\omega}(\tau_0)$ előállítása közvetlenül következik RIESZ MARCELL idézett dolgozatának bizonyos eredményeiből[63] s abból a tényből, hogy $(2\pi)^s$ 0-hely nélküli egész függvény.

2° Figyelembe véve $a_n(x)$ és $b_n(x)$ jelentését (vö. (2. 9), (2. 1)) s felcserélve az összegezés és integrálás sorrendjét (ami esetünkben nyilván megengedett), nyerjük:

$$(9.15)\qquad \begin{cases} \cos\frac{\pi s}{2}\cdot F(s,x,\delta)+\sin\frac{\pi s}{2}\cdot \tilde{F}(s,x,\delta)= \\ \qquad =\int\limits_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{M}_s(t,\delta)-\mathfrak{M}_s(x,\delta)]\,dt; \end{cases}$$

innen [47] II. tétele alapján folyik (9. 13) érvényessége $s\in\Sigma_*$ mellett, az egyenletes konvergenciára vonatkozó állítással együtt.

Ami (9. 14)-et és tételünk 3. részének (9. 14)-gyel kapcsolatos megállapításait illeti, ezek (9. 15) felhasználásával [47] I. tételéből adódnak. (Vö. [63]).

5. Megjegyzendő, hogy a fentiekben előforduló $\Delta_*^{(\delta)}(0<\delta<1)$ tartományt a következőképpen kapjuk meg:[64] Tekintjük $f(s,x)$ és $\tilde{f}(s,x)$ szingularitásainak egyesített halmazát az s-síkban és mindenegyes $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ szinguláris pontból kiindulólag meghúzzuk a $\sigma-\sigma_0=\delta\log\cos\frac{\tau-\tau_0}{\delta}$, $|\tau-\tau_0|<\delta\frac{\pi}{2}$ feltételekkel jellemzett „kétágú“ görbét. (Ez — mint könnyen látható — a $\sigma<\sigma_0$ félsíkban fekszik, szimmetrikus a $\tau=\tau_0$, $\sigma<\sigma_0$ félegyenesre vonatkozólag, s ennek mindkét oldalán levő (végtelen) ága az említett

[63] L. [47], 264—266; különösen: (46), 266. o.

[64] Vö. még a $b^{(\alpha)}$ konvergencia-alaptartomány értelmezését: [47], 257.

félegyeneshez „tart“, midőn $\delta \to +0$.) Amennyiben az összes így keletkező $\sigma - \sigma_0 < \delta \log \cos \frac{\tau - \tau_0}{\delta}$ $\left(|\tau - \tau_0| < \delta \frac{\pi}{2}\right)$ tartományok pontjait elhagyjuk Σ_* pontjai közül, előáll $\Delta_*^{(\delta)}$.

Végül megemlítjük, hogy (9. 11) — (9. 12) természetesen meghatározza az $\omega, \tilde{\omega}$ *regularitási abszcisszák* pontos értékét is, ti.

$$\text{(9. 16)} \qquad \begin{cases} \omega = \sup\limits_{-\infty < \tau < \infty} \omega(\tau), \\ \tilde{\omega} = \sup\limits_{-\infty < \tau < \infty} \tilde{\omega}(\tau). \end{cases}$$

10. §. A Cauchy-féle integrálformulák közös általánosítása. Generalizált Taylor-sor, Laurent-sor

1. Ha $f_{[s]}(x)$-et teljes általánosságban vizsgáljuk, azaz $f(u)$-ra nézve semmiféle külön megszorítást nem teszünk, akkor a X. tételen túlmenően nyilván nem remélhetünk lényeges adalékokat W_s-limeszek s-síkbeli szingularitásaira, ill. egzisztencia-tartományára vonatkozólag; $f_{[s]}(x)$-nek Σ_*-ban való tényleges kiszámítása is többféle módon lehetséges az eddigiek alapján.

Viszont szemlátomást nem érdektelen oly függvényosztály keresése, melynél $W(s) = f_{[s]}(x)$ egyrészt teljesen *szingularitásmentes*, másrészt *közvetlenül*, minden s-re érvényes (lehetőleg egyszerű) képlet segítségével megadható. — Ez a helyzet — mint most megmutatjuk —, ha $f(u)$ értelmezése az adott x hely környezetében a független változó komplex értékeire is kiterjeszthető úgy, hogy a nyert függvény x-ben *reguláris*.

2. Legyen $w = u + iv$ *komplex* változó, $0 < x < 1$, $0 < \delta \leqq 1$; jelöljünk továbbá $\mathfrak{C}_l$-lel egy olyan w-síkbeli, pozitív irányítású zárt utat,[65] mely belsejében tartalmazza az u-tengely $(x - \delta, x]$ intervallumát és átmegy ennek baloldali végpontján.

XI. tétel. *Ha $f(w)$ az x pontban és ennek egy E_x környezetében w-nek differenciálható függvénye, akkor $f(u)$ az $u = x$ helyen minden s-re W_s-limitálható, nevezetesen*

$$\text{(10. 1)} \qquad f_{[s]}(x) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}_l} f(w)(w-x)^{s-1} dw + I_s(f, x, \delta);\text{[66]}$$

itt $(w - x)^{s-1}$ *főértéket jelent és* $\mathfrak{C}_l \subset E_x$.

[65] Út: folytonos, rektifikálható JORDAN-görbe.

[66] Vö. (6. 15). — Az $s = 1, 2, 3, \ldots$ értékekre a jobboldali első tag a megfelelő (mindenesetre létező) határértékekkel pótolandó.

BIZONYÍTÁS. Legyen előbb $\sigma > 1$ és induljunk ki az

$$(10.2)\quad \begin{cases} f_{[s]}(x) - I_s(f, x, \delta) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^{\delta} f(x-t) t^{s-1} dt = \\ = \Gamma(s)^{-1} \int_{x-\delta}^{x} f(u)(x-u)^{s-1} du \end{cases}$$

formulából (vö. (6.20)).

Kössük össze az $x-\delta$ pontot és az $(x, 1)$ szakasznak egy $x+\varrho$ pontját egy-egy $\mathfrak{C}_l$ belsejében futó és a $v>0$, ill. $v<0$ félsíkban fekvő úttal; a keletkező, pozitív irányítással ellátott zárt görbét G_ϱ-val jelölve, a CAUCHY-féle alaptétel szerint írhatjuk

$$\int_{(\mathfrak{C}_l)} f(w)(w-x)^{s-1} dw = \int_{(G_\varrho)} f(w)(w-x)^{s-1} dw,$$

minthogy $f(w)$ a feltevés alapján $\mathfrak{C}_l$ mentén és ezen belül, $(w-x)^{s-1}$ pedig az $u \leqq x$, $v = 0$ félegyenes mentén felhasított egész w-síkban holomorf. Innen folyik, hogy egyúttal

$$(10.3)\quad \begin{aligned} \int_{(\mathfrak{C}_l)} f(w)(w-x)^{s-1} dw = \oint_{|w-x|=\varrho} f(w)(w-x)^{s-1} dw + \\ + \int_{x-\delta}^{x-\varrho} f(w)\left[(w-x)_-^{s-1} - (w-x)_+^{s-1}\right] dw, \end{aligned}$$

ahol $\oint$ pozitív irányítással képezett körintegrál és $(w-x)_{\pm}^{s-1} = -|w-x|^{s-1} e^{\pm i\pi s}$.

Ha még (10.3) utolsó tagjában w helyett bevezetjük az u (valós) változót, majd figyelembe vesszük, hogy az előző tag abszolút értéke nem lehet nagyobb, mint $2\pi\varrho^{\sigma} e^{\pi|t|} \max\limits_{|w-x|=\varrho} |f(w)|$, $\varrho \to +0$ határátmenet alkalmazásával arra jutunk, hogy

$$(10.4)\quad \int_{(\mathfrak{C}_l)} f(w)(w-x)^{s-1} dw = 2i \sin \pi s \int_{x-\delta}^{x} f(u)(x-u)^{s-1} du \qquad (\sigma > 1)$$

vagy (vö. (3.5))

$$(10.5)\quad \Gamma(s)^{-1} \int_{x-\delta}^{x} f(u)(x-u)^{s-1} du = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{(\mathfrak{C}_l)} f(w)(w-x)^{s-1} dw.$$

Vegyük észre, hogy a jobboldali vonalintegrál — ismert általános tételek alapján — *minden* s-re létezik és s-nek holomorf függvénye[67], továbbá az

[67] Ennek különben a direkt igazolása is egyszerű: vö. (6.3)—(6.4).

$s=1,2,\ldots$ pontokban az alaptétel szerint eltűnik. Így ennek $\Gamma(1-s)$-szerese szintén egész függvény, tehát a (10.5)-ből és (10.2)-ből következő (10.1) képlet az egész s-síkon érvényes. Qu. e. d.

3. Legyen (10.1)-ben $s=-p$ $(p=0,1,2,\ldots)$. Mivel $I_{-p}(f,x,\delta)=0$ (vö. (6.23)), továbbá $f(u)$ x-beli regularitása miatt $f_{[-p]}(x)=f^{(p)}(x)$ (vö. (6.18)), kapjuk:

$$f^{(p)}(x)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{(\mathfrak{C}_l)}\frac{f(w)}{(w-x)^{p+1}}\,dw \qquad (p=0,1,2,\ldots). \tag{10.6}$$

Eszerint (10.1) úgy tekinthető, mint a (10.6) alatti CAUCHY-*féle integrálformulák közös általánosítása;* egyúttal adva van az a könnyen kielégíthető igény, hogy $f_{[s]}(x)$ értelmezését a független változó *komplex* értékeire is kiterjesszük.

Valóban, rögzített $z=x+iy$ $(x>0,\ y\gtreqless 0)$ mellett $\zeta(s,z)$-t a $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(m+z)^{-s}$ $(\sigma>1)$ sorból[68] s-re vonatkozó analitikus folytatással származtatva, az alapvető integrálelőállítások és legfontosabb tulajdonságok érvényben maradnak[69]; a megfelelő $\mathfrak{Z}_s(z)=\Gamma(s)^{-1}\bar{\zeta}(1-s,z)$ ismét s-nek egész, z-nek 1 szerint periodikus, a $0<x<1$ sávban differenciálható függvénye és (vö. (3.6))

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{Z}_s(z)=\mathfrak{Z}_{s-1}(z) \qquad (0<x<1). \tag{10.7}$$

Ha mármost megállapodunk abban, hogy

$$f_{[s]}(z)=\int\limits_0^1 f(z-t)\,\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(z)]\,dt \qquad (0<x<1;\ \sigma\geqq 1), \tag{10.8}$$

ahol $f(u+iy)\in L(0,1)$[70], $f(w+1)=f(w)$, akkor a W_s-limeszek 4. §-beli általános definíciója és a 6. § eredményei mind közvetlenül átvihetők, s a fenti meggondolás mutatja, hogy $s\neq 1,2,\ldots$ mellett ($(w-z)^{s-1}$ főértékét használva):

$$\left\{\begin{aligned} f_{[s]}(z)&=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int\limits_{(\mathfrak{C}_l)} f(w)(w-z)^{s-1}\,dw+I_s(f,z,\delta),\\ I_s(f,z,\delta)&=\int\limits_0^1 f(z-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(z)]\,dt+\Gamma(s)^{-1}\int\limits_\delta^1 f(z-t)\,t^{s-1}\,dt, \end{aligned}\right. \tag{10.9}$$

[68] Itt $(m+z)^{-s}$ főértéke veendő.
[69] Vö. pl. [56], 265. — A HURWITZ-formula azonban nem-valós u esetén érvényét veszti.
[70] Azaz $\Re(f(u+iy))$ és $\Im(f(u+iy))$ $0<u<1$-ben egyaránt L-integrálható.

amennyiben $\mathfrak{C}_l$ egy olyan pozitív körüljárású, a $z-\delta$ ponton átmenő és a $(z-\delta, z]$ egyenes-szakaszt belsejében tartalmazó zárt út, melyen belül $f(w)$ holomorf, magán $\mathfrak{C}_l$-en pedig legalább belülről folytonos.[71] $s=\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ esetén a $\Gamma(1-s)$-et tartalmazó tag a megfelelő $(s\to\nu$ határátmenethez tartozó) limesszel helyettesítendő. — Célszerű még kikötnünk, hogy (fix s-re) $f_{[s]}(z)$ is legyen 1 szerint periodikus, továbbá $f_{[s]}(iy)$ jelentse $f_{[s]}(z)$ limeszét $z\to iy$ mellett, feltéve, hogy az utóbbi létezik.

4. Kézenfekvő a kérdés: mi következik $f(w)$ regularitásából $f_{[s]}(z)$-re mint z függvényére nézve? — Az természetesen $s\neq 0, -1, -2, \ldots$ mellett nem várható, hogy $f(w)$-nek *egyetlen* $(0<u<1$ sávbeli) pontban holomorf volta már maga után vonja $f_{[s]}(z)$-nek ugyanitt való regularitását, hiszen $I_s(f, z, \delta)$ nemcsak egy helyen és ennek közelében felvett függvényértékektől függ.[72] Szükségünk van $f(w)$ holomorfiájára legalább egy „vízszintes" egyenesdarab mentén.

Mindenekelőtt bevezetünk egy fogalmat: nevezzük $f(w)$ egy $v=y_0$ egyenes körüli *holomorfia-sávszélességének* azon $\eta\geqq 0$ számok felső határát, melyekre $f(w)$ a $|v-y_0|\leqq\eta$ sávban holomorf.

XII. tétel. *Legyen s tetszőlegesen előírt komplex szám és tegyük fel, hogy* $f(w)$ *egy* $[iy_0, 1+iy_0)$ $(y_0\gtreqless 0)$ *egyenesszakasz minden pontjában reguláris.*[73]

1. *Akkor* $f_{[s]}(z)$ *bármely* $z\in(iy_0, 1+iy_0)$ *helyen akárhányszor differenciálható és*

$$\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} f_{[s]}(z)=f_{[s-\nu]}(z) \qquad (\nu=1, 2, \ldots). \tag{10.10}$$

Amennyiben még (*) $\int\limits_0^1 f(u+iy_0)\,du=0$, *akkor* (10.10) *a* $z=iy_0$, $z=1+iy_0$ *végpontokban is fennáll.*

2. (*) *teljesülése esetén* $f_{[s]}(z)$ *minden* $z\in[iy_0, 1+iy_0)$ *pont körül Taylor-sorba fejthető:*

$$f_{[s]}(z+\Delta z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_{[s-\nu]}(z)}{\nu!}(\Delta z)^\nu; \tag{10.11}$$

(10.11) *érvényes* $|\Delta z|<\Xi_{y_0}$ *mellett, ahol* Ξ_{y_0} *az* $f(w)$ *függvény* $v=y_0$ *körüli holomorfia-sávszélességét jelöli.*

[71] Mint ČECH, KAMKE és mások vizsgálatai óta ismeretes, a CAUCHY-féle alaptétel ezen enyhébb premissza mellett is érvényes. (Vö. pl. [1], 122.)

[72] Ha $s=-p$ $(p=0, 1, \ldots)$, akkor $I_{-p}(f, z, \delta)\equiv 0$ folytán $f_{[s]}(z)=f^{(p)}(z)$ (vö. (10.6)), tehát a W_s-limesz „lokális" jellegűvé válik.

[73] $f(w)$ 1-periódusú voltát — mint állandó kikötést — a tételek megfogalmazásában ezután sem említjük.

3. *Az utolsó sor* $c_{\nu,s}(z) = f_{[s-\nu]}(z)/\nu!$ *együtthatóira* $\nu > \sigma$ *mellett fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$(10.12)\quad \begin{cases} |c_{\nu,s}(z)| \leqq \dfrac{\Gamma(1-\sigma+\nu)}{\nu!} \left\{ \dfrac{M_z(\delta)}{\delta^{\nu-\sigma}} e^{\pi|\tau|} + \right. \\ \left. + \pi^{-1}(|\sin \pi\sigma| + |\operatorname{sh} \pi\tau|) \cdot \mathfrak{M}_{y_0} \cdot \left[\zeta(1-\sigma+\nu) + \dfrac{1-\delta^{\sigma-\nu}}{\sigma-\nu} \right] \right\}. \end{cases}$$

Itt δ *egy olyan* z *középpontú zárt körlemez sugara, melyben* $f(w)$ *folytonos s minden belső pontban differenciálható, továbbá* $M_z(\delta) = \max\limits_{|w-z|=\delta} |f(w)|$ *és* $\mathfrak{M}_{y_0} = \max\limits_{v=y_0} |f(w)|$.[74]

BIZONYÍTÁS. A feltevésből az előzők értelmében folyik, hogy $f_{[s]}(z)$ bármely s-re, az $(iy_0, 1+iy_0)$ egyenesdarab minden z pontjában létezik és $\sigma \geqq 1$ mellett a (10. 8), tetszőleges $s \neq 1, 2, \ldots$ esetén a (10. 9) alakban írható.

1. (10. 8)-ból parciális integrálással kapjuk (vö. (4. 15))

$$(10.13)\quad f_{[s]}(z) = \int_0^1 f^{(p)}(z-t)\,\mathfrak{Z}_{s+p}(t)\,dt - \mathfrak{Z}_s(z)\int_0^1 f(u+iy_0)\,du \qquad (\sigma > 1-p),$$

ahonnan a paraméteres integrálok differenciálási szabálya szerint[75] azonnal adódik: $f_{[s]}(z)$ mindegyik $z \in (iy_0, 1+iy_0)$ helyen differenciálható és

$$(10.14)\quad \frac{\partial}{\partial z} f_{[s]}(z) = \int_0^1 f^{(p+1)}(z-t)\,\mathfrak{Z}_{s+p}(t)\,dt - \mathfrak{Z}_{s-1}(z)\int_0^1 f(u+iy_0)\,du \quad (\sigma > 1-p).$$

De (10. 13)-ból jelölésváltoztatással kiolvashatjuk, hogy (10. 14) jobboldala egyenlő $f_{[s-1]}(z)$-vel, tehát

$$(10.15)\quad \frac{\partial}{\partial z} f_{[s]}(z) = f_{[s-1]}(z) \qquad (\sigma > 1-p).$$

Minthogy p akármilyen nagyra választható, következik (10. 15) érvényessége minden s-re, ebből pedig iterálással (10. 10).

Ha (*) teljesül, a végeredmény fennáll az iy_0, $1+iy_0$ végpontokban is, mert ekkor $f_{[s]}(z)$ $(\sigma > 1-p)$ (10. 13) kifejezéséből csak az első tag marad meg, mely z-nek a teljes $v = y_0$ egyenes mentén differenciálható, 1 szerint periodikus függvénye.

2. Az a feltevésünk, hogy az $[iy_0, 1+iy_0]$ zárt szakasz minden pontja belefoglalható egy olyan (pozitív sugarú) körlemezbe, melynek belsejében és

[74] Megjegyezzük, hogy (10. 12)-ben $\Gamma(1-\sigma+\nu)/\nu! \sim \nu^{-\sigma}$ és $\zeta(1-\sigma+\nu) \to 1$ $(\nu \to \infty)$.
[75] L. pl. [43], 296.

határán $f(w)$ differenciálható, a HEINE—BOREL-féle befedési tétel alapján maga után vonja egy egész $|v-y_0|<\eta$ sáv létezését, melyben $f(w)$ mindenütt holomorf; így szükségkép $\Xi_{y_0}>0$.

Felhasználva az imént igazolt 1. részt, a (*) kikötés mellett adódik: bármely rögzített s-re $f_{[s]}(w)$ differenciálható a $|v-y_0|<\Xi_{y_0}$ sávban, s itt fennáll (10.10); ebből pedig a CAUCHY—TAYLOR-féle kifejtési tétel alapján következik (10.11), hacsak $|\Delta z|<\Xi_{y_0}$.

3. (10.9)-ben s helyett $(s-\nu)$-t véve és $\mathfrak{C}_l$ helyett speciálisan egy $|w-z|=\delta$ (pozitív irányítású) kört választva integrációs útnak, írhatjuk (vö. (3.5), (6.7)):

$$(10.16)\quad \begin{cases} c_{\nu,s}(z)=\dfrac{\Gamma(1-s+\nu)}{\nu!}\Bigg\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|w-z|=\delta} f(w)(w-z)^{s-\nu-1}\,dw+ \\ \quad +(-1)^{\nu}\dfrac{\sin \pi s}{\pi}\Bigg[\displaystyle\int_0^1 f(z-t)\,\zeta(1-s+\nu,t+1)\,dt+\int_\delta^1 f(z-t)\,t^{s-\nu-1}dt\Bigg]\Bigg\} \\ \qquad\qquad (\nu=0,1,2,\ldots). \end{cases}$$

Itt $\nu>\sigma$ mellett $|\zeta(1-s+\nu,t+1)|\leqq\zeta(1-\sigma+\nu)$ $(0\leqq t\leqq 1)$, továbbá $\Gamma(1-s+\nu)|\leqq\Gamma(1-\sigma+\nu)$, $|\sin\pi s|\leqq|\sin\pi\sigma|+|\operatorname{sh}\pi\tau|$, úgyhogy az integrálok legegyszerűbb megbecslése (10.12)-t szolgáltatja.

5. Kiemeljük, hogy (10.11) és (10.12) $s=0$ esetén az

$$(10.17)\qquad f(z+\Delta z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}(\Delta z)^{\nu}$$

kapcsolatba, ill. a

$$(10.18)\qquad |c_{\nu,0}(z)|=\left|\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}\right|\leqq\frac{M_z(\delta)}{\delta^{\nu}}\qquad(\nu=1,2,\ldots)$$

egyenlőtlenségbe megy át, tehát *a Cauchy—Taylor-féle kifejtési tétel megfelelőjével és a Cauchy-féle becslési formulák általánosított alakjával* állunk szemben.

E vonatkozásban megemlítendő, hogy RIEMANN idevágó munkájában a törtrendű integrálok és deriváltak bevezetését éppen a közönséges TAYLOR-sornak egy formálisan felírt (mindkét irányban végtelen) kiterjesztésére alapozza, ti. az

$$(10.19)\qquad f(x+h)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{h^{\nu+r}}{\Gamma(\nu+r+1)}f^{(\nu+r)}(x)$$

képletre, ahol r nem-egész valós szám és $f^{\nu+r}$ a $(\nu+r)$-edrendű (általánosított) derivált jele (vö. (1.1), (1.3)). Bár (10.19) bizonyos esetei — főleg az ún. HEAVISIDE-kalkulus elterjedése óta — gyakran szerepelnek az irodalomban, csak a 40-es években sikerült HARDYnak megmutatnia, hogy (10. 19) valóban érvényes egyes speciális függvényosztályokra aszimptotikus, ill. BOREL-típusú sorfejtésként.[76]

6. A XII. tételből folyik, hogy a fenti feltételek mellett $f_{[s]}(z)$ *Laurent-sorba is fejthető* — bár nem $z-z_0=\Delta z_0$ $(z_0 \in (iy_0, 1+iy_0))$, hanem $e^{2\pi iz}$ *hatványai szerint.*

XIII. tétel. *Ha $f(w)$ holomorf egy $\vec{l}_0: [iy_0, 1+iy_0)$ irányított egyenesdarab mentén és $\int\limits_{(\vec{l}_0)} f(w)\,dw=0$, akkor tetszőleges (komplex) s mellett minden $z \in \vec{l}_0$ pontban fennáll:*

$$f_{[s]}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-s}\gamma_{n,y_0}\cdot e^{2n\pi iz}, \tag{10. 20}$$

ahol $(2n\pi i)^{-s}$ főérték,

$$\gamma_{n,y_0}=\int\limits_{(\vec{l}_0)} f(w)\,e^{-2n\pi iw}\,dw \qquad (n=\pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{10. 21}$$

és ′ azt jelzi, hogy $n \neq 0$.

(10. 20) *pontos érvényességi tartománya a w-síknak az a legszélesebb, az $u=y_0$ egyenest belsejében tartalmazó és a valós tengellyel párhuzamos egyenesek által határolt sávja, melyben $f(w)$ szingularitásmentes.*

BIZONYÍTÁS. Legyen s rögzítve, $z=x+iy$.

A tétel premisszájából folyik — mint fent láttuk — oly $|v-y_0|<v^*$ sáv létezése, melyben $f_{[s]}(w)$ szintén reguláris. De akkor (egy periodikus komplex függvényekre vonatkozó ismert tétel[77] alapján) mindenesetre fennáll

$$f_{[s]}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,s}\cdot e^{2n\pi iz} \qquad (|x-y_0|<v^*) \tag{10. 22}$$

alkalmas $A_{n,s}$ együtthatókkal. Egyúttal adódik, hogy az érvényességi tartományt határoló $v=y_0\pm v^*$ egyenesek önmagukkal párhuzamosan eltolhatók mindaddig, míg a köztük levő sávban $f(w)$ reguláris marad; az így nyert sávon kívül viszont a (10. 22) sor mindenütt divergens.

Tehát csupán azt kell még igazolnunk, hogy (10. 22)-ben (vö. (10. 21))

$$A_{n,s}=\begin{cases} 0, & \text{ha } n=0; \\ (2n\pi i)^{s}\gamma_{n,y_0}, & \text{ha } n\neq 0. \end{cases} \tag{10. 23}$$

[76] Vö. [14]. — HARDY írja (i. h. 49. o.): "Riemann's point of view is avowedly heuristic, his object being to define $D^p(=f^p)$ such a way as to secure formal agreement with (1. 1) (=(10. 19))...".

[77] Vö. pl. [21], 64—65.

Valóban, válasszuk a $p \geqq 0$ egész számot úgy, hogy $\sigma > 1 - p$, s legyen $z \in \vec{l}_0$. Írhatjuk (vö. (3. 1), (10. 13)):

$$
(10.\,24)\quad \begin{cases} f_{[s]}(z) = \int\limits_0^1 f^{(p)}(z-t)\, \mathfrak{Z}_{s+p}(t)\, dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-(s+p)} \int\limits_0^1 f^{(p)}(z-t) e^{2n\pi i t} dt = \\ \qquad = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-(s+p)} e^{2n\pi i z} \int\limits_{(\vec{l})} f^{(p)}(w)\, e^{-2n\pi i w}\, dw = \\ \qquad = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-s} \gamma_{n, y_0} \cdot e^{2n\pi i z}.\ [78] \end{cases}
$$

Minthogy pedig valamely $\Phi(Z)$ függvény $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot Z^n$ típusú LAURENT-sorfejtése egy-egy 0-centrumú, szingularitásmentes körgyűrűn belül egyértelmű, (10. 22)-ből és (10. 24)-ből koefficiens-összehasonlítással (10. 23)-ra jutunk. Qu. e. d.

Megjegyezzük, hogy $y_0 = 0$, azaz $z = x \in (0, 1)$ esetén (10.20) az alapvető

$$
(10.\,25)\qquad \begin{cases} f_{[s]}(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-s} \gamma_n e^{2n\pi i x}, \\ \gamma_n = \int\limits_0^1 f(t)\, e^{-2n\pi i t}\, dt \end{cases}
$$

Fourier-előállításra redukálódik (vö. (2. 9)—(2. 11)), mely azonban tetszőleges (1 szerint periodikus, 0 integrál-középértékű) $f(u) \in L(0, 1)$ függvényre — mint tudjuk — csak $\sigma > 1$ mellett érvényes.

11. §. Más komplex vonalintegrál-előállítások

1. Az utolsónak tárgyalt esetben $f_{[s]}(z)$ (10. 9) alatti kifejezése egyszerűbb alakra hozható: $I_s(f, z, \delta)$ mintegy az előtte álló vonalintegrálba olvasztható — *feltéve, hogy* $0 < \sigma < 1$. — A nyert integrál egy adott pontot megkerülő és egy abból kiinduló félegyenes mindkét oldalán a végtelenbe nyúló integrációs útra vonatkozik, tehát ún. „hurokintegrál"; úgy is felfoghatjuk, mint a (7. 10) alatti WEYL-integrál holomorf függvényekre vonatkozó, kiterjesztett megfelelőjét.

[78] Az itt felhasznált tagonkénti integrálás nyilván megengedett.

XIV. tétel. *Tegyük fel, hogy $f(w)$ egy adott $\vec{l}_0$: $[iy_0, 1+iy_0)$ irányított egyenes-szakasz minden pontjában reguláris és ennek mentén vett integrálja eltűnik, legyen továbbá $z=x+iy \in (iy_0, 1+iy_0)$.*

Akkor érvényes az

$$f_{[s]}(z)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{L})} f(w)(w-z)^{s-1}\,dw \qquad (0<\sigma<1) \tag{11.1}$$

előállítás; itt $\mathfrak{L}$ egy tetszőleges, a $-\infty+iy_0$ pontból kiinduló, előbb a $v<y_0$ félsíkban haladó, majd a z pont egyszeri pozitív értelmű megkerülése után a $v>y_0$ félsíkban újra $(=\infty+iy_0)$-ba visszatérő folytonos Jordan-görbe, mely elegendő közel van a $v=y_0$, $u\leqq x$ félegyeneshez.[79]

BIZONYÍTÁS. Feltételeink mellett $f_{[s]}(z)$ minden s-re létezik és (10. 9) szerint

$$\left\{\begin{aligned} f_{[s]}(z)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\oint_{|w-z|=\delta} f(w)(w-z)^{s-1}\,dw+\int_0^1 f(z-t)\,\mathfrak{z}_s(t)\,dt+\\ +\Gamma(s)^{-1}\int_\delta^1 f(z-t)\,t^{s-1}\,dt \qquad (s\neq 1,2,\ldots),\end{aligned}\right. \tag{11.2}$$

ahol δ elegendő kis pozitív számot jelent és a körintegrál pozitív körüljárással értendő.

Ha $0<\sigma<1$, akkor (7. 19) felhasználásával (vö. (6. 7))

$$\mathfrak{z}_s(t)=\Gamma(s)^{-1}\left[-\frac{1}{s}+\sum_{m=1}^{\infty}\left((m+t)^{s-1}-\frac{(m+1)^s-m^s}{s}\right)\right] \qquad (0<t<1) \tag{11.3}$$

és a jobboldali sor (rögzített s mellett) $(0,1)$-ben egyenletesen konvergens. Így a (11. 2)-beli második integrál:

$$\int_0^1 f(z-t)\,\mathfrak{z}_s(t)\,dt=\Gamma(s)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\int_m^{m+1} f(z-v)\,v^{s-1}\,dv=\Gamma(s)^{-1}\int_1^{\infty} f(z-v)\,v^{s-1}\,dv,$$

és a képlet az egyszerűbb

$$f_{[s]}(z)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\oint_{|w-z|=\delta} f(w)(w-z)^{s-1}\,dw+\Gamma(s)^{-1}\int_\delta^{\infty} f(z-t)\,t^{s-1}\,dt \tag{11.4}$$
$$(0<\sigma<1)$$

alakot ölti; kézenfekvő arra gondolni, hogy az utolsó tagot az $f(w)(w-z)^{s-1}$ függvény valamely alkalmas vonalintegráljával hozzuk kapcsolatba.

[79] Azaz beleesik egy $|v-y_0|<\delta$, $u\leqq x+\delta$ sávba, elegendő kicsi $\delta>0$ mellett.

Figyelembe véve, hogy a $(w-z)^{s-1}$ főérték holomorfiatartománya a $v=y_0$, $u \leqq x$ félegyenes hosszában felhasított w-sík, integráljuk az említett függvényt a metszet „felső", ill. „alsó" partja mentén. Írhatjuk (vö. (10. 3)):

$$
(11.5)\quad \begin{cases} \int\limits_{-\infty+iy_0}^{z-\delta} f(w)(w-z)_+^{s-1}\,dw + \int\limits_{z-\delta}^{-\infty+iy_0} f(w)(w-z)_-^{s-1}\,dw = \\ = \int\limits_{-\infty}^{x-\delta} f(u+iy_0)(x-u)^{s-1}(e^{-i\pi s}-e^{i\pi s})\,du = \\ = 2i\sin\pi s\cdot\int\limits_{\delta}^{\infty} f(z-t)t^{s-1}\,dt, \end{cases}
$$

s a (11. 4)-be való helyettesítés (vö. (3. 5)) az újabb

$$
(11.6)\quad \begin{cases} f_{[s]}(z) = \dfrac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\Bigg[\int\limits_{-\infty+iy_0}^{z-\delta} f(w)(w-z)_+^{s-1}\,dw + \oint\limits_{|w-z|=\delta} f(w)(w-z)^{s-1}\,dw + \\ \qquad + \int\limits_{z-\delta}^{-\infty+iy_0} f(w)(w-z)_-^{s-1}\,dw\Bigg] \qquad (0<\sigma<1) \end{cases}
$$

előállítást szolgáltatja.

Mivel pedig $f(w)(w-z)^{s-1}$ reguláris az imént említett metszet mindkét oldalán (egy-egy elegendő keskeny sávban), (11. 6)-ból következik (11. 1), az $\mathfrak{L}$ integrációs útnak a tételben megkövetelt választása mellett.

2. (11. 6), ill. (11. 1) kissé hosszadalmasabban (10. 20)—(10. 21) alapján is levezethető, ha a

$$
(11.7)\quad \begin{cases} (2n\pi i)^{-s} = \Gamma(s)^{-1}\int\limits_0^{\infty} u^{s-1}e^{-n\pi i u}\,du \\ (n=\pm 1, \pm 2, \ldots;\ 0<\sigma<1) \end{cases}
$$

képletre támaszkodunk.

Most megmutatjuk, hogy a gammafüggvény EULER-féle integrálalakjából közvetlenül folyó

$$
(11.8)\qquad (2n\pi)^{-s} = \Gamma(s)^{-1}\int\limits_0^{\infty} u^{s-1}e^{-2n\pi u}\,du \qquad (n=1, 2, \ldots;\ \sigma>1)
$$

formula segítségével $f_{[s]}(z)$ számára új típusú vonalintegrál-kifejezés nyerhető, amely — ellentétben (11. 1)-gyel — *az egész s-síkon* érvényes. — Mindenesetre várható, hogy ez alkalommal a W_s-limesz (2.10)-beli első alakja, ill. (10.20) megfelelő (két sorra bontott) változata:

$$(11.9)\qquad \begin{cases} f_{[s]}(z) = e^{-\frac{i\pi s}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\gamma_{n,y_0}}{(2n\pi)^s} e^{2n\pi i z} + \\ \quad + e^{+\frac{i\pi s}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\gamma_{-n,y_0}}{(2n\pi)^s} e^{-2n\pi i z} \end{cases}$$

kerül előtérbe.

3. Írjuk (vö. (2.11), (10.21)):

$$(11.10)\qquad f_{\pm}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{\pm n} - \gamma_0) e^{\pm 2n\pi i w},$$

$$(11.11)\qquad f_{\pm, y_0}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{\pm n, y_0} e^{\pm 2n\pi i w},$$

a jobboldali sorok konvergenciájának feltételezése mellett. — Látható, hogy a (11.10) sor összetartó, ha $v > 0$, ill. $v < 0$, a plusz-, ill. mínusz-jel esetének megfelelően ($\gamma_0 \neq 0$ mellett e kikötések nyilván szükségesek is); (11.11)-nél a konvergenciához elégséges, hogy $v > y_0(+)$, ill. $v < y_0(-)$ legyen.

Segédeszközül szolgál az önmagában sem érdektelen

XV. tétel. 1. *Bármely $f(u) \in L(0,1)$ függvényre minden $x \in (0,1)$ helyen, $\sigma > 1$ mellett fennáll*

$$(11.12)\qquad f_{[s]}(x) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^{\infty} u^{s-1} \left[e^{-\frac{i\pi s}{2}} f_+(x+iu) + e^{\frac{i\pi s}{2}} f_-(x-iu) \right] du.$$

2. *Ha $f(w)$ egy $[iy_0, 1+iy_0)$ $(y_0 \gtrless 0)$ egyenesdarab mentén reguláris és $\int_0^1 f(u+iy_0)\,du = 0$, akkor minden $z \in (iy_0, 1+iy_0)$ helyen, $\sigma > 1$ mellett érvényes az*

$$(11.13)\qquad f_{[s]}(z) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^{\infty} u^{s-1} \left[e^{-\frac{i\pi s}{2}} f_{+,y_0}(z+iu) + e^{\frac{i\pi s}{2}} f_{-,y_0}(z-iu) \right] du$$

előállítás.

BIZONYÍTÁS. 1. Ha a $\sigma > 1$ mellett bizonyosan konvergens

$$(11.14)\quad f_{[s]}(x) = e^{-\frac{i\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-s} (\gamma_n - \gamma_0) e^{2n\pi i x} + e^{\frac{i\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-s} (\gamma_{-n} - \gamma_0) e^{-2n\pi i x}$$

sorfejtésben (vö. (2.10)) a $(2n\pi)^{-s}$ tényezőt (11.8)-beli kifejezésével pótoljuk, egyszerű formális számolással rögtön (11.12)-re jutunk; hátra van még azonban annak megmutatása, hogy az összegezés és integrálás sorrendjének felcserélése esetünkben megengedett.

Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy a (11.12) alatti

$$J_{\pm}(x, s) = \int_0^\infty u^{s-1} f_{\pm}(x \pm iu)\, du \tag{11.15}$$

integrálok minden (0, 1)-beli x-re, $\sigma > 1$ mellett valóban léteznek, mert [vö. (11.10)]

$$|f_{\pm}(x \pm iu)| \leqq 2 \int_0^1 |f(t)|\, dt \cdot (e^{2\pi u} - 1)^{-1} \qquad (u > 0) \tag{11.16}$$

folytán az integrandusok közös majoránsa a $(0, \infty)$-ben integrálható $u^{\sigma-1}(e^{2\pi u} - 1)^{-1}$ függvénynek egy állandóval való szorzata.

Tekintsük továbbá a

$$J_{\pm}(x, s) = \sum_{n=1}^{N} \int_0^\infty u^{s-1} (\gamma_{\pm n} - \gamma_0)\, e^{2n\pi(\pm ix - u)}\, du + P_{\pm, N}(x, s) \tag{11.17}$$

felbontást; itt

$$|P_{\pm, N}(x, s)| = \left| \int_0^\infty u^{s-1} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} (\gamma_{\pm n} - \gamma_0)\, e^{2n\pi(\pm ix - u)} \right) du \right| \leqq$$

$$\leqq 2 \int_0^1 |f(t)|\, dt \cdot \int_0^\infty \frac{u^{\sigma-1}}{e^{2\pi u} - 1} e^{-2N\pi u}\, du,$$

és az utolsó tag $N \to \infty$ esetén 0-hoz tart, mint az

$$\int_0^\infty u^{\sigma-1} (e^{2\pi u} - 1)^{-1} e^{-2N\pi u}\, du < (2\pi)^{-1} \int_0^\infty u^{\sigma-2} e^{-2N\pi u}\, du = (2\pi)^{-\sigma}\, \Gamma(\sigma - 1)\, N^{1-\sigma}$$

becslésből kitűnik.

Ennélfogva (11.6)-ból kapjuk:

$$J_{\pm}(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty u^{s-1} (\gamma_{\pm n} - \gamma_0)\, e^{2n\pi(\pm ix - u)}\, du,$$

amivel állításunk igazolást nyert.

2. Ha (11.9)-ből indulunk ki és figyelembe vesszük, hogy

$$(11.18)\qquad \begin{cases} |\gamma_{\pm n, y_0}| = e^{\pm 2n\pi y_0} \left| \int\limits_0^1 f(u+iy_0)\, e^{\mp 2n\pi i u}\, du \right| \leqq \\ \leqq e^{\pm 2n\pi y_0} \int\limits_0^1 |f(u+iy_0|\, du, \end{cases}$$

akkor az előbbiekkel analóg módon következik (11.13).

4. (11.12)—(11.13) felhasználása révén nehézség nélkül jutunk újabb „hurokintegrál"-előállításokhoz.

XVI. tétel. *Ha $f(u) \in L(0,1)$ és valamely $x \in (0,1)$ helyen $f_+(w)$ és $f_-(w)$ egyaránt reguláris, akkor az adott x-re és bármely s-re:*

$$(11.19)\qquad f_{[s]}(x) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int\limits_{(\mathfrak{L}_0)} w^{s-1} \left[e^{-\frac{i\pi s}{2}} f_+(x-iw) + e^{\frac{i\pi s}{2}} f_-(x-iw) \right] dw.$$

2. (11.13)*-éval megegyező premissza mellett fennáll minden $z \in (iy_0, 1+iy_0)$ $(y_0 \gtrless 0)$ helyen, bármely s-re:*

$$(11.20)\qquad f_{[s]}(z) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int\limits_{(\mathfrak{L}_0)} w^{s-1} \left[e^{-\frac{i\pi s}{2}} f_{+, y_0}(z-iw) + e^{\frac{i\pi s}{2}} f_{-, y_0}(z+iw) \right] dw.$$

Mindkét képletben w^{s-1} főértéket jelöl, $\mathfrak{L}_0$ pedig ugyanolyan jellegű, ezúttal a $w=0$ pontot megkerülő s az $u=0$, $v \leqq 0$ félegyeneshez elég közeli görbe, mint (11.1) *integrációs útja.*[80]

Bizonyítás. 1. Vegyük észre, hogy $\mathfrak{J}(x \pm iw) = \mathfrak{R}(w)$ folytán $v<0$ esetén $x-iw$, $x+iw$ beleesik a (11.10)-beli $e^{2\pi i w}$, ill. $e^{-2\pi i w}$ hatványai szerint haladó hatványsor konvergencia-tartományába, s így kimondhatjuk: $v<0$ mellett mind $f_+(x-iw)$, mind $f_-(x+iw)$ w-nek holomorf függvénye. — Továbbá feltevésünk szerint létezik oly $|w|<\delta$ körlemez, melynek bármely pontjában $f_\pm(x \mp iw)$ (mint w függvénye) differenciálható.

Képezzük $\sigma > 1$ mellett a

$$(11.21)\qquad T_\pm(x,s) = \int\limits_{(\mathfrak{L}_0)} w^{s-1} f_\pm(x \mp iw)\, dw$$

hurokintegrálokat, $\mathfrak{L}_0$-t az $u=0$, $v \leqq 0$ félegyeneshez elegendő közel oly módon választva, hogy beleessék $f_+(x-iw)$ és $f_-(x+iw)$ ezen félegyenes körüli holomorfia-tartományának közös részébe. $T_\pm(x,s)$ az eddigiek és (11.16)

[80] Csak rövidség kedvéért nem említjük a tételben, hogy (11.19) és (11.20) jobboldalán $s = 1, 2, \ldots$ mellett a megfelelő limesz értendő.

alapján bizonyosan létezik, továbbá a CAUCHY-féle alaptételre tekintettel írhatjuk:

$$
(11.22)\quad \begin{cases} T_{\pm}(x,s)=\int\limits_{-\infty}^{-\varrho}(w^{s-1})_{-}f_{\pm}(x\mp iw)\,dw+\oint\limits_{|w|=\varrho}w^{s-1}f_{\pm}(x\mp iw)\,dw+ \\ \qquad +\int\limits_{-\varrho}^{-\infty}(w^{s-1})_{+}f_{\pm}(x\mp iw)\,dw, \end{cases}
$$

hol ϱ elegendő kicsi pozitív szám, a körintegrál pozitív körüljárású és $(w^{s-1})_{\pm}=$ $=-|w|^{s-1}e^{\pm i\pi s}$.

Ámde az egyenes útra vonatkozó integrálok összege:

$$
\int\limits_{-\varrho}^{-\infty}f_{\pm}(x\mp iw)\,[(w^{s-1})_{+}-(w^{s-1})_{-}]\,dw=2i\sin\pi s\cdot\int\limits_{\varrho}^{\infty}f_{\pm}(x\pm iu)\,u^{s-1}\,du,
$$

úgyhogy (11.22)-ből $\varrho\to+0$ határátmenetnél (vö. (11.15))

$$
(11.23)\qquad T_{\pm}(x,s)=2i\sin\pi s\cdot J_{\pm}(x,s)
$$

adódik. Innen (11.12) folyományaképpen

$$
(11.24)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\left[e^{-\frac{i\pi s}{2}}T_{+}(x,s)+e^{\frac{i\pi s}{2}}T_{-}(x,s)\right]= \\ =\Gamma(s)^{-1}\left[e^{-\frac{i\pi s}{2}}J_{+}(x,s)+e^{\frac{i\pi s}{2}}J_{-}(x,s)\right]=f_{[s]}(x); \end{cases}
$$

s mivel $T_{\pm}(x,s)$ (az s-sík minden véges tartományában egyenletesen konvergens lévén) s-nek egész, az $s=1,2,\ldots$ helyeken eltűnő függvénye, (11.24) és együttal (11.19) az egész s-síkon érvényes.

2. Ami az állítás második felét illeti, csak azt kell meggondolnunk, hogy ez esetben $f(w)$ $v=y_0$ egyenesmenti regularitása már maga után vonja a (11.11) sorok egyidejű konvergenciáját és $f_{\pm,y_0}(w)$ holomorfiáját egy teljes $v-y_0|<\eta$ sávban (vö. XIII. tétel); különben az

$$
\int\limits_{(\mathfrak{L}_0)}w^{s-1}f_{\pm,y_0}(z\mp iw)\,dw
$$

kontúrintegrálok diszkussziója a fentieknek pontosan megfelelő módon vezet (11.20)-ra. Qu. e. d.

5. (11.12)-vel és (11.19)-cel kapcsolatban megemlítjük még, hogy ezek bizonyos alapvető, a RIEMANN-féle zetafüggvényre vonatkozó formulák általánosításainak tekinthetők.

Valóban, $f(u) \equiv -1$ esetén rövidítés után nyerjük (vö. (4. 7)):

$$\zeta(1-s,x)=(2\pi)^{-s}\int_0^\infty u^{s-1}\left(\frac{e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{e^{u-2\pi ix}-1}+\frac{e^{\frac{i\pi s}{2}}}{e^{u+2\pi ix}-1}\right)du \qquad (\sigma>1), \tag{11.25}$$

ill.

$$\zeta(1-s,x)=\frac{(2\pi)^{-s}}{2i\sin\pi s}\int_{(\mathfrak{L}_0)} w^{s-1}\left(\frac{e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{e^{-w-2\pi ix}-1}+\frac{e^{\frac{i\pi s}{2}}}{e^{-w+2\pi ix}-1}\right)dw \quad (s\neq 0); \tag{11.26}$$

innen pedig $x=1$ mellett a (3. 2) függvényegyenlet alapján:

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u-1}\,du \qquad (\sigma>1), \tag{11.27}$$

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{L}_0)} \frac{w^{s-1}}{e^{-w}-1}\,dw \qquad (s\neq 1). \tag{11.28}$$

Az utóbbiak $\zeta(s)$ klasszikus, RIEMANNtól származó integrál-előállításai.

(Beérkezett: 1960. I. 15.)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete

A $\sum \binom{n}{r+kq}$ ÖSSZEGRŐL

Írta: HUSZÁR GÉZA

1. §

A fenti[1] háromváltozós indexfüggvény más alakban való előállításának feladatát A. A. COURNOT[2] és CHR. RAMUS[3] trigonometriai alakban oldja meg.[4] A RAMUS-képlet

$$\sum \binom{n}{r+kq} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \left(2 \cos \frac{k\pi}{q}\right)^n \cos \frac{k(n-2r)}{q} \pi$$

minden formai érdekessége mellett nem viszi előbbre a kérdést. Az efajta előállításnak ui. két célja lehet: a) *elméletileg,* az adott függvényt új világításba helyezni, a közvetlen, definíció szerinti — jelen esetben kombinatorikai — háttértől függetlenítve azt; b) *gyakorlatilag:* módszert adni a függvényértéknek adott argumentumok — jelen esetben argumentumhármas — melletti kiértékelésére.

Mindezen követelményeknek a RAMUS-képlet egyáltalán nem felel meg. Elméletileg a trigonometriai alakú képlet nem revelál semmit, gyakorlatilag pedig — már pl. $q=5$ mellett is — használhatatlannak bizonyul. Olyan nagy a munkaigénye, hogy ahhoz képest még a közvetlen kiértékelés is inkább jöhet számításba.

Az alábbiakban eljárást közlünk az összeg aritmetikai előállítására, visszavezetve a kérdést a rekurrens sorozatok elméletére és gyakorlatára.

Tétel: *Legyen* $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, $n_0 = n - 2m$ *(és így* $0 < n_0 \leqq 2$*), továbbá* $0 \leqq r < q$, *s minden növelt vagy csökkentett r-értéken* a mod $\cdot q$ *legkisebb nem-negatív maradék értendő és legyen*

$$r_0 \equiv r - m \ (\text{mod} \cdot q), \ \textit{ahol} \ 0 \leqq r_0 < q,$$

[1] Az összegezés vonatkozzék minden k értékre, amely mellett a megfelelő binomiális együtthatóknak elemi kombinatorikai értelmük vagy értelmezésük van.

[2] *A. A. Cournot:* Solution d'un problème d'analyse combinatoire. Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques, tome onzième 1829. p. 93—97.

[3] Journal f. Math. (1834) Bd. 11. p. 353.

[4] Cit. sec. Eugen *Netto:* Lehrbuch der Combinatorik (Leipzig 1910.) 19. o.

továbbá

$$p=\left[\frac{q-1}{2}\right],$$

akkor

$$\sum\binom{n}{r+kq}=\frac{2^n+E(n,r,q)}{q},$$

ahol $E(n,r,q)$ *az*

$$E_1=E(n_0,r_0,q)=q\binom{n_0}{r_0}-2^{n_0}$$

$$E_2=E(n_0+2,r_0+1,q)=q\binom{n_0+2}{r_0+1}-2^{n_0+2}$$

$$\vdots$$

$$E_p=E(n_0+2p-2,r_0+p-1,q)=q\binom{n_0+2p-2}{r_0+p-1}-2^{n_0+2p-2}$$

kezdeti értékkel és az

$$E(n,r,q)=\binom{q-2}{1}E(n-2,r-1,q)-\binom{q-3}{2}E(n-4,r-2,q)\pm\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{p-1}\binom{q-p-1}{p}E(n-2p,r-p,q)$$

egyenlettel definiált rekurrens sorozat $(m+1)$*-edik tagja.*

Különösen egyszerű az eredmény $q=3$ esetében:

$$\sum\binom{n}{r+3k}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+3}+\binom{n}{r+6}+\cdots=\frac{2^n-2^{n_0}}{3}+\binom{n_0}{r_0}$$

és $q=4$ esetében:

$$\sum\binom{n}{r+4k}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+4}+\binom{n}{r+8}+\cdots=\frac{2^n-2^{m+n_0}}{4}+2^m\binom{n_0}{r_0}.$$

2. §

Kiindulunk a következő összefüggésből:

1. LEMMA.

$$(1)\qquad \binom{q-1}{0}\sum\binom{n}{r+kq}-\binom{q-2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+kq}+$$
$$+\binom{q-3}{2}\sum\binom{n-4}{r-2+kq}-\cdots=2^{n-q+1}.$$

Bizonyítás: Ha $q=1$, a $\sum\binom{n}{r+k}$ összeg tagjai $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{n}$ a binomiális háromszög[5] n-edik sorának (összes) tagjai s így (1)-nek megfelelően valóban

$$\sum\binom{n}{r+k}=2^n.$$

Ha $q=2$, a $\sum\binom{n}{r+2k}$ összeg felöleli — r paritásához képest — a binomiális háromszög n-edik sorának páros, ill. páratlan alsó számú tagjait, s mint az elemekből ismeretes, a két összeg egyenlő, tehát mindenképpen:

$$\sum\binom{n}{r+2k}=2^{n-1}.$$

További elemzésünk könnyebb megértésére értelmezzük ezt a $q=2$ esetet a következőképpen:

A binomiális együtthatók elemi tulajdonsága alapján

$$\sum\binom{n}{r+2k}=\sum\binom{n-1}{r+2k}+\sum\binom{n-1}{r-1+2k}$$

s így a $\sum\binom{n}{r+2k}$ összeg tagjai hiánytalanul kitöltik a binomiális háromszög $n-1$-edik sorát, tehát valóban

$$\sum\binom{n}{r+2k}=2^{n-1}.$$

$q=3$ esetében nem elég felmennünk az $n-1$-edik sorba, mert a $\sum\binom{n-1}{r+3k}$ és a $\sum\binom{n-1}{r-1+3k}$ összegek tagjai még nem töltik ki hézagmentesen ezt a sort, hiányzanak ezek a tagok:

$\binom{n-1}{r+1},\binom{n-1}{r+4},\ldots$, azaz a $\sum\binom{n-1}{r+1+3k}$ összeg tagjai.

Kézenfekvő ezért a $\sum\binom{n}{r+3k}$ összeg tagjait kétszer bontani, azaz felmenni az $n-2$-edik sorba.

Ekkor az

$$\binom{n}{r}=\binom{2}{0}\binom{n-2}{r}+\binom{2}{1}\binom{n-2}{r-1}+\binom{2}{2}\binom{n-2}{r-2}$$

[5] A *Pascal*-háromszöget, vagy *Tartaglia*-háromszöget, vagy arithmetikai háromszöget helyesebbnek tartjuk binomiális háromszögnek nevezni.

elemi összefüggés alapján

$$\sum\binom{n}{r+3k}=\binom{2}{0}\sum\binom{n-2}{r+3k}+\binom{2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+3k}+\binom{2}{2}\sum\binom{n-2}{r-2+3k}.$$

Így a $\sum\binom{n}{r+3k}$ összeg tagjai már kitöltik a binomiális háromszög $n-2$-edik sorának minden helyét, csakhogy az $\binom{n-2}{r-1+3k}$ összeg tagjai kétszer kerültek számításba.

Ezért nyilván

$$\sum\binom{n}{r+3k}-\sum\binom{n-2}{r-1+3k}=\sum\binom{n-2}{r+3k}+$$
$$+\sum\binom{n-2}{r-1+3k}+\sum\binom{n-2}{r-2+3k}=2^{n-2}.$$

A $q=3$ esetre ezzel az (1) alatti bizonyítandó állításunk igazolódott, mert utolsó egyenletünk szerint valóban:

$$\sum\binom{n}{r+3k}-\binom{3-2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+3k}=2^{n-3+1}.$$

Vessük fel most a kérdést tetszőleges q-ra, azaz bizonyítsuk be teljes általánosságban az (1) alatti összefüggést. Ekkor $q-1$ bontó lépést kell tennünk, hogy $\sum\binom{n}{r+kq}$ tagjai hézagmentesen töltsék ki a binomiális háromszög $n-q+1$-edik sorának helyeit. Csakhogy a

$$\sum\binom{n}{r+kq}=\binom{q-1}{0}\sum\binom{n-q+1}{r+kq}+\binom{q-1}{1}\sum\binom{n-q+1}{r-1+kq}+$$
$$(2)\qquad +\binom{q-1}{2}\sum\binom{n-q+1}{r-2+kq}+\cdots+\binom{q-1}{t}\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+$$
$$+\binom{q-1}{q-1}\sum\binom{n-q+1}{r-q+1+kq}$$

összeg tagjai a

$$\sum\binom{n-q+1}{r+kq}+\sum\binom{n-q+1}{r-1+kq}+\cdots+\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+$$
$$+\sum\binom{n-q+1}{r-q+1+kq}=2^{n-q+1}$$

összeg tagjait többszörösen tartalmazzák. Ha azonban a $q-3, q-5, \ldots$ számosságú bontással nyert

$$\sum\binom{n-2}{r-1+kq}=\binom{q-3}{0}\sum\binom{n-q+1}{r-1+kq}+\binom{q-3}{1}\sum\binom{n-q+1}{r-2+kq}+\cdots+$$
$$+\binom{q-3}{t-1}\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+\binom{q-3}{q-3}\sum\binom{n-q+1}{r-q+2+kq},$$
$$\sum\binom{n-4}{r-2+kq}=\binom{q-5}{0}\sum\binom{n-q+1}{r-2+kq}+\binom{q-5}{1}\sum\binom{n-q+1}{r-3+kq}+\cdots+$$
$$+\binom{q-5}{t-2}\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+\binom{q-5}{q-5}\sum\binom{n-q+1}{r-q+3+kq},\ldots$$

egyenletek $\binom{q-2}{1}, \binom{q-3}{2}, \ldots$-szereseinek váltakozó előjellel vett összegét kivonjuk (2)-ből, s a nyert összegre bebizonyítjuk, hogy abban minden t-hez[6] tartozó együttható 1, azaz, hogy általában

$$T(q-1,t)=\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{1}\binom{q-3}{t-1}+ \tag{3}$$
$$+\binom{q-3}{2}\binom{q-5}{t-2}-\cdots=1,$$

akkor ezzel kimutattuk, hogy

$$\binom{q-1}{0}\sum\binom{n}{r+kq}-\binom{q-2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+kq}+$$
$$+\binom{q-3}{2}\sum\binom{n-4}{r-2+kq}-\cdots=\sum\binom{n-q+1}{r+kq}+\sum\binom{n-q+1}{r-1+kq}+\cdots+$$
$$+\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+\sum\binom{n-q+1}{r-q+1+kq}=2^{n-q+1}.$$

Be kell tehát még bizonyítanunk a (3) alatti aritmetikai azonosságot.

2. LEMMA

$$T(q-1,t)=\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{1}\binom{q-3}{t-1}+\binom{q-3}{2}\binom{q-5}{t-2}-\cdots=1.$$

[6] Feltehetjük, hogy $0<t<q$, mert $t=0$-ra a (3) automatikusan fennáll.

BIZONYÍTÁS: Ha $t=q-1$, akkor

$$T(q-1, q-1)=\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{q-1}=1.$$

Ha pedig $t<q-1$, akkor a

$$T(q-1, t)=\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{1}\binom{q-3}{t-1}+\binom{q-3}{2}\binom{q-5}{t-2}-\cdots$$

és a

$$T(q-2, t-1)=\binom{q-2}{0}\binom{q-2}{t-1}-\binom{q-3}{1}\binom{q-4}{t-2}+\binom{q-4}{2}\binom{q-6}{t-3}-\cdots,$$

illetve annak könnyű átalakításával nyert

$$\binom{q-2}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{0}\binom{q-2}{t}-\binom{q-3}{1}\binom{q-3}{t-1}+\binom{q-3}{1}\binom{q-4}{t-1}+$$
$$+\binom{q-4}{2}\binom{q-5}{t-2}-\binom{q-4}{2}\binom{q-6}{t-2}+\cdots$$

alakokból

$$T(q-1, t)-T(q-2, t-1)=\binom{q-2}{0}\binom{q-2}{t}-\binom{q-3}{0}\binom{q-3}{t-1}-$$
$$-\binom{q-3}{1}\binom{q-4}{t-1}+\binom{q-4}{1}\binom{q-5}{t-2}+\binom{q-4}{2}\binom{q-6}{t-2}-\cdots=$$
$$=T(q-2, t)-T(q-3, t-1).$$

Ugyanígy tovább:

$$T(q-2, t)-T(q-3, t-1)=T(q-3, t)-T(q-4, t-1)=\cdots=$$
$$=T(t+1, t)-T(t, t-1)=\left[\binom{t+1}{0}\binom{t+1}{t}-\binom{t}{1}\binom{t-1}{t-1}\right]-$$
$$-\left[\binom{t}{0}\binom{t}{t-1}-\binom{t-1}{1}\binom{t-2}{t-2}\right]=(t+1-t)-(t-t+1)=0.$$

Tehát

$$T(q-1, t)=T(q-2, t-1),$$

s ugyanígy

$$=T(q-3, t-2)=\cdots=T(q-t, 1).$$

De

$$T(q-t, 1)=\binom{q-t}{0}\binom{q-t}{1}-\binom{q-t-1}{1}\binom{q-t-2}{0}=$$
$$=(q-t)-(q-t-1)=1.$$

A (3) alatti azonosságból még egy következtetés vonható le:

3. LEMMA.

Ha a

$$\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{1}\binom{q-3}{t-1}+\binom{q-3}{2}\binom{q-5}{t-2}-\cdots=1$$

aritmetikai azonosságban sorban $t=0,1,2,\ldots,q-1$ értéket helyettesítünk s oldalanként összevonunk, a következő aritmetikai azonosság adódik:

$$\binom{q-1}{0}2^{q-1}-\binom{q-2}{1}2^{q-3}+\binom{q-3}{2}2^{q-5}-\cdots=q \tag{4}$$

minden természetes q-ra.

3. §

A tétel bizonyítása az (1) és a (4) alatti összefüggések alapján most már könnyű. Ui.

$$q\left[\binom{q-1}{0}\sum\binom{n}{r+kq}+\binom{q-2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+kq}+\right.$$

$$\left.+\binom{q-3}{2}\sum\binom{n-4}{r-2+kq}-\cdots\right]=\left[\binom{q-1}{0}2^{q-1}-\binom{q-2}{1}2^{q-3}+\right.$$

$$\left.+\binom{q-3}{2}2^{q-5}-\cdots\right]2^{n-q+1}=\binom{q-1}{0}2^{n}-\binom{q-2}{1}2^{n-2}+\binom{q-3}{2}2^{n-4}+\cdots,$$

s így

$$\binom{q-1}{0}\left[q\sum\binom{n}{r+kq}-2^{n}\right]-\binom{q-2}{1}\left[q\sum\binom{n-2}{r-1+kq}-2^{n-2}\right]+$$

$$+\binom{q-3}{2}\left[q\sum\binom{n-4}{r-2+kq}-2^{n-4}\right]-\cdots=0,$$

tehát az

$$E(n,r,q)=q\sum\binom{n}{r+kq}-2^{n}$$

jelölés bevezetésével

$$\binom{q-1}{0}E(n,r,q)-\binom{q-2}{1}E(n-2,r-1,q)+\binom{q-3}{2}E(n-4,r-2,q)-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{p}\binom{q-p-1}{r}E(n-2p,r-p,q)=0.$$

Ez az összefüggés egyértelmű azzal, hogy az

$$\begin{aligned}&E(n-2p, r-p, q),\\&E(n-2p-2, r-p-1, q),\\&\vdots\\&E(n-4, r-2, q),\\&E(n-2, r-1, q),\\&E(n, r, q)\end{aligned}$$

mennyiségek (ahol $n-2p>0$) rekurrens sorozatot alkotnak. A kezdeti értékek mindebből automatikusan úgy adódnak, amint azt az 1. §-ban közöltük.

(Beérkezett: 1959. XI. 24.)

Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

VÉGES, KOALÍCIÓMENTES JÁTÉKOK*

Írta: N. N. VOROBJOV

Bevezetés

A játékok matematikai elméletéről szóló első munkának ZERMELO „Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels” című [1] cikkét kell tekintenünk. Ebben a cikkben, a konkrét jellegű cím ellenére, lényegében véve olyan pozíciós típusú absztrakt játékról van szó, amelyben csak véges számú állás fordulhat elő és amelyben mindkét játékos pontosan tudja, milyen az állás a játék adott pillanatában. Amint ZERMELO bebizonyította, a sakknál a következő három algoritmus egyike áll fenn: nyerő az egyik játékos (mondjuk, világos) számára, bárhogy játszik is ellenfele, analóg nyerő algoritmus a másik játékos (sötét) számára, végül pedig az az algoritmus, amely mindkét játékosnak lehetővé teszi a döntetlen elérését.

Ebben a vonatkozásban a sakk elvileg hasonlít az olyan primitív gyermekjátékhoz, mint a „benn a bárány, kinn a farkas”, amelynél ZERMELO tétele alapján az először említett két algoritmus egyike áll fenn (minthogy döntetlen ebben a játékban nem jön szóba). Amíg azonban a sakknál annak a kérdésnek a tisztázása, hogy a három algoritmus közül éppen melyik áll fenn a valóságban — amint a sok évszázados történelmi tapasztalat megmutatta — reménytelenül nehéz, addig a „benn a bárány, kinn a farkas” játéknál a „bárányok” nyerési algoritmusát mindenki, aki akarja, sikerrel alkalmazhatja.

Az említett játékoktól lényegesen különbözik a „fej vagy írás” játéknak az a formája, amikor az egyik játékos leteszi a pénzdarabot egyik oldalával felfelé, a másik pedig, nem látva azt, megpróbálja kitalálni, melyik oldal van felül. Itt nyilván semmiféle nyerő algoritmus nem lehetséges egyik játékos számára sem. Ugyanakkor ha feltesszük, hogy a „fej vagy írás” játékot sokszor megismétlik, akkor mindegyik játékos számára létezik egy bizonyos legokosabb magatartás: az első játékosnak minden egyes alkalommal $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kell „írást” és „fejet” mutatni függetlenül attól, hogyan feküdt a pénzdarab az előző menetekben. A hasonló fajtájú játékoknak ezt a való-

* Успехи математических наук 14 (1959), N^o 4, 20—56.

szinűségszámítási megközelítését BOREL, NEUMANN és KALMÁR fejlesztették ki a húszas évekből származó [2]—[6] munkáikban.

A következő évek folyamán számos további olyan cikk ([7]—[11]) jelent meg, amely a játékokat matematikai vizsgálatok tárgyának tekinti. A játékelmélet történetének ezt az előkészítő szakaszát 1944-ben NEUMANN és MORGENSTERN "Theory of games and economic behavior" című [12] monográfiájának megjelenése zárta le. Ebben a könyvben a szerzők megfogalmazták a játék axiomatikus definícióját, bebizonyították számos a játékokra vonatkozó tételt és megjelölték az elmélet további fejlődésének útjait.

NEUMANN és MORGENSTERN könyvének a megjelenése után sok matematikus erőteljesen hozzálát a játékelmélet kidolgozásához, és napjainkban ez már szélesen szétágazó és eredményekben gazdag tudományos elmélet, amely szorosan összekapcsolódik a matematika legkülönfélébb ágaival.

A játékelméletben „játékon" olyan jelenség kellőképpen leegyszerűsített modelljét értik, amelyben bizonyos számú „játékos" vesz részt, akiknek különböző érdekeik vannak és akik valamilyen módon küzdeni tudnak ezeknek az érdekeknek a megvalósulásáért. Itt játékosokon nemcsak fizikai személyeket érthetünk, hanem kollektívákat, játékosok csoportjait, versengő cégeket, hadviselő feleket, sőt, biológiai fajtákat is a létért való küzdelem feltételei között. Néha hasznos egyik játékosnak a természetet tekinteni.

Az egyes játékosok érdekeinek különbözősége egyáltalán nem jelenti az érdekek teljes szembenállását. Ezért a játékelmélet tekintetbe veszi a játékosok közti különféle kompromisszumok lehetőségét is, a cselekedetek összeegyeztetését, az információk kicserélését stb.

Megtörténhet, hogy a játék folyamán néhány játékos, valamilyen alapon megegyezésre jutva, egységes kollektívaként kezd fellépni, bizonyos közös érdekeket védve. Az ilyenfajta játékoscsoportot a játékelméletben kooperációnak szokás nevezni, azokat a játékokat pedig, amelyeknek a feltételei megengedik kooperációk kialakítását — kooperatív játékoknak. Annak ellenére, hogy már NEUMANN és MORGENSTERN fentemlített könyvében a kooperatív játékoknak jutott a monográfia terjedelmének körülbelül kétharmad része, a kooperatív játékokra kapott eredmények még nem tekinthetők egységes elméletnek, szemben a nemkooperatív játékok esetével, vagyis az olyan játékokéval, amelyekben a játékosok kooperációkban való egyesülését a játékszabályok nem engedik meg.

A játékosok egyesülésének a kooperációnál gyengébb formája a koalíció. A játékosok egy csoportjáról akkor mondjuk, hogy koalícióban egyesült, ha az illető játékosok megőrizve saját egyéni érdekeiket, azok megvalósítására valamilyen közös, összeegyeztetett cselekvési módot választanak. Azokat a nemkooperatív játékokat, amelyekben a koalíció-alkotás lehetősége fennáll, koalíciós játékoknak nevezzük. Azokat a játékokat, amelyeknél egyik játékos sem számíthat a játék folyamán támogatásra más játékosok részéről céljai elérésére, koalíciómenteseknek mondjuk.

A jelen cikk a véges, koalíciómentes játékok elméletének alapvető eredményeit tekinti át, vagyis az olyan koalíciómentes játékokénak, amelyeknél minden egyes játékos véges számú cselekvési móddal („stratégiával'') rendelkezik. A szerző azért szorítkozott a véges játékok vizsgálatára, mert éppen ezeknek a példáján különösen szemléletesen mutatható be a sajátosan játékelméleti problémák felállítása, megoldásuk módszereit pedig nem bonyolítja a funkcionálanalízis és az integrálegyenletek elméletének terjedelmes apparátusa.

A végtelen, koalíciómentes játékok és a koalíciós játékok elméletét a szerző más cikkekben szándékszik kifejteni.

1. §. Egyensúlyi helyzetek

1. A normálalakú játék definíciója. Legyen I véges halmaz, amelynek az elemeit *játékosoknak* nevezzük. Minthogy I elemeinek a jelölése számunkra közömbös, fel fogjuk tenni, hogy $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Feleltessünk meg mindegyik $i \in I$ elemnek egy S_i halmazt és nevezzük ennek az elemeit az i játékos *stratégiáinak.* A $S = \bigtimes_{i=1}^{n} S_i$ Descartes-szorzat elemeit, vagyis az összes n tagból álló $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ alakú sorozatokat, ahol $s_i \in S_i$ $(i \in I)$, *helyzeteknek* nevezzük.

Végül legyen a $I \times S$ halmazon értelmezve egy valós értékű, *nyereségfüggvénynek* nevezett $H(i, s)$ függvény. Hogy e függvény első és második változójának különböző természetét kidomborítsák, rendszerint a $H_i(s)$ írásmódot használják és a S halmazon értelmezett függvényrendszernek tekintik, amelyen belül minden egyes játékosnak megfelel a maga nyereségfüggvénye. A $H_i(s)$ számot az i játékos *nyereségének* nevezzük az s helyzetben. A

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle \tag{1.1}$$

rendezett hármast *normálalakú játéknak* nevezzük.

A játékosok rendelkezésére álló stratégiák halmazainak a játékelméletben nagy jelentőségük van. Tanulmányozás szempontjából legegyszerűbb az az eset, amikor az összes S_i halmazok végesek. Ebben az esetben magát a Γ játékot *végesnek* nevezzük.

A normálalakú játék tartalma abban áll, hogy mindegyik játékos, kiválasztva a maga stratégiáját, részt vesz a helyzet létrehozásában, amikor pedig a helyzet létrejött, ettől a helyzettől függően bizonyos nyereséget kap.

A játék folyamatát úgy képzelhetjük el, hogy a játékosok egymástól függetlenül rögzítik stratégiájukat. Miután a stratégiákat rögzítették és ezáltal a helyzetet meghatározták, a helyzet megvalósul, és valamilyen forrásból minden játékos megkapja az adott helyzetben neki járó nyereséget.

Ha ilyen forrás nincs, akkor mindegyik játékos a többiek számlájára kapja meg nyereségét. Ahhoz, hogy ez mindig lehetséges legyen, nyilván szükséges és elégséges, hogy minden s helyzetben

$$\sum_{i \in I} H_i(s) = 0$$

legyen.

Azokat a játékokat, amelyeknél ez a feltétel teljesül, zérus összegű játékoknak, vagy másképpen *nullajátékoknak* nevezzük.

A zérus összeg feltétele különösen egyszerű alakot ölt kétszemélyes játékok esetében:

$$H_1(s) + H_2(s) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az ilyen típusú játékoknál a $H_1(s)$ számot nemcsak az 1 játékos s helyzetbeli nyereségének tekinthetjük, hanem a 2 játékos ugyanezen helyzetbeli veszteségének is.

A kétszemélyes nullajátékok nyilván olyan jelenségek modelljei, amelyeknél a jelenségben résztvevő két fél érdekei ellentétesek és kizárják bármiféle kompromisszum lehetőségét. A kétszemélyes nullajátékok elmélete az általános játékelmélet egyik legfontosabb és legjobban kidolgozott része.

Az összes elmondottakkal kapcsolatban az az eset, amikor a játékosok halmaza egyetlen elemből áll, a játékelmélet szempontjából érdektelen, minthogy akkor ez az egyetlen játékos teljesen meghatározza az egész helyzetet és azt úgy választhatja meg, hogy a nyereségfüggvénynek a maga számára legelőnyösebb értékét biztosítsa. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy I legalább két játékosból áll.

Ugyanígy feltehetjük, hogy minden játékos legalább két stratégiával rendelkezik, minthogy az a játékos, akinek csak egy stratégia áll rendelkezésére, lényegében sehogyan sem tud befolyást gyakorolni a helyzet kialakulására, és passzív szemlélője marad a játéknak, ha érdekelt is annak kimenetelében. Ilyenkor a többi játékosok tevékenysége attól függetlenül valósul meg, részt vesz-e az adott játékos a játékban vagy sem. Ezért anélkül, hogy minden egyes alkalommal külön kikötnénk, fel fogjuk tenni, hogy mindegyik játékosnak egynél több stratégiája van.

2. Egyensúlyi helyzetek. Természetes dolog feltételezni, hogy mindegyik játékos célja saját nyereségfüggvénye maximális értékének az elérése. Minthogy azonban a játékos nyeresége függ a helyzettől, és maga a játékos a helyzet kialakulására csak részben tud befolyást gyakorolni, azért az a probléma, hogy a játékos miképpen tudja célját megvalósítani, nem triviális.

Foglalkozzunk részletesebben ezzel a kérdéssel.

Legyen

$$i \in I, \quad s_i^* \in S_i, \quad s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S.$$

Jelölje $s \| s_i^*$ azt a helyzetet, amelyet úgy kapunk s-ből, hogy benne az i játékos s_i stratégiáját ugyanennek a játékosnak az s_i^* stratégiájával helyettesítjük.

Az s helyzetet az i játékos számára *kedvezőnek* mondjuk, ha bármely $s_i^* \in S_i$ stratégiára

$$H_i(s) \geqq H_i(s \| s_i^*).$$

Ezt az elnevezést az indokolja, hogy bármelyik az i játékos számára nem kedvező helyzetben ez a játékos, kellőképpen megváltoztatva stratégiáját, megnövelheti nyereségét (feltéve természetesen, hogy a többi játékosok megtartják stratégiájukat).

Az olyan helyzetet, amely mindegyik játékos számára kedvező, a játék *egyensúlyi helyzetének* nevezzük. A Γ játék összes egyensúlyi helyzeteinek a halmazát $\mathfrak{S}_\Gamma$-val jelöljük. Az i játékos s_i stratégiáját e játékos *egyensúlyi stratégiájának* nevezzük, ha létezik s_i-t tartalmazó egyensúlyi helyzet.

Ha a játék folyamatát úgy fogjuk fel, hogy a játékosok előzetes megállapodás alapján választják meg stratégiájukat, akkor éppen az egyensúlyi helyzetekben és csak ezekben lesz kénytelen mindegyik játékos arra, hogy teljesítse kötelezettségeit. Ha a játékosok az egyezményben valamilyen nemegyensúlyi s helyzet rögzítését kísérlik meg, az arra vezet, hogy legalább egy játékos saját nyereségének a növelése céljából teljesen büntetlenül megszegheti a magára vállalt kötelezettségeket. Így tehát az s helyzet nem fog megvalósulni.

Az egyensúlyi helyzet fogalma a játékelmélet központi fogalma, és a modern játékelmélet lényegében a játékok egyensúlyi helyzeteinek az elmélete. A játékelméleti munkák túlnyomó többségét éppen az egyensúlyi helyzetekkel, létezésükkel, értelmezésükkel, megtalálásuk módjaival stb. kapcsolatos kérdéseknek szentelték. Alapjában véve ez a körülmény fog visszatükröződni a jelen ismertetésben is.

Kétszemélyes $\langle\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{H_1, H_2\}\rangle$ játéknál az $s = (s_1, s_2)$ helyzet egyensúlyi voltának feltételei a

$$(1.2) \qquad \begin{cases} H_1(s_1, s_2) \geqq H_1(s_1^*, s_2) & (s_1^* \in S_1), \\ H_2(s_1, s_2) \geqq H_2(s_1, s_2^*) & (s_2^* \in S_2) \end{cases}$$

alakot öltik. Ha ezenkívül a játék zérus összegű, vagyis tetszés szerinti s helyzetre

$$H_2(s) = -H_1(s),$$

akkor az (1. 2) feltételeket át lehet írni a következőképpen:

$$H_1(s_1, s_2^*) \geqq H_1(s_1, s_2) \geqq H_1(s_1^*, s_2). \tag{1.3}$$

Ezért kétszemélyes nullajátékoknál az egyensúlyi helyzetek létezésének kritériumát a következő elemi tétel adja meg.

1. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a*

$$\Gamma = \langle\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{H, -H\}\rangle$$

játéknak legyen egyensúlyi helyzete, szükséges és elégséges, hogy a

$$\min_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2) \quad \textit{és} \quad \max_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2) \tag{1.4}$$

kifejezések létezzenek és egymással egyenlők legyenek.

BIZONYÍTÁS. *Szükségesség.* Legyen $(s_1^*, s_2^*) \in \mathfrak{S}_\Gamma$. Ez azt jelenti, hogy fennáll (1. 3). Innen következik, hogy

$$H(s_1^*, s_2^*) = \sup_{s_1} H(s_1, s_2^*), \tag{1.5}$$

$$H(s_1^*, s_2^*) = \inf_{s_2} H(s_1^*, s_2), \tag{1.6}$$

azaz

$$\sup_{s_1} H(s_1, s_2^*) = \inf_{s_2} H(s_1^*, s_2).$$

Minthogy a baloldalon s_2 egy függvényének, a jobboldalon pedig s_1 egy függvényének az értéke áll, azért

$$\inf_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2) \leqq H(s_1^*, s_2^*) \leqq \sup_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2),$$

minthogy pedig az ismert minimax-egyenlőtlenség alapján a jobboldal nem haladja meg a baloldalt, fennáll

$$\inf_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2) = H(s_1^*, s_2^*) = \sup_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2).$$

Összehasonlítva ezt az (1. 5) összefüggéssel kapjuk, hogy

$$\sup_{s_1} H(s_1, s_2^*) = \inf_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2),$$

tehát a jobboldalon álló infimum eléretik és ezért helyette minimumot írhatunk. Így

$$H(s_1^*, s_2^*) = \min_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2).$$

Analóg módon belátható, hogy

$$H(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2),$$

és ezzel a szükségességet bebizonyítottuk.

Elégségesség. Legyen

$$\min_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2) = \max_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2).$$

Tegyük fel, hogy a baloldalon álló minimum $s_2 = s_2^*$ esetén, a jobboldalon álló maximum pedig $s_1 = s_1^*$ esetén valósul meg. Akkor

$$\sup_{s_1} H(s_1, s_2^*) = \inf_{s_2} H(s_1^*, s_2). \tag{1.7}$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\sup_{s_1} H(s_1, s_2^*) \geqq H(s_1^*, s_2^*) \geqq \inf_{s_2} H(s_1^*, s_2),$$

ebből pedig (1. 7)-re való tekintettel következik (1. 5) és (1. 6), tehát (1. 3) is.

Az (1. 4) minimax-egyenlőségnek, mint a kétszemélyes nullajáték egyensúlyossága feltételének a következő szemléletes értelmezés adható. Tegyük fel, hogy a játékosok nem egyidejűleg és nem egymástól függetlenül választják meg stratégiájukat, hanem sorban, egymás után, és közben az a játékos, aki már megválasztotta stratégiáját, tájékoztatja arról ellenfelét.

Ilyenkor ha az első játékos választja meg először a maga s_1^* stratégiáját, akkor a második, erről tudva, a saját s_2^* stratégiáját úgy fogja megválasztani, hogy vesztesége közel legyen az $\inf_{s_2} H(s_1^*, s_2)$ értékhez. Következésképpen az első játékosnak, aki előre látja ellenfelének ezt a magatartását, úgy kell megválasztania a maga s_1^* stratégiáját, hogy nyeresége maximális értéket vegyen fel:

$$\inf_{s_2} H(s_1^*, s_2) = \max_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2).$$

Ilymódon ennek az egyenlőségnek a jobboldala az a legnagyobb nyereség, amit az első játékos magának biztosítani tud.

Ha, fordítva, először a második játékos választja meg a maga s_2^* stratégiáját, akkor felcserélve a játékosok szerepét azt kapjuk, hogy a második játékos maximális garantált nyeresége

$$\max_{s_2} \inf_{s_1} (-H(s_1, s_2)) = -\min_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2)$$

lesz. Más szóval e feltételek mellett a második játékosnak módjában áll nem megengedni, hogy az első játékos nagyobb nyereségre tegyen szert, mint $\min_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2)$.

Ezek szerint ha mindkét játékos „okosan" játszik, akkor az elsőnek a nyeresége az (1. 4) minimax értékek közé kell hogy essék. A minimaxok egyenlősége esetén pedig az első játékos nyeresége (és ezzel együtt a másodiknak a vesztesége) teljesen meghatározott szám, melyet a *Γ játék értékének* nevezünk és v_Γ-val jelölünk. Ebben az esetben egyik játékosnak sincs oka, hogy titkolja a stratégia megválasztására vonatkozó szándékát: semmiféle ilyen tájékoztatás nem fogja arra ösztönözni az ellenfelet, hogy valamiképpen megváltoztassa terveit. Az a tény, hogy az egyensúlyi helyzetekkel rendelkező kétszemélyes nullajátékoknál a játékosok nyeresége teljesen meghatározott, indokolttá teszi, hogy az ilyen játékokat *teljesen határozottaknak* nevezzük.

Nem nehéz megmutatni, hogy kétszemélyes nullajáték esetében a $\mathfrak{S}_\Gamma$ halmaz téglalap alakú (vagyis az $(s_1, s_2) \in \mathfrak{S}_\Gamma$, $(s_1', s_2') \in \mathfrak{S}_\Gamma$ relációkból következik, hogy $(s_1, s_2') \in \mathfrak{S}_\Gamma$), továbbá azt, hogy ilyen játéknál a $\mathfrak{S}_\Gamma$ halmazon mindegyik játékos nyeresége állandó. Sem az előbbi, sem az utóbbi körülmény nem áll fenn általánosságban sem kettőnél több személyes játékoknál (még akkor sem, ha ezek a játékok zérus összegűek), sem a nem zérus összegű játékoknál (még két játékos esetén sem).

A $\mathfrak{S}_\Gamma$ halmaz téglalap alakú volta a kétszemélyes nullajátékoknál azt jelenti, hogy az első játékos a saját egyensúlyi stratégiáját játszva v_Γ nyereséget biztosít magának függetlenül az ellenfél tevékenységétől. Egyensúlyi stratégiáit ezért *optimálisaknak* szokás nevezni. Hasonló okok miatt optimálisaknak nevezik az ilyen játékoknál a második játékos egyensúlyi stratégiáit is. Az első, illetve a második játékos Γ játékbeli optimális stratégiáinak a halmazát $T_1(\Gamma)$-val, illetve $T_2(\Gamma)$-val jelöljük.

Végül tegyünk egy triviális, de gyakran nagyon hasznos megjegyzést. Legyen

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\rangle$$

tetszés szerinti játék és

$$\Gamma_\alpha = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i+\alpha\}_{i\in I}\rangle.$$

Akkor

$$\mathfrak{S}_\Gamma = \mathfrak{S}_{\Gamma_\alpha}.$$

3. A játékok bővítése. Távolról se minden játéknak vannak egyensúlyi helyzetei, még a véges játékok között sem. Elég tekinteni azt a kétszemélyes játékot, amelynél

$$S_1 = \{1, 2\},\ S_2 = \{1, 2\},\ H(1, 1) = H(2, 2) = 1,\ H(2, 1) = H(1, 2) = -1. \tag{1.8}$$

Nyilvánvaló, hogy erre a játékra

$$\min_{s_2} \max_{s_1} H(s_1, s_2) = 1,$$

$$\max_{s_1} \min_{s_2} H(s_1, s_2) = -1,$$

úgyhogy az 1. tétel értelmében ennek a játéknak nincsenek egyensúlyi helyzetei.

A fenti játék egyúttal bizonyos igen gyakran fellépő jelenségek modelljéül is szolgál.

Katonai, gazdasági vagy egyszerűen mindennapi kérdések megoldásánál nagyon gyakran adódik olyan helyzet, amikor egy személy (vagy kollektíva) két cselekvési mód közül választhat, a körülmények pedig, amelyek között ez a cselekvés meg fog valósulni, szintén kétfélék lehetnek: vagy az első cselekvési módra nézve kedvezőek és a másodikra nézve kedvezőtlenek, vagy fordítva. (N. WIENER helyesen jegyzi meg: „... a fegyver hatásossága függ attól, hogy milyen másik fegyver létezik, amely képes neki ellenállni...")[1]. Ha még azt is feltesszük, hogy ezek a körülmények egy másik személy (kollektíva) ellenőrzése alatt állnak, amelyiknek ellentétes érdekei vannak, akkor olyan viszonyokkal van dolgunk, amelyek közel vannak az (1.8) alatt felírt játékhoz. Pontosan ilyen a „fej vagy írás" játék említett változata is.

Világos, hogy minden eléggé teljes játékelméletnek tartalmaznia kell a játékosok viselkedésmódjára vonatkozó útmutatásokat mind az (1.8) játék, mind más hasonló játékok esetében.

E célból vezessük be a *játék bővítésének* a fogalmát. Legyen

$$\Gamma_1 = \langle I, \{S_i^{(1)}\}, \{H_i^{(1)}\}\rangle, \qquad \Gamma_2 = \langle I, \{S_i^{(2)}\}, \{H_i^{(2)}\}\rangle$$

két játék. Ha itt tetszés szerinti $i \in I$ indexre

$$S_i^{(1)} \subset S_i^{(2)}, \tag{1.9}$$

tehát $S^{(1)} \subset S^{(2)}$, és $s \in S^{(1)}$ esetén

$$H_i^{(1)}(s) = H_i^{(2)}(s) \tag{1.10}$$

minden $i \in I$ mellett, akkor a Γ_2 játékot a Γ_1 játék *bővítésének* nevezzük.

Ha a Γ játéknak nincsenek egyensúlyi helyzetei, akkor lehet foglalkozni e játék olyan $\overline{\Gamma}$ bővítésének a keresésével, amelynek már vannak egyensúlyi helyzetei. $\overline{\Gamma}$ stratégiáit valamiféle értelemben a Γ játék általánosított stratégiáinak lehet tekinteni, $\overline{\Gamma}$ egyensúlyi helyzeteit pedig Γ egyensúlyi helyzeteinek ezek mellett az általánosított stratégiák mellett. Ahhoz, hogy a kérdés ilyen módon való megközelítése jogosult legyen, magától értetődően szükséges, hogy a $\overline{\Gamma}$ játék stratégiáinak legyen valamilyen természetes értelmezésük az eredeti Γ játék keretein belül.

Ilyen természetes játék-bővítéseket különböző módokon lehet alkotni. A jelen cikkben csak a leghasználatosabbat érintjük közülük.

Legyen

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I}\rangle$$

valamilyen játék. Rendeljünk hozzá minden $i \in I$ indexhez egy S_i^* halmazt, amely S_i-n értelmezett valószínűségi mértékekből áll, tartalmazza az összes

[1] N. WIENER: Cybernetics, New York, 1948.

elfajult mértékeket (azt az elfajult mértéket, amely az $s_i \in S_i$ elemhez az 1 valószínűséget rendeli, azonosítani fogjuk ezzel az elemmel) és konvex, vagyis bármely két s_i', s_i'' mértékkel együtt tartalmazza az összes $\lambda s_i' + (1-\lambda) s_i''$ alakú mértékeket, ahol $\lambda \in [0, 1]$.

A S_i^*-hoz tartozó valószínűségi mértékeket az i játékos Γ játékbeli *kevert stratégiáinak* nevezzük. A $S^* = \bigtimes_{i \in I} S_i^*$ szorzat elemeit Γ *kevert stratégiás helyzeteinek* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a Γ játék minden egyes $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ kevert stratégiás helyzetét tekinthetjük olyan S-en értelmezett valószínűségi mértéknek, amely a S_i halmazokon értelmezett s_i^* valószínűségi mértékek szorzata.

A S_i-n értelmezett elfajult mértékeket a halmaz megfelelő elemeivel azonosítva biztosítjuk (1. 9) teljesülését.

Legyenek értelmezve a S^* halmazon olyan H_i^* valós értékű függvények, amelyekre

$$H_i^*(s) = H_i(s) \qquad (i \in I, s \in S).$$

Speciálisan, ha a S_i^* $(i \in I)$ halmazok olyanok, hogy a H_i függvények bármely $s^* \in S^*$ mértékre vonatkozólag mérhetők S-en, akkor lehet

$$H_i^*(s^*) = \int_S H_i(s) s^*(ds).$$

Nyilvánvaló, hogy a H_i^* függvények ilyen értelmezése esetén teljesül az (1. 10) feltétel.

A

$$\Gamma^* = \langle I, \{S_i^*\}, \{H_i^*\} \rangle$$

játékot a Γ játék *kevert bővítésének* nevezzük.

A játék kevert bővítésének a definíciójában általában bizonyos határozatlanság van, ami azzal kapcsolatos, hogy a S_i^* mértékhalmazok különbözőképpen választhatók. A játékelméletben a játékok kevert bővítésének rendszerint valamilyen konkrét változatát használják, és ezt minden egyes esetben külön választják meg.

Jegyezzük meg, hogy véges Γ játék esetén a kevert bővítés definíciója egyértelmű, ugyanis ebben az esetben minden i-re a S_i-n értelmezett összes mértékek halmazát vehetjük csak S_i^*-nak.

A Γ játék kevert bővítését a következőképpen lehet interpretálni. Minden $s_i^* \in S_i^*$ kevert stratégiához álljon az i játékos rendelkezésére egy véletlen konstrukció, amely az s_i elemek véletlen kiválasztását az s_i^* mértéknek megfelelően valósítja meg. Valamelyik konstrukciónak az i játékos által történő kiválasztása éppen egy s_i^* valószínűségi mérték kiválasztását jelenti. Ha minden játékos kiválaszt egy-egy véletlen konstrukciót, akkor végeredményben

S^*-on megvalósul egy s^* valószínűségi mérték. Ilyenkor $H_i(s)$-ből valószínűségi változó lesz, és ennek a várható értékét nyilvánítjuk az i játékos nyereségének az s^* helyzetben.

Kevert stratégiának egy katonai (taktikai) feladatban való tényleges felhasználását ismerteti [13].

Gyakran nagyon hasznosnak bizonyul a következő egyszerű állítás.

2. TÉTEL. *Legyen Γ valamilyen játék. Ahhoz, hogy Γ kevert bővítésének egy s^* helyzete kevert stratégiás egyensúlyi helyzet legyen, szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti i és $s_i \in S_i$ mellett*

$$H_i(s^*) \geqq H_i(s^* \| s_i)$$

legyen.

BIZONYÍTÁS. A szükségesség nyilvánvaló. Az elégségesség viszont abból következik, hogy $\overline{s_i^*} \in S_i^*$ esetén

$$H_i(s^* \| \overline{s_i^*}) = \int_{S_i} H_i(s^* \| s_i) \overline{s_i^*}(ds_i) \leqq \int_{S_i} H_i(s^*) \overline{s_i^*}(ds_i) = H_i(s^*) \int_{S_i} \overline{s_i^*}(ds_i) = H_i(s^*).$$

Jegyezzük még meg, hogy kétszemélyes nullajátéknál az optimális kevert stratégiák halmaza konvex.

Mint a későbbiekből látható lesz, az egyensúlyi helyzettel nem, de kevert stratégiás egyensúlyi helyzettel már rendelkező játékoknak van egy nagyon kiterjedt és fontos osztálya. Ezért a játékelméletben a kevert stratégia fogalma olyan nagy jelentőségre tesz szert, hogy az irodalomban a játékos stratégiáján rendszerint éppen valamilyen kevert stratégiát értenek, magukat a játékos stratégiáit pedig *tiszta stratégiáknak* nevezik. Hasonlóképpen a játékbeli helyzetet tiszta stratégiás helyzetnek nevezik, a kevert stratégiás helyzetet pedig helyzetnek. A további tárgyalás során mi is ezt a szokást fogjuk követni.

4. Véges játékok. Nash tétele. Legyen

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\} \rangle$$

véges játék és

$$S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{i,m_i}\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Természetes dolog egy tetszés szerinti s_i^* (kevert) stratégiát olyan

$$(s_i^*(s_{i1}), \ldots, s_i^*(s_{i,m_i}))$$

vektornak tekinteni, amelynek a komponensei az egyes tiszta stratégiáknak az s_i^* stratégia során fellépő valószínűségei. Akkor a S_i^* halmazt olyan szimplexként lehet interpretálni, amelyet egy m_i dimenziós tér koordináta-egységvektorainak a végpontjai határoznak meg. Az $s_i^*(s_{ij})$ valószínűségek e szimplex s_i^* pontjának a baricentrikus koordinátái, a szimplex csúcsai pedig a játékos tiszta stratégiái.

Akkor a S^* halmaz szimplexek direkt szorzata és így homeomorf egy az $m_1+m_2+\cdots+m_n$ dimenziós euklidesi térben fekvő szimplexszel.

Ha $s^*=(s_1^*,\ldots,s_n^*)$, akkor $s^*(s_{ij})$-n a továbbiakban $s_i^*(s_{ij})$ értendő.

A kevert stratégiás egyensúlyi helyzetek létezésének a kérdését véges játékokra NASH oldotta meg teljesen a következő tétel bebizonyításával.

3. TÉTEL. *Minden véges játéknak vannak egyensúlyi helyzetei.*

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$\Gamma=\langle I,\{S_i\},\{H_i\}\rangle$$

véges játék és

$$S_i=\{s_{i1},\ldots,s_{i,m_i}\} \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Tetszés szerinti $s^*\in S^*$, $i\in I$ és $1\leqq j\leqq m_i$ esetén vezessük be a

$$\varphi_{ij}(s^*)=\max\{0, H_i(s^*\|s_{ij})-H_i(s^*)\}$$

jelölést. Legyen továbbá

$$\overline{s_i^*}(s_{ij})=\frac{s^*(s_{ij})+\varphi_{ij}(s^*)}{1+\sum_{k=1}^{m_i}\varphi_{ik}(s^*)}. \tag{1.11}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $\overline{s_i^*}$ valószínűségi mérték a S_i halmazon, vagyis $\overline{s_i^*}\in S_i^*$. Akkor az $(\overline{s_1^*},\ldots,\overline{s_n^*})$ sorozat, amelyet $\overline{s^*}$-sal jelölünk, hozzátartozik S^*-hoz.

Nyilvánvaló, hogy az (1.11) összefüggések minden $s^*\in S^*$ elemnek egyértelműen megfeleltetnek egy $\overline{s^*}\in S^*$ elemet, vagyis a S^* halmaz egy önmagába való leképezését valósítják meg. Abban a topológiában, amelyet S^*-on a beágyazó euklidesi tér topológiája indukál, a tekintett leképezés folytonos. Minthogy ugyanebben a topológiában S^* homeomorf egy szimplexszel, BROUWER tétele alapján (lásd pl. [15]-öt) leképezésünknek van fixpontja, azaz létezik olyan $s_0^*\in S^*$ helyzet, hogy

$$s_{0i}^*(s_{ij})=\frac{s_{0i}^*(s_{ij})+\varphi_{ij}(s_0^*)}{1+\sum_{k=1}^{m_i}\varphi_{ik}(s_0^*)}. \tag{1.12}$$

Most tegyük fel, hogy létezik olyan $i\in I$, hogy minden az $s_0^*(s_{ij})>0$ egyenlőtlenséget kielégítő $j=1,\ldots,m_i$ indexre

$$\varphi_{ij}(s_0^*)>0.$$

Az utóbbi azt jelenti, hogy

$$H_i(s_0^*\|s_{ij})>H_i(s_0^*).$$

De akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva $s_0^*(s_{ij})$-vel és összegezve mindazon j indexekre, amelyekre $s_0^*(s_{ij})>0$, kapjuk:

$$\sum_{s_0^*(s_{ij})>0} H_i(s^*\|s_{ij})\, s_0^*(s_{ij}) > H_i(s_0^*). \tag{1.13}$$

Nyilvánvaló azonban, hogy itt a baloldalon szintén $H_i(s_0^*)$ áll, úgyhogy az (1. 13) egyenlőtlenség nem teljesülhet.

Következésképpen minden $i \in I$ indexhez található olyan j, hogy $s_0^*(s_{ij})>0$ és $\varphi_{ij}(s_0^*)=0$. Ilyen j-re (1. 12) helyett nyilván írható

$$s_{0i}^*(s_{ij}) = \frac{s_{0i}^*(s_{ij})}{1+\sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(s_0^*)}.$$

Minthogy itt a baloldal j választása folytán zérustól különböző, azért nyilván

$$\sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(s_0^*) = 0,$$

vagyis, tekintettel arra, hogy az utóbbi összeg tagjai nem negatívok,

$$\varphi_{ij}(s_0^*) = 0$$

minden i-re és $j=1,\dots,m_i$-re. De ez azt jelenti, hogy

$$H_i(s^*) \geqq H_i(s^*\|s_{ij})$$

minden i-re és $j=1,\dots,m_i$-re, vagyis $s^* \in \mathfrak{S}_\Gamma$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Említsük meg ennek a tételnek egy hasznos következményét.

Legyen Γ kétszemélyes nullajáték. NASH tétele szerint Γ-nak van (s_1^*, s_2^*) egyensúlyi helyzete. Ezt a Γ^* kevert bővítés tiszta stratégiás egyensúlyi helyzetének tekintve és felhasználva az 1. tételt, a

$$\max_{s_1\in S_1^*} \min_{s_2\in S_2^*} H(s_1, s_2) = \min_{s_2\in S_2^*} \max_{s_1\in S_1^*} H(s_1, s_2)$$

minimaxok létezésére és egyenlőségére következtethetünk. NASH tétele a véges játékoknál elvben megoldja ugyan az egyensúlyi helyzetek létezésének kérdését, e helyzetek megtalálásának módjára nézve azonban nem tartalmaz semmiféle konstruktív utasítást. Az egyensúlyi helyzetek gyakorlati megkeresésének a feladatát mindeddig a játékoknak csak néhány nagyon szűk osztályára oldották meg.

Jegyezzük meg, hogy azok az erőfeszítések, amelyek célja az egyensúlyi helyzetek tényleges meghatározási módjainak a felkutatása, kétirányúak lehetnek.

Először fel lehet tenni a kérdést úgy, hogy határozzuk meg az adott játék összes egyensúlyi helyzeteit. Ez a feladat azért fontos, mert egy játékosnak különböző egyensúlyi helyzetekben általában különböző nyereségei lehetnek. Ezért az összes egyensúlyi helyzetek kellően áttekinthető felsorolása ad csak lehetőséget annak a helyzetnek a kiválasztására, amely a legnagyobb mértékben felel meg a játékosok érdekeinek. A megjelent ilyen irányú munkák [16] azonban azt mutatják, hogy már a kétszemélyes véges nullajátékok legegyszerűbb esetében is az összes egyensúlyi helyzetek felsorolása igen fárasztó számításokkal jár, és ezeknek a terjedelme a játékosok stratégiái számának a növelése esetén nagyon gyorsan növekszik. Még nagyobbak a számítási nehézségek azoknak a kétszemélyes véges játékoknak a vizsgálatánál, amelyek nem zérus összegűek [17].

Ezzel kapcsolatban figyelemre méltóak a próbálkozások, hogy a kutatásnak azon a másik útján haladjanak, amely a játék legalább egy egyensúlyi helyzetének a megtalálásával függ össze. A feladatnak ezt a — nyilván távolról sem teljes — megoldását egyrészt egyszerűbben lehet megkapni, másrészt pedig a játékok néhány osztályánál (pl. a kétszemélyes nullajátékoknál) a gyakorlati célok többsége szempontjából már ez is elegendő.

Néhány eredményt, amelyet kétszemélyes nullajátékokra akár az első, akár a második irányban kaptak, a 2. §-ban fogunk ismertetni.

2. §. Mátrix-játékok

1. Definíció. A kétszemélyes véges nullajátékokat gyakran *mátrix-játékoknak* nevezik. Ezt az elnevezést az teszi indokolttá, hogy az ilyenfajta játékokat a következőképpen lehet interpretálni.

Legyen

$$A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$$

valamilyen mátrix és

(2. 1) $$\Gamma_A = \langle\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{H, -H\}\rangle,$$

ahol

(2. 2) $$S_1 = \{1, \ldots, m\},$$

(2. 3) $$S_2 = \{1, \ldots, n\},$$

(2. 4) $$H(i, j) = a_{ij}.$$

Világos, hogy akkor a játék folyamata felfogható úgy, hogy egyidőben és egymástól függetlenül az 1 játékos kiválasztja valamelyik (i-edik) sort, a 2 játékos pedig valamelyik (j-edik) oszlopot a A mátrixból. Az e választások eredményeként adódó (i, j) helyzetben az 1 játékos a_{ij} nyereséget kap (a 2 játékos pedig ugyanennyit veszít).

Mátrix-játéknál a játékosok kevert stratégiáit, vagyis a játékot leíró mátrix sorai, ill. oszlopai halmazán értelmezett mértékeket nyilván m-dimenziós, illetve n-dimenziós

$$X=(x_1,\ldots,x_m),\quad Y=(y_1,\ldots,y_n)$$

vektoroknak lehet tekinteni, ahol

$$x_i\geqq 0,\quad y_j\geqq 0,\quad \sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{j=1}^{n}y_j=1.$$

Jelöljük az 1 játékos összes kevert stratégiáinak a halmazát S_m-mel, a 2 játékos összes kevert stratégiáiét pedig S_n-nel. Akkor az 1 játékos nyeresége a (X, Y) kevert stratégiás helyzetben

$$\sum_{i,j}a_{ij}x_iy_j=XAY^T,$$

ahol a ^{T} jel most és a továbbiakban is a mátrix- vagy vektortranszponálás műveletét jelenti.

A 2. tétel értelmében ahhoz, hogy

$$(X, Y)\in\mathfrak{S}_{\Gamma_A}$$

legyen, szükséges és elégséges

$$XA_{\cdot j}\geqq XAY^T\geqq A_{i\cdot}Y^T\qquad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$$

fennállása, ahol $A_{i\cdot}$ és $A_{\cdot j}$ most és a továbbiakban a A mátrix i-edik sorát, illetve j-edik oszlopát jelenti.

A következő állítás majdnem triviális.

4. TÉTEL. *Ha Γ egy $(m\times n)$-es A mátrixszal jellemezhető játék, akkor a $T_1(\Gamma)$ és $T_2(\Gamma)$ halmazok m-dimenziós, ill. n-dimenziós vektorokból álló nemüres, zárt, konvex és korlátos halmazok.*

2. A mátrix-játék értékének és a játékosok optimális stratégiáinak a meghatározása. Legyen R az n-dimenziós vektortér egy konvex részhalmaza. *R szélső pontjának* az olyan $r\in R$ pontot nevezzük, amely nem állítható elő $\frac{1}{2}(r_1+r_2)$ alakban, ahol $r_1, r_2\in R$ és $r_1\neq r_2$. R összes szélső pontjainak a halmazát $K(R)$-rel jelöljük. Ismeretes (lásd pl. [18]-at), hogy ha egy zárt, konvex, korlátos R halmaznak csak véges számú szélső pontja van, akkor R egybeesik a $K(R)$ halmaz konvex burkával.

A $K(T_1(\Gamma))$-beli és $K(T_2(\Gamma))$-beli összes stratégiák megtalálásának a módját SHAPLEY és SNOW [16] mutatta meg. Kiderült, hogy ezek a halmazok bármelyik mátrix-játéknál végesek. Következésképpen a $T_1(\Gamma)$ és $T_2(\Gamma)$ halmaz meghatározásának a feladata visszavezethető $K(T_1(\Gamma))$ és $K(T_2(\Gamma))$ meghatározásának a feladatára. Foglalkozzunk ezzel az utóbbi feladattal.

Az 1. § 2. pontja végén tett megjegyzés alapján az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $v_\Gamma \neq 0$.

A továbbiakban ha $X \in S_m$ (illetve $Y \in S_n$) és B a A mátrix egy minormátrixa, akkor X_B (Y_B) jelöli a X (Y) vektorból a B-ben nem szereplő soroknak (oszlopoknak) megfelelő komponensek elhagyásával nyert vektort.

5. TÉTEL. *Legyen Γ mátrix-játék, Γ mátrixa A,*

$$X=(x_1,\ldots,x_m)\in T_1(\Gamma),\quad Y=(y_1,\ldots,y_n)\in T_2(\Gamma).$$

Akkor ahhoz, hogy fennálljon $X\in K(T_1(\Gamma))$ és $Y\in K(T_2(\Gamma))$, szükséges és elégséges, hogy a A mátrixnak létezzék olyan nemszinguláris B minor-mátrixa, amelyre

$$X_B=\frac{J_rB^{-1}}{J_rB^{-1}J_r^T},\quad Y_B^T=\frac{B^{-1}J_r^T}{J_rB^{-1}J_r^T},\tag{2.5}$$

ahol J_r az az r-dimenziós vektor, amelynek minden komponense 1-gyel egyenlő.

BIZONYÍTÁS. *Szükségesség.* Legyen $X\in K(T_1(\Gamma))$, $Y\in K(T_2(\Gamma))$. Konstruáljuk meg a B mátrixot a következőképpen.

Nevezzük a $A_{i\cdot}$ sort elsőosztályúnak, ha $x_i>0$. Ebben az esetben nyilvánvaló, hogy $A_{i\cdot}Y^T=v_\Gamma$. A $A_{i\cdot}$ sort másodosztályúnak fogjuk nevezni, ha $x_i=0$ és $A_{i\cdot}Y^T=v_\Gamma$. Az összes többi sort a harmadik osztályba soroljuk. Analóg módon bontjuk fel három osztályra A összes oszlopainak a halmazát, a $A_{\cdot j}$ oszlopot elsőosztályúnak tekintve, ha $y_j>0$, másodosztályúnak, ha $y_j=0$, de $XA_{\cdot j}=v_\Gamma$, és harmadosztályúnak, ha $XA_{\cdot j}>v_\Gamma$. A $A_{\cdot j}$ oszlopnak azt a részét (részvektorát), amely az elsőosztályú sorokhoz tartozó elemekből áll, jelöljük $A'_{\cdot j}$-vel.

Tekintsük a A mátrix sorainak egy olyan $\mathfrak{A}$ halmazát, amely tartalmazza az összes elsőosztályú sorokat, nem tartalmaz harmadosztályú sort, a második osztályból pedig csak olyan sorokat tartalmaz, amelyekre a $A'_{i\cdot}$ vektorok nem függnek lineárisan a $A'_{k\cdot}$ alakú vektoroktól ($k\neq i$, $A_{k\cdot}\in\mathfrak{A}$). A maximális ilyen tulajdonságú halmazokat *kitüntetetteknek* fogjuk nevezni. Hasonlóan definiáljuk oszlopok kitüntetett halmazait.

Megmutatjuk, hogy minden olyan B minor-mátrix, amely egy kitüntetett halmazt alkotó összes sorok és egy kitüntetett halmazt alkotó összes oszlopok metszéspontjaiban elhelyezkedő elemekből áll, megfelel a követelményeknek. Meghatározottság kedvéért fel fogjuk tenni, hogy B-nek r sora és s oszlopa van és a A mátrix bal felső sarkában helyezkedik el.

Mindenekelőtt bebizonyítjuk, hogy B sorai lineárisan függetlenek.

Ha ez nem lenne így, akkor léteznék olyan zérustól különböző $G_B=(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)$ vektor, amelyre

$$G_BB_{\cdot j}=0\qquad(j=1,2,\ldots,s).\tag{2.6}$$

A G_B vektort kiegészítve a zérus értékű $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_m$ komponensekkel, kapunk egy vektort, amelyet G-vel fogunk jelölni. Világos, hogy

$$GA_{\cdot j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Fennáll

$$G_B B Y^T = G_B J_r^T v_\Gamma,$$

másrészt (2. 6) alapján

$$G_B B Y^T = 0.$$

Tehát, minthogy $v_\Gamma \neq 0$, $G_B J_r^T = 0$, vagyis G_B komponenseinek az összege (és így G komponenseinek az összege is) zérussal egyenlő.

Legyen továbbá egy másodosztályú sornak megfelelő γ_i komponens zérustól különböző. Akkor a $B_{i\cdot}$ sor lineárisan függ B többi soraitól. Így a $A'_{i\cdot}$ vektor is lineárisan függeni fog a $A'_{k\cdot}$ $(k \leqq r, k \neq i)$ alakú vektoroktól, ami ellentmond a kitüntetett halmaz definíciójának.

Tehát G-nek legfeljebb azok a γ_i komponensei különbözhetnek zérustól, amelyekre $x_i > 0$. Ezért megadható olyan $\varepsilon > 0$, hogy $|\alpha| < \varepsilon$ esetén

$$x_i + \alpha\gamma_i \geqq 0$$

minden $i = 1, 2, \ldots, m$ indexre. Képezzük a

$$X_\alpha = X + \alpha G$$

vektort. Nyilvánvaló, hogy X_α komponensei nem negatívok és összegük 1. Következésképpen $X_\alpha \in S_m$. Továbbá

$$X_\alpha A_{\cdot j} = X_{\alpha B} B_{\cdot j} = (X_B + \alpha G_B) B_{\cdot j} = X_B B_{\cdot j} = X'_B A'_{\cdot j}$$

mindazokra a $A_{\cdot j}$ oszlopokra, amelyek B képzésénél fellépnek. Ha a $A_{\cdot j}$ oszlop másodosztályú, de B képzésénél nem lép fel, akkor a megfelelő $A'_{\cdot j}$ vektor lineárisan függ a $B'_{\cdot k}$ vektoroktól. Legyen

$$A'_{\cdot j} = \sum_k \lambda_k B'_{\cdot k}.$$

Itt

$$X' A'_{\cdot j} = X A_{\cdot j} = v_\Gamma,$$

úgyhogy

$$X_\alpha A_{\cdot j} = X'_\alpha A'_{\cdot j} = (X' + \alpha G') A'_{\cdot j} = (X' + \alpha G') \sum_k \lambda_k B'_{\cdot k} =$$

$$= X' A'_{\cdot j} + \alpha G' \sum_k \lambda_k B'_{\cdot k} = v_\Gamma + \alpha \sum_k \lambda_k G' B'_{\cdot k} = v_\Gamma.$$

Végül ha a $A_{\cdot j}$ oszlop harmadosztályú, akkor — minthogy $XA_{\cdot j} > v_\Gamma$ — az α számot abszolút értékben elég kicsinynek választva elérhetjük, hogy

$X_\alpha A_{\cdot j} > v_\Gamma$ is fennálljon. Tehát $X_\alpha A_{\cdot j} \geqq v_\Gamma$ minden $j=1, 2, \ldots, n$-re, vagyis $X_\alpha \in T_1(\Gamma)$, és hasonlóképpen $X_{-\alpha} \in T_1(\Gamma)$. De akkor $X = \frac{1}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \notin$ $\notin K(T_1(\Gamma))$.

A kapott ellentmondás azt mutatja, hogy a B mátrix sorai lineárisan függetlenek. B oszlopainak a lineáris függetlensége analóg módon bizonyítható. Tehát $r=s$, és a B mátrix négyzetalakú és nemszinguláris.

Fennáll

$$X_B B = v_\Gamma J_r. \tag{2. 7}$$

Tehát

$$1 = X_B J_r^T = X_B B B^{-1} J_r^T = v_\Gamma J_r B^{-1} J_r^T,$$

ahonnan

$$v_\Gamma = \frac{1}{J_r B^{-1} J_r^T}$$

és (2. 7) alapján

$$X_B = v_\Gamma J_r B^{-1} = \frac{J_r B^{-1}}{J_r B^{-1} J_r^T}.$$

Y_B meghatározása hasonlóan végezhető. Most már csak azt kell megjegyezni, hogy X és Y csak bizonyos zérus értékű komponensekben tér el X_B-től, ill. Y_B-től. A szükségességet bebizonyítottuk.

Az *elégségesség* indirekt úton minden nehézség nélkül bizonyítható.

A bebizonyított tételből következik, hogy a $K(T_1(\Gamma))$-beli és $K(T_2(\Gamma))$-beli stratégiák száma nem múlhatja felül A nemszinguláris minor-mátrixainak a számát és így véges. Képezve minden ilyen minor-mátrixhoz a (2. 5) alakú kifejezéseket és kiválasztva közülük azokat, amelyek optimális stratégiák, ezzel a $K(T_1(\Gamma))$-t és $K(T_2(\Gamma))$-t alkotó összes stratégiák felsorolását nyerjük.

Ebből a tételből következik még a következő figyelemre méltó tény, amelyet KAPLANSKY fedezett fel e tétel egy speciális esetének a bizonyítása során [19]. Legyen a Γ mátrix-játéknál, amelyhez egy $(m \times n)$-es A mátrix tartozik, a sorok száma kisebb, mint az oszlopoké: $m < n$. Akkor a második játékosnak van olyan optimális stratégiája, amely legfeljebb m számú tiszta stratégia keveréke. Valóban, a $K[T_2(\Gamma_A)]$ halmazhoz tartozó bármelyik Y stratégia ilyen lesz, mert található hozzá olyan négyzetalakú B minor-mátrix, hogy a Y vektornak azok a komponensei, amelyek A olyan oszlopainak felelnek meg, amelyek B megalkotásánál nem szerepelnek, zérussal egyenlők. Tehát Y zérustól különböző komponenseinek a száma nem lehet nagyobb, mint A sorainak a száma, vagyis m.

3. Játékok szimmetrizálása. A differenciálegyenletek módszere. Azok a módszerek, amelyek legalább egy egyensúlyi helyzet megtalálására szolgálnak, a mátrix-játékok esetében különösen értékesek. Arról van szó, hogy az ilyen játékoknál az egyensúlyi helyzet többértelműsége viszonylag ritka kivétel. Nevezetesen, az összes $(m \times n)$-es mátrixok halmazát mn-dimenziós R_{mn} euklidesi térnek tekintve, BOHNENBLUST, KARLIN és SHAPLEY megmutatták [20], hogy az összes olyan $(m \times n)$-es A mátrixok halmaza, amelyekre a Γ_A játéknak egyetlen egyensúlyi helyzete van, nyílt és mindenütt sűrű R_{mn}-ben. BROWN és NEUMANN [21] bebizonyította, hogy mátrix-játéknál léteznek optimális stratégiák; bizonyításuk elvileg megvalósítható módszert ad legalább egy ilyen stratégia tényleges meghatározására.

Ez a bizonyítás közvetlenül csak a *szimmetrikus játékokra* alkalmazható, vagyis azokra, amelyeknek a A mátrixa ferdén szimmetrikus: $a_{ij} = -a_{ji}$. Ez azonban nem csökkenti az eredmények általánosságát, mert minden mátrix-játékot szimmetrizálni lehet, azaz a Γ_A mátrix-játékhoz lehet találni olyan Γ_B szimmetrikus mátrix-játékot, amelynek a megoldása alapján a Γ_A játék megoldása könnyen megadható.

Ismertetjük a mátrix-játékok szimmetrizálásának egyik módszerét [21]. A szimmetrizálás másik módszerét lásd [22]-ben.

Először megmutatjuk, hogy tetszés szerinti szimmetrikus Γ_B mátrix-játékra

$$v_{\Gamma_B} = 0, \quad T_1(\Gamma_B) = T_2(\Gamma_B).$$

Valóban, legyen $(X, Y) \in \mathfrak{S}_{\Gamma_B}$. Akkor

$$XB_{.j} \geqq XBY^T \geqq B_{i.}Y^T. \tag{2.8}$$

De B ferde szimmetriája miatt

$$XB_{.j} = -B_{j.}X^T, \quad B_{i.}Y^T = -YB_{.i}, \quad XBY^T = -YBX^T,$$

és így (2. 8)-ból következik, hogy

$$B_{j.}X^T \leqq YBX^T \leqq YB_{.i},$$

vagyis $(Y, X) \in \mathfrak{S}_{\Gamma_B}$. Innen már következik, hogy $T_1(\Gamma_B) = T_2(\Gamma_B)$. Továbbá, a $\mathfrak{S}_{\Gamma_B}$ halmaz téglalap-alakú lévén, $(X, X) \in \mathfrak{S}_{\Gamma_B}$ is fennáll. Így

$$v_{\Gamma_B} = XBX^T = -XBX^T = 0.$$

Legyen

$$\Gamma_A = \langle \{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{H, -H\} \rangle$$

mátrix-játék, amelynek a nyereségmátrixa tetszés szerinti lehet. Tekintsük a

$$\Gamma_B = \langle \{1, 2\}, \{S_1 \times S_2, S_2 \times S_1\}, \{H', -H'\} \rangle$$

új játékot, ahol

$$H'((i_1, j_2), (i_2, j_1)) = a_{i_1 j_1} - a_{i_2 j_2};$$

ennek a mátrixát jelöljük B-vel. Világos, hogy a Γ_B játék szimmetrikus.

Válasszunk önkényesen egy $X \in T_1(\Gamma_B)$ stratégiát. Akkor $XB_{\cdot(j_2, i_1)} \geqq 0$ minden $(j_2, i_1) \in S_2 \times S_1$ párra, azaz minden j_2-re és i_1-re

$$\sum_{i_2, j_1} x_{(i_2, j_1)}(a_{i_2 j_2} - a_{i_1 j_1}) \geqq 0,$$

vagyis

$$\sum_{i_2, j_1} x_{(i_2, j_1)} a_{i_1 j_1} \leqq \sum_{i_2, j_1} x_{(i_2, j_1)} a_{i_2 j_2},$$

$$\sum_{j_1} \Big(\sum_{i_2} x_{(i_2, j_1)}\Big) a_{i_1 j_1} \leqq \sum_{i_2} \Big(\sum_{j_1} x_{(i_2, j_1)}\Big) a_{i_2 j_2},$$

végül bevezetve a

$$\sum_{i_2} x_{(i_2, j_1)} = \eta_{j_1}, \quad \sum_{j_1} x_{(i_2, j_1)} = \xi_{i_2},$$

$$(\eta_1, \ldots, \eta_m) = \mathrm{H}, \quad (\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Xi$$

jelöléseket, kapjuk, hogy

$$A_{i\cdot} \mathrm{H}^T \leqq \Xi A_{\cdot j} \qquad (i, j) \in S_1 \times S_2,$$

tehát

$$(\mathrm{H}, \Xi) \in \mathfrak{S}_{\Gamma_A}.$$

Foglalkozzunk a Γ_B szimmetrikus játék egyensúlyi helyzeteinek a meghatározásával. Rövidség kedvéért használni fogjuk az $(i_1, j_2) = k$, $(j_1, i_2) = l$ és $mn = r$ jelöléseket. Legyen X a második játékos tetszés szerinti stratégiája. Legyen

$$u_k = A_{k\cdot} X^T,$$

$$\varphi(u_k) = \max\{0, u_k\},$$

$$\Phi(X) = \sum_{k=1}^{r} \varphi(u_k),$$

$$\Psi(X) = \sum_{k=1}^{r} \varphi^2(u_k),$$

és tekintsük a

(2. 9) $$\frac{dx_k}{dt} = \varphi(u_k) - \Phi(X) x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

differenciálegyenlet-rendszert bizonyos

(2. 10) $$x_k(0) = x_k^0$$

kezdeti feltételekkel.

A (2. 9) rendszernek a (2. 10) kezdeti feltételek mellett, mint könnyen igazolható, létezik egyértelmű megoldása és ez folytonos. Állapítsuk meg először ennek a megoldásnak két tulajdonságát.

Ha $x_k^0 \geqq 0$, akkor $x_k(t) \geqq 0$.

Valóban, ha $x_k(t') = 0$, akkor

$$\frac{dx_k}{dt} = \varphi(u_k) \geqq 0,$$

és az x_k függvény csak növekedhet.

Ha $\sum_{k=1}^{r} x_k^0 = 1$, akkor $\sum_{k=1}^{r} x_k(t) = 1$.

Valóban, a (2. 9) rendszer összes egyenleteit összeadva kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{r} x_k(t) = \Phi(X) \left(1 - \sum_{k=1}^{r} x_k(t)\right),$$

úgyhogy ha a bennünket érdeklő összeg t egy bizonyos értékénél 1-gyel volt egyenlő, akkor ettől az értéktől később már nem térhet el.

Abban az esetben, amikor $\varphi(u_k) = u_k > 0$, kapjuk:

$$\frac{d\varphi(u_k)}{dt} = \sum_{l=1}^{r} a_{kl} \frac{dx_l}{dt} = \sum_{l=1}^{r} a_{kl}\varphi(u_l) - \Phi(X)\varphi(u_k).$$

Eszerint minden esetben

$$\frac{d\varphi^2(u_k)}{dt} = 2 \sum_{l=1}^{r} a_{kl}\varphi(u_k)\varphi(u_l) - 2\,\Phi(X)\varphi^2(u_k),$$

tehát összegezve k-ra és felhasználva B ferde szimmetriáját

$$\frac{d\Psi(X)}{dt} = 2\,\Phi(X)\Psi(X).$$

Világos továbbá, hogy

$$\sqrt{\Psi(X)} \leqq \Phi(X) \leqq \sqrt{r\Psi(X)}. \tag{2. 11}$$

Tehát amikor $\Psi(X)$ pozitív, akkor fogyó. Ezért

$$\frac{d\Psi(X)}{dt} \leqq -2(\Psi(X))^{\frac{3}{2}},$$

ebből pedig integrálással kapjuk, hogy

$$\Psi(X) \leqq \frac{\Psi(X^0)}{(1 + t\sqrt{\Psi(X^0)})^2}.$$

Következésképpen t növekedtével $\Psi(X) \to 0$. Azonkívül (2. 11) alapján $\Phi(X) \to 0$; tehát minden k-ra $\varphi(u_k) \to 0$.

Legyen X^{∞} a (2. 9) rendszer megoldásának egy limeszpontja (a S_r halmaz kompaktsága miatt ilyen pont létezik). Erre $u_k \leqq 0$ $(k=1,\ldots,r)$, vagyis

$$A_{k\cdot}X^{\infty T} \leqq 0 = v_{\Gamma_B} \qquad (k=1,\ldots,r),$$

ez pedig azt jelenti, hogy $X^{\infty} \in T_2(\Gamma_B)$.

Ilymódon a (2. 9) rendszer numerikus integrálása lehetővé teszi a Γ_B, és így a Γ_A játék bármelyik játékosa egy optimális stratégiájának tetszés szerinti pontossággal való meghatározását.

4. A mátrix-játékok megoldásának iterációs módszere. A mátrix-játék legalább egy egyensúlyi helyzetének a meghatározására szolgáló másik módszer, amely BROWNtól [23] és ROBINSONtól [24] származik, a következőkben áll.

Tekinteni fogjuk a A nyereségmátrixszal rendelkező Γ mátrix-játék sokszori megismétlését, másszóval olyan végtelen mérkőzést két játékos között, amelynek minden egyes játszmája a Γ játékra redukálódik. Írjuk le induktíve azt a folyamatot, amikor a játékosok a Γ játékbeli tiszta stratégiáik közül kiválasztják az $i_1, i_2, \ldots$ és $j_1, j_2, \ldots$ sorozatot.

Válassza meg az első játékos a maga i_1 stratégiáját tetszés szerint; ez lesz a konstrukció első lépése.

Tegyük fel, hogy a konstrukció t lépése már megtörtént, és ennek során az első játékos rendre az

(2. 12) $$i_1, i_2, \ldots, i_{t'},$$

a második pedig a

(2. 13) $$j_1, j_2, \ldots, j_{t''}$$

stratégiákat választotta. Ha utoljára az első játékos választott stratégiát, akkor a konstrukció $(t+1)$-edik lépése az lesz, hogy a második játékos olyan $j_{t''+1}$ tiszta stratégiát választ, amelyre

$$\sum_{k=1}^{t'} a_{i_k j_{t''+1}} = \min_j \sum_{k=1}^{t'} a_{i_k j}.$$

Ha pedig a t-edik lépésben a második játékos választott stratégiát, akkor a $(t+1)$-edik lépés abból fog állni, hogy az első játékos kiválaszt egy olyan $i_{t'+1}$ stratégiát, amelyre

$$\sum_{k=1}^{t''} a_{i_{t'+1} j_k} = \max_i \sum_{k=1}^{t''} a_{i j_k}.$$

A fenti eljárás a következőképpen interpretálható. A játékos mindegyik lépésnél úgy választja meg a maga stratégiáját, mintha feltételezné, hogy ellenfele „átlagos” észlelt stratégiája az a kevert stratégia, amelyhez az továbbra is tartani fogja magát.

J. ROBINSON bebizonyította, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t'}\min_j\sum_{k=1}^{t'}a_{i_kj}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t''}\max_i\sum_{k=1}^{t''}a_{ij_k}=v_\Gamma. \tag{2.14}$$

Jelöljük t_i'-vel az i stratégiák számát a (2. 12) sorozatban és t_j''-vel a j stratégiák számát a (2. 13) sorozatban. A

$$X_t=\frac{1}{t'}(t_1',\ldots,t_m'),\quad Y_t=\frac{1}{t''}(t_1'',\ldots,t_n'')$$

jelöléseket használva (2. 14)-et átírhatjuk a

$$\lim_{t\to\infty}\min_j X_tA_{.j}=\lim_{t\to\infty}\max_i A_{i.}Y_t^T=v_\Gamma$$

alakba.

Innen következik, hogy a kevert stratégiákból álló $X_1, X_2,\ldots$ sorozat bármely konvergens részsorozata az első játékos valamelyik optimális stratégiájához tart. Hasonló állítás érvényes a $Y_1, Y_2,\ldots$ sorozatra.

A (2. 14) képletben felírt konvergenciák rendkívül lassúak. SHAPIRO [36] megmutatta, hogy a t-edik iterációs lépésnél a hiba nem nagyobb egy $t^{-\frac{1}{n+m}}$ nagyságrendű mennyiségnél. Bár a numerikus példák valamivel jobb konvergenciát mutatnak, általában több száz iteráció is csak két-három helyes jegyet eredményez. Ezért a játékok megoldása megtalálásának ezt a módszerét vagy gépi úton kell alkalmazni, vagy valamiképpen tökéletesíteni kell.

5. Az optimális stratégiák halmazai. Bármelyik Γ mátrix-játéknál, amelynek a nyereségmátrixa $(m\times n)$-es (rövidség kedvéért az ilyen játékot $(m\times n)$-es játéknak fogjuk nevezni), a $T_1(\Gamma)$, $T_2(\Gamma)$ halmazok az összes kevert stratégiák S_m, ill. S_n halmazában fekvő zárt, konvex poliéderek. Világos továbbá, hogy nem bármely két $U\subset S_m$, $V\subset S_n$ zárt, konvex poliéder tekinthető egy $(m\times n)$-es játékban résztvevő játékosok összes optimális stratégiái halmazának.

Például

$$U=\{\lambda(\alpha, 1-\alpha)+(1-\lambda)(\beta, 1-\beta)\}_{\lambda\in[0,1]},\quad 0<\alpha<\beta<1$$

nem lehet ilyen halmaz egyetlen (2×2)-es játéknál sem.

Ezzel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogyan lehet jellemezni mindazoknak a Γ játékoknak a halmazát, amelyeknél az optimális stratégiák összessége az adott $T_1(\Gamma)$ és $T_2(\Gamma)$ poliéder. A válasz erre a kérdésre GALE és SHERMAN [25] munkájában található meg.

Legyen R_k a k-dimenziós vektortér és legyen C valamilyen kúp R_k-ban (vagyis olyan halmaz, hogy $X_1, X_2\in C$ és $\lambda_1,\lambda_2\geqq 0$ esetén $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2\in C$). Jelentse $[C]$ a R_k tér C-t tartalmazó alterei közül a legszűkebbet, C^* (ill. $C^\perp$)

pedig az összes olyan $X \in R_k$ vektorok halmazát, hogy $XZ \geqq 0$ (ill. $XZ = 0$) minden $Z \in C$-re. Világos, hogy C^* is kúp (amelyet C polárkúpjának neveznek).

Legyen továbbá U egy a $(k-1)$-dimenziós S_k szimplexben fekvő poliéder. Jelöljük U dimenzióját d_U-val, S_k-nak U-t tartalmazó minimális lapját E_U-val, ennek dimenzióját e_U-val, S_k-nak E_U-val szemben fekvő lapját pedig D_U-val. A U poliéder egy tetszés szerinti d_U-1 dimenziós lapját belső lapnak fogjuk nevezni, ha nem fekszik benne S_k-nak egyetlen, e_U-nál alacsonyabb dimenziójú lapjában sem. U belső lapjainak a számát f_U-val jelöljük.

Úgy fogjuk venni, hogy S_k az a szimplex, amelyet a R_k tér koordinátaegységvektorainak a végpontjai határoznak meg. A $U \subset S_k$ poliédert tartalmazó legkisebb kúpot jelöljük $C(U)$-val.

Ezek mellett a jelölések mellett fennáll a következő

6. TÉTEL. *Legyen $U \subset S_m$, $V \subset S_n$ két konvex poliéder. Akkor*

1. *Ahhoz, hogy létezzék olyan $(m \times n)$-es Γ játék, amelyre*

$$T_1(\Gamma) = U, \quad T_2(\Gamma) = V, \tag{2. 15}$$

szükséges és elégséges, hogy teljesüljenek az

$$e_U - d_U = e_V - d_V, \quad f_U \leqq n - e_V - 1, \quad f_V \leqq m - e_U - 1$$

feltételek.

2. *Ahhoz, hogy az $(m \times n)$-es Γ játék kielégítse* (2. 15)-*öt, szükséges és elégséges, hogy a játék A mátrixa előállítható legyen*

$$A = \begin{pmatrix} A_e & A_2 \\ A_1 & A_s \end{pmatrix}$$

alakban, ahol

a) *a A_e mátrix a $[C(E_V)]$ halmazt a $[C(E_U)]$ halmazba képezi le és ennek a leképezésnek a magja $[C(V)]$, a A_e^T mátrix pedig a $[C(E_U)]$ halmazt a $[C(E_V)]$ halmazba képezi le és a leképezés magja $[C(U)]$;*

b) *a A_2 mátrix a $[C(D_U)]$ halmazt a $[C(E_V)]$ halmazba képezi le, teljesíti a*

$$A_2 C(D_V) \subset C(U)^*, \quad A_2 C(D_V) \cap C(U)^\perp = 0$$

feltételeket és a U poliéder minden F belső lapjához található a D_V lapnak olyan Z csúcsa, hogy

$$C(A_2 Z)^\perp \cap U = F;$$

c) *a A_1 mátrix a $[C(D_U)]$ halmazt a $[C(E_V)]$ halmazba képezi le, teljesíti a*

$$D_U A_1 \subset -C(V)^*, \quad D_U A_1 \cap C(V)^\perp = 0$$

feltételeket és a V poliéder minden G belső lapjához található a D_U lapnak olyan Z csúcsa, hogy

$$C(ZA_1)^{\perp} \cap V = G;$$

d) *a A_s mátrix tetszés szerinti.*

3. §. Pozíciós játékok

1. Bevezetés. A mostanáig tekintett játékfogalom nem tükrözi vissza azoknak a jelenségeknek sok nagyon fontos vonását, amelyek modelljéül a játékok hivatottak szolgálni.

Ilyen vonás például a következő. Legyen megint

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$$

koalíciómentes játék. A Γ játék definíciója a játékos egyik vagy másik stratégiájáról semmiféle konkrét közlést nem tartalmaz: a játékosok stratégiái úgy kerülnek be a játékba, mint absztrakt halmazok jellegtelen elemei.

Csak aszerint lehet bizonyos közvetett megkülönböztetést tenni a stratégiák között, hogy a stratégia alkalmazása hogyan befolyásolja a játékos nyereségének a nagyságát.

Ugyanakkor sok tartalmas és a gyakorlatban fontos játéknál a stratégiáknak gyakran számos olyan belső, egyéni vonásuk van, amely őket mint olyanokat jellemzi és egyáltalán nem függ össze a nyereségfüggvény értékeivel. Például a sakkjátéknál lényeges különbség van aközött, hogy világos a játszmát a királygyaloggal vagy lóval kezdi, függetlenül attól, hogy hány pontot kap a játékos a játszma megnyeréséért. A preferánsz játéknál a játékosnak az a törekvése, hogy minden körülmények között ő „játsszék" (vagyis ő kapja meg a talont), szintén kitünteti az illető játékos stratégiáinak egy bizonyos részhalmazát, amely nem áll kapcsolatban a téttel. Végül az, amikor háború idején a szembenálló felek egyike bizonyos konkrét helyzetben a hadviselés támadó változatát választja, — függetlenül attól, hogy ez mennyire célszerű — a csapatok másfajta ténykedésére vezet, mintha a védekező változatot választaná.

A legtöbb jelenség másik olyan vonása, amely elvész, ha a jelenséget normálalakú játékkal modellezzük meg, abban áll, hogy a normálalakú játéknál a stratégiának a játékos által történő kiválasztása folyamatát úgy tekintjük, mint valami egy lépésből álló aktust, amelynek során a játékos semmiféle információt sem kap ellenfelei magatartásáról és szándékairól.

A valóságban a helyzet gyakran egy kissé jobb, bár jelentősen bonyolultabb. Rendszerint a játékos először nem magát a stratégiát választja ki, hanem csak a rendelkezésére álló stratégiák egy osztályát, meghagyva magának a cselekvési szabadságot a stratégia megválasztásában ezen az osztályon belül.

Miután bizonyos információt kapott ellenfelei hasonló ténykedéseiről, a játékos szűkíti saját stratégiáinak az osztályát és új információra vár stb. (itt az „információ" szót nagyon tág értelemben használjuk: ez lehet teljes információ az ellenfelek magatartásáról, lehet erről szóló részleges információ, végül lehet annak a ténynek a megállapítása, hogy a játékosnak hiú volt az a reménye, hogy kap valamilyen információt). Így lépésről lépésre szűkítve a fennmaradó lehetőségeket, a játékos fokozatosan eljut egy stratégiája kiválasztásáig.

Az a törekvés, hogy a játékelméletben visszatükröződjék a megmodellezendő jelenségek fentemlített két oldala, az elmélet azon részének a kialakulásához és fejlődéséhez vezetett, amely a játékokat éppen a játékosok stratégiái egyéni megkülönböztetése és a játék folyamán való fokozatos megvalósítása szempontjából vizsgálja. Ez a rész a *pozíciós játékok elmélete* nevet viseli. Jegyezzük meg, hogy a játékok matematikai elméletéről szóló első munka, ZERMELO már említett [1] cikke, éppen egy pozíciós játékkal, a sakkal foglalkozott.

A pozíciós játékokat NEUMANN [12] vette vizsgálat alá, e játéktípus pontos definícióját pedig KUHN [26], [27] adta meg. Később a pozíciós játékok elméletét számos szerző fejlesztette tovább munkáiban [28]—[33]. Meg kell jegyezni, hogy a pozíciós játék angol elnevezése — the game in extensive form (általánosított alakú játék) — nem egészen szerencsés, minthogy valójában a normálalakú játék fogalmának nem valamilyen kiterjesztéséről van szó, hanem ellenkezőleg, egyfajta pontosabbá tételéről és konkretizálásáról. Közel állnak a pozíciós játékokhoz azok a játékok, amelyeket BERGE [34] vizsgált.

2. A pozíciós játék definíciója. Kezdjük néhány kombinatorikai fogalommal.

A $<$ relációval részben rendezett véges K halmazt erre a relációra nézve *faalakúan rendezettnek* nevezzük, ha először is van olyan $0 \in K$ elem, hogy $0 \leqq X$ mindegyik $X \in K$ elemre, másodszor tetszés szerinti $X, Y \in K$ esetén abból, hogy található $Z \in K$, amelyre $X < Z$ és $Y < Z$, következik, hogy vagy $X \leqq Y$, vagy $Y \leqq X$. A K halmaz elemeit a továbbiakban *állásoknak* (pozícióknak) fogjuk nevezni. A 0 állást *kezdeti* állásnak nevezzük. Minden olyan W állást, amelyhez nem található $Y > W$ állás, *végállásnak* nevezünk. A K-beli összes végállások halmazát K^*-gal jelöljük. Legyen $X \in K$ esetén

$$D(X) = \{Y \in K : Y > X\}$$

és $U \subset K$ esetén

$$D(U) = \bigcup_{X \in U} D(X).$$

A $U, V \subset K$ halmazokról akkor mondjuk, hogy $U < V$, ha van olyan $X \in U$ és $Y \in V$, hogy $X < Y$.

K végességéből következik, hogy bármelyik $X \neq 0$ álláshoz található egyetlen olyan $Y < X$ állás, amelyre a $Y < Z < X$ relációból következik, hogy vagy $Z = Y$, vagy $Z = X$. Ezt nevezzük a X-et közvetlenül megelőző állásnak és $f(X)$-szel jelöljük.

Legyen $f^0(X) = X$ és $f^{n+1}(X) = f(f^n(X))$. Nyilvánvaló, hogy tetszés szerinti X álláshoz van olyan $n \geqq 0$, hogy $f^n(X) = 0$.

Legyen $W \in K^*$ és $f^n(W) = 0$. Akkor az

$$f^n(W) = 0, \quad f^{n-1}(W), \ldots, f^0(W) = W$$

állások sorozatát a W végállásra vezető *játszmának* nevezzük és $\mathfrak{P}(W)$-vel jelöljük. Ha $X \in K$ és $f^m(X) = 0$, akkor az

$$f^m(X), \ldots, f^0(X)$$

állások sorozatát a X álláshoz vezető *játszmaszakasznak* nevezzük és $\mathfrak{P}(X)$-szel jelöljük. $\mathfrak{P}^*(X)$ alatt azt a sorozatot értjük, amely $\mathfrak{P}(X)$-ből az utolsó tag elhagyása útján keletkezik. Ha $X < Y$, akkor a $\mathfrak{P}(Y)$ sorozat nyilván a $\mathfrak{P}(X)$ sorozattal kezdődik.

Legyen $f^{-1}(X) = \{Y \in K : f(Y) = X\}$. Az $f^{-1}(X)$ halmazt alkotó állásokat a X állás *alternatíváinak* nevezzük. Jelöljük K_i-vel az összes olyan K-hoz tartozó állások halmazát, amelyeknek pontosan i alternativájuk van. Nyilvánvaló, hogy $K_0 = K^*$. A továbbiak során világossá váló okokból elég azoknak a faalakúan rendezett halmazoknak a vizsgálatára szorítkozni, amelyeknél $K_1 = \Lambda$.

A faalakúan rendezett halmazt *irányítottnak* nevezzük, ha minden $X \in K_i$ $(i \geqq 2)$ elemre az $f^{-1}(X)$ halmaz elemei meg vannak számozva az 1-től i-ig terjedő természetes számokkal. Kényelem kedvéért néha, amikor egy rögzített állás alternatíváiról beszélünk, az alternatívákat sorszámukkal fogjuk helyettesíteni. Ha $X \in K_i$ és $1 \leqq \nu \leqq i$, akkor $D(X, \nu)$-vel jelöljük azt a halmazt, amely a X állás ν-edik alternatívájából és az összes utána következő állásokból áll. Nyilván

$$D(X) = \bigcup_{\nu=1}^{i} D(X, \nu).$$

$U \subset K_i$ esetén $D(U, \nu)$-vel fogjuk jelölni a

$$\bigcup_{X \in U} D(X, \nu)$$

összeget. Ha $X < Z$, akkor $\nu_X^{(Z)}$ jelentse a X állás azon alternatíváját, amelyre $Z \in D(X, \nu_X^{(Z)})$.

Legyen a $K \setminus K^*$ halmaz felosztva az egymást páronkint nem metsző $I_0, I_1, \ldots, I_n$ állásosztályokra. Ha $X \in I_0$, akkor azt mondjuk, hogy a X állásban véletlen lépés történik, ha pedig $X \in I_i$ $(i \geqq 1)$, akkor azt, hogy a X

állásban az i-edik játékos következik lépésre. A $I_0, \ldots, I_n$ halmazokat *soronkövetkezési halmazoknak* nevezzük. Továbbá fel fogjuk tenni, hogy minden $X \in I_0$ álláshoz tartozik egy valószínűségeloszlás $f^{-1}(X)$-en, amely mindegyik alternatívához pozitív valószínűséget rendel. A ν_X alternatíva valószínűségének a jele legyen $p(X, \nu_X)$.

Legyen mindegyik I_i $(i=1,\ldots,n)$ halmaz felosztva valamilyen $U_1^{(i)}, \ldots, U_{t_i}^{(i)}$ állásosztályokra úgy, hogy $U_l^{(i)} \nless U_l^{(i)}$ és hogy a $U_l^{(i)} \cap K_j \neq \Lambda$ relációból következzék $U_l^{(i)} \subset K_j$. A $U_1^{(i)}, \ldots, U_{t_i}^{(i)}$ halmazokat *információs halmazoknak* nevezzük. A I_i soronkövetkezési halmazban foglalt összes információs halmazok családját $\mathfrak{U}_i$-vel jelöljük. Egy információs halmaz összes állásai azonos sorszámmal rendelkező alternatíváinak a rendszerét ezen *információs halmaz alternatívájának* nevezzük. Az információs halmazok alternatíváit is azonosíthatjuk sorszámukkal. A megszövegezések egyszerűsítése céljából úgy fogjuk tekinteni, hogy I_0 minden egyes állása információs halmazt képez.

Végül legyenek $h_1, \ldots, h_n$ a K^* halmazon értelmezett valós értékű függvények. A $h_i(W)$ értéket az i-edik játékos *nyereségének* nevezzük a W végállásban.

Azt fogjuk mondani, hogy adva van egy Γ *pozíciós játék,* ha meg van adva

a) a játékosok $I = \{1, \ldots, n\}$ halmaza;

b) egy faalakúan rendezett, irányított K halmaz;

c) a $K \setminus K^*$ halmaznak egy soronkövetkezési halmazokra való $\mathfrak{K}$ felosztása;

d) minden $X \in I_0$ állás alternatíváinak a halmazán egy p_X valószínűségeloszlás;

e) a $I_1, \ldots, I_n$ halmazoknak információs halmazokra való $\mathfrak{K}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ felosztásai;

f) a játékosok $h_i(W)$ nyereségei minden W végállásban.

Ilyen módon pozíciós játéknak nevezzük a

$$\Gamma = \langle I, K, \mathfrak{K}, \{p_X\}_{X \in I_0}, \{\mathfrak{K}_i\}_{i \in I}, \{h_i\}_{i \in I} \rangle$$

összességet.

A Γ pozíciós játék folyamatát induktíve definiálhatjuk a következőképpen. A játék nulladik lépése (húzása) a 0 kezdeti állás kiválasztásából áll. Tegyük fel, hogy a Γ játékban k húzás már megtörtént és ennek eredményeként a X állás adódott. Ha $X \in K^*$, akkor a játékot befejezettnek tekintjük. Ha $X \in I_0$, akkor a $(k+1)$-edik húzás a véletlen alternatíva megvalósulása a p_X eloszlásnak megfelelően és az átmenet ebbe az állásba. Ha pedig $X \in I_i$ $(i \geqq 1)$, akkor az i-edik játékos tetszése szerint választ egy állást X alternatívái közül.

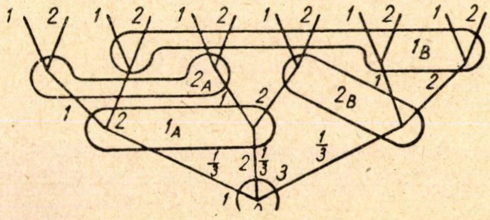
1. példa. A Γ játékban két csapat (1 és 2) vegyen részt és mindegyikük két résztvevőből ($1_A, 1_B$, ill. $2_A, 2_B$) álljon. Tegyük fel, hogy ezek a résztvevők elszigetelt helyiségekben tartózkodnak és nincs összeköttetésük egymással. A Γ játék a következőkből áll. Egy urnában három cédula van, rendre az 1, 2, 3 számokkal ellátva. A közvetítő kivesz ezek közül egyet. Ha az 1-est vagy a 2-est húzta, akkor odamegy az 1_A játékoshoz, aki egy másik cédulára felírja az 1, 2 számok valamelyikét és átadja a cédulát a közvetítőnek. Ha a cédulán 1-es áll, akkor a közvetítő a 2_A játékoshoz megy és megmutatja neki a kapott cédulát (de a sajátját nem). Ekkor ez a játékos egy harmadik cédulára felír egy 1-es vagy egy 2-es számot.

Ha viszont az első játékos (1_A) a 2-es számot írta fel, akkor a közvetítő 1_B-hez megy ha saját céduláján 1-es áll, és 2_B-hez, ha saját céduláján 2-es áll. Nem közölve az illetővel semmit, a közvetítő átvesz tőle egy 1-es vagy 2-es számmal ellátott cédulát és véget vet a játéknak.

Végül tegyük fel, hogy a közvetítő azt a cédulát húzta, amelyiken a 3-as szám áll. Akkor sorban odamegy 2_B-hez és 1_B-hez és kap tőlük egy-egy cédulát. Ezután a játék abbamarad. A játék végére a közvetítő kezében három cédula van, a rajtuk olvasható számok pedig a következő kombinációkat alkothatják (minden szám után zárójelben fel van tüntetve, hogy ki írta fel ezt a számot; a közvetítőt szokás szerint a 0 számmal jelöljük):

$$
\begin{array}{lll}
1(0),\ 1(1_A),\ 1(2_A); & 2(0),\ 1(1_A),\ 1(2_A); & 3(0),\ 1(2_B),\ 1(1_B);\\
1(0),\ 1(1_A),\ 2(2_A); & 2(0),\ 1(1_A),\ 2(2_A); & 3(0),\ 1(2_B),\ 2(1_B);\\
1(0),\ 2(1_A),\ 1(1_B); & 2(0),\ 2(1_A),\ 1(2_B); & 3(0),\ 2(2_B),\ 1(1_B);\\
1(0),\ 2(1_A),\ 2(1_B); & 2(0),\ 2(1_A),\ 2(2_B); & 3(0),\ 2(2_B),\ 2(1_B).
\end{array}
$$

Ha most a cédulákon álló számok minden kombinációjához hozzárendelve képzelünk valamilyen nyereséget, akkor pozíciós játékot kapunk, amelynek a sémáját az 1. ábra mutatja.

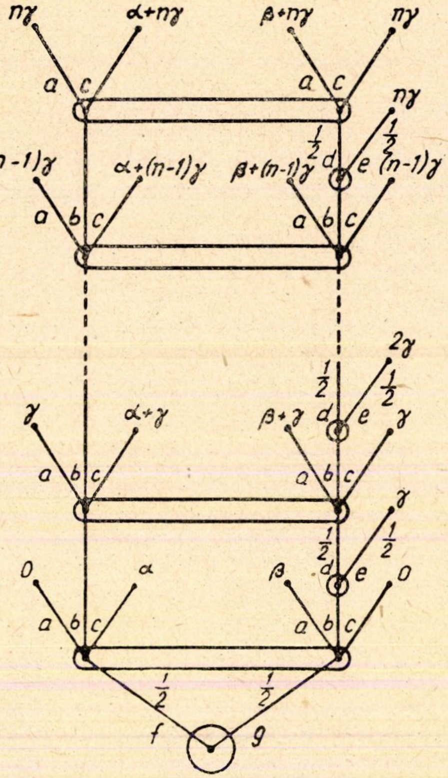


1. ábra

Nyilvánvaló, hogy a dominójáték bármely változata és a kártyajátékok többsége is (vint, preferánsz stb.) elvileg rendkívül hasonlít az ismertetett játékhoz. Ezeknél közvetítőként a véletlen szerepel, amely „kiosztja" a játékosoknak a dominókat vagy a kártyákat.

2. példa. A pozíciós játékok közé tartoznak az összes olyan statisztikai döntési eljárások is, amelyek a szekvenciális analízissel kapcsolatosak (lásd [35]). Az ilyen típusú folyamatokat a „statisztikusnak" (2-es játékos) a „természettel" (1-es játékos) folytatott zérus összegű játékaként szokták felfogni. Foglalkozzunk a legegyszerűbb ilyenfajta játékkal.

Tegyük fel, hogy egy nagy tétel gyártmányt kell átvennünk, amelyben a termelési feltételek szerint a selejt részaránya 0 vagy $\frac{1}{2}$ lehet. Az első esetben a tétel megfelelőnek minősül, a második esetben nem. Tegyük fel, hogy a selejtes tétel elfogadásából származó kár β, a megfelelő tétel el nem fogadásából származó kár α, egy gyártmány megvizsgálásának a költsége pedig γ.



2. *ábra.* Jelölések: *a*—elfogadni; *b*—ellenőrzés; *c*—visszautasítani; *d*—hibátlan gyártmány; *e*—hibás gyártmány; *f* megfelelő tétel; *g*—selejtes tétel. A végállások mellett a statisztikus költségei vannak feltüntetve

Legelőször a statisztikus számára három lehetőség kínálkozik: elfogadni a tételt ellenőrzés nélkül, visszautasítani ellenőrzés nélkül, végül megkezdeni az ellenőrzést egy gyártmány megvizsgálásával. Ha ez a gyártmány selejtes, akkor a tételt visszautasítja, viszont ha hibátlan, akkor a statisztikus újra három alternatíva között választhat: elfogadja a tételt, visszautasítja a tételt, vagy folytatja az ellenőrzést úgy, hogy megvizsgál még egy gyártmányt. Ez a folyamat addig folytatódik, amíg legfeljebb n számú gyártmányt megvizsgálták; ezután a statisztikus köteles vagy elfogadni vagy visszautasítani a tételt.

Ennek a játéknak a sémáját a 2. ábra mutatja. Az 1-es játékos nyereségei (vagyis a statisztikus költségei) a végállások mellett vannak feltüntetve.

3. A pozíciós játék normalizálása. A pozíciós játék fentebb idézett definíciója formailag különbözik a normálalakú játéknak az 1. § 1. pontjában megadott definíciójától. Minden pozíciós játéknál azonban természetes módon értelmezni lehet a játékos stratégiájának és nyereségfüggvényének a fogalmát, és ezáltal a pozíciós játékot normálalakú játékként lehet előállítani.

Pozíciós játéknál a játékosok stratégiáit egyszerűen lehet definiálni. A Γ játékban az i játékos stratégiájának (tiszta stratégiájának) nevezünk egy olyan π_i függvényt, amelynek az értelmezési tartománya $\mathfrak{U}_i$ és amelynek a $\pi_i(U)$ értékei a U információs halmaz alternatívái. Minthogy megállapodtunk abban, hogy mindegyik információs halmaz alternatíváit azonosítjuk saját sorszámukkal, azért az i játékos stratégiáját olyan a $\mathfrak{U}_i$ halmazon értelmezett függvényként lehet definiálni, hogy $U \subset K_j$ esetén a $\pi_i(U)$ érték valamely j-nél nem nagyobb természetes szám.

Az i játékos összes tiszta stratégiáinak a halmazát, mint rendesen, S_i-vel fogjuk jelölni.

A pozíciós játéknál a nyereségfüggvény definíciója valamivel bonyolultabb. Legyen $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ a Γ játék egy helyzete. Legyen bármely $X \in K \setminus K^*$ állásra és ennek az állásnak tetszés szerinti ν alternatívájára

$$\pi(X, \nu) = \begin{cases} p_X(\nu) & \text{ha} \quad X \in I_0, \\ 1 & \text{ha} \quad X \in U \in \mathfrak{U}_i \ (i \neq 0) \text{ és } \pi_i(U) = \nu, \\ 0 & \text{minden más esetben.} \end{cases}$$

Akkor minden π helyzet meghatároz egy véletlen bolyongást a K fán. Ennek során mindegyik $X \in K$ állás fellépésének megvan a maga $\pi[X]$ [2] valószínűsége. Nyilvánvaló, hogy

$$\pi[X] = \prod_{Y \in \mathfrak{P}^*(X)} \pi(Y, \nu_Y^{(X)}).$$

Speciálisan beszélni lehet minden végállás $\pi[W]$ valószínűségéről. Végeredményben mindegyik játékos $h_i(W)$ nyeresége valószínűségi változó lesz. Ennek a

$$\sum_{W \in K^*} h_i(W) \pi[W]$$

várható értékét választjuk $H_i(\pi)$ értékének.

A megkonstruált

$$\Gamma_N = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$$

játékot a Γ játék *normálalakjának (normalizálásának)* nevezzük.

Másrészt minden normálalakú Γ játékot elő lehet állítani mint Γ_P pozíciós játékot.

Ebből a célból válasszuk a játék álláshalmazának az összes

$$(s_1, \ldots, s_k) \quad (s_i \in S_i, \ k \geqq 0)$$

alakú sorozatok halmazát ($k = 0$ esetén az üres sorozat értendő). Ha $k < l$, akkor legyen

$$(s_1, \ldots, s_k) < (s_1, \ldots, s_l),$$

és úgy fogjuk tekinteni, hogy sorozataink más rendezett párt nem alkotnak. A $\mathfrak{K}$ felosztás k-adik osztályához, I_k-hoz soroljuk az összes k tagú sorozatokat, és ezt az egész osztályt egyetlen információs halmaznak nyilvánítjuk.

[2] A valószínűség ilyen szokatlan jelölésének az az oka, hogy $\pi(X)$-en $X \in I_i$ esetén a $\pi_i(X)$ alternatívát értjük, vagyis a π_i függvénynek mint stratégiának az értékét.

Minthogy itt $I_0 = A$, a p valószínűségek definiálásának a kérdése nem merül fel.

Végül esetünkben a végállások az $s = (s_1, \ldots, s_n)$ alakú sorozatok, vagyis a Γ játék helyzetei, és már csak az marad hátra, hogy a $h_i(s)$ értékeket a

$$h_i(s) = H_i(s)$$

képlettel értelmezzük.

A normálalakú Γ játék és a hozzá megszerkesztett Γ_P pozíciós játék közötti különbség tisztán formai és abban foglalható össze, hogy a Γ játék általunk elfogadott interpretációja szerint a résztvevők egyszerre és egymástól függetlenül választanak stratégiát, a Γ_P pozíciós játéknál pedig ugyanezt egymás után teszik meg (de ismét egymástól függetlenül).

Mindazoknak a pozíciós játékoknak a megtalálása, amelyeknek a normalizálása valamely rögzített normálalakú játékkal esik egybe, bonyolult, érdekes és megoldatlan feladat.

4. Teljes információjú játékok. A Zermelo—Neumann-tétel. Azt mondjuk, hogy a Γ pozíciós játék *teljes információjú játék*, ha minden információs halmaza egyetlen állásból áll. Ezt az elnevezést az indokolja, hogy teljes információjú játéknál minden játékos, ismerve állását valamely pillanatban, teljesen informálva van az összes korábbi lépésekről, mind a sajátjairól, mind az ellenféléiről, valamint a véletlenéiről. Teljes információjú játékra példa a sakk. Ezzel szemben a legtöbb kártyajáték nem tartozik ehhez az osztályhoz.

Amint ZERMELO [1] a sakkra alkalmazva, NEUMANN [12] pedig általános alakban megmutatta, teljes információjú játéknál a játékosoknak nincs szükségük stratégiáik randomizálására.

7. TÉTEL (ZERMELO—NEUMANN). *Minden teljes információjú Γ játéknak vannak (tiszta stratégiás) egyensúlyi helyzetei.*

BIZONYÍTÁS. Nevezzük a $\mathfrak{P}(W)$ $(W \in K_\Gamma^*)$ alakú sorozatok maximális hosszúságát a Γ játék *hosszúságának.* A tétel bizonyítása a Γ játék hosszúsága szerint haladó indukcióval fog történni.

Ha Γ hosszúsága 1-gyel egyenlő, akkor a K fa egymagából a kezdeti állásból áll, minden egyes játékos stratégiáinak a halmaza üres, úgyhogy mindegyik helyzetet (mivel ilyen egyáltalán nem létezik) egyensúlyi helyzetnek lehet tekinteni.

Most legyen Γ hosszúsága r, és tegyük fel, hogy a tétel helyességét már minden olyan játékra igazoltuk, amelynek a hosszúsága kisebb r-nél. Legyenek a 0 állás alternatívái $1, 2, \ldots, l$, és rendeljük hozzá a j-edik alternatívához azt a $\Gamma^{(j)}$ játékot, amelyre

$$K^{(j)}=D(0,j),$$
$$I_i^{(j)}=I_i\cap K^{(j)},$$
$$p_X^{(j)}(\nu)=p_X(\nu) \quad \text{ha} \quad X\in I_0^{(j)},$$
$$h_i^{(j)}(W)=h_i(W) \quad \text{ha} \quad W\in K^{(j)*},$$

és amelynek mindegyik információs halmaza egyetlen állásból áll. A $\Gamma^{(j)}$ játékok mindegyike teljes információjú és r-nél kisebb hosszúságú. Legyen

$$\overline{\pi}^{(j)}=(\overline{\pi}_1^{(j)},\dots,\overline{\pi}_n^{(j)})\in\mathfrak{S}_{\Gamma^{(j)}} \tag{3.1}$$

és $0\in I_k$. Nyilvánvaló, hogy a k-tól különböző i játékos minden stratégiája előállítható $(\pi_i^{(1)},\dots,\pi_i^{(l)})$ alakban, a k játékos stratégiái pedig $(\pi_k(0),\pi_k^{(1)},\dots,\pi_k^{(l)})$ alakban, hacsak $k\neq 0$. Tegyük fel, hogy $k\neq 0$ esetén a $H_k^{(j)}(\overline{\pi}^{(j)})$ mennyiség $j=j_0$-ra felveszi maximumát.

Vegyük most a (3.1) egyensúlyi helyzetek által meghatározott

$$\overline{\pi}_i=(\overline{\pi}_i^{(1)},\dots,\overline{\pi}_i^{(l)})\in S_i \qquad (i\neq k),$$
$$\overline{\pi}_k=(\overline{\pi}_0,\overline{\pi}_k^{(1)},\dots,\overline{\pi}_k^{(l)})\in S_k \qquad (k\neq 0)$$

stratégiákat, ahol π_0 azt a 0 álláson értelmezett „függvényt" jelenti, amelynek az értéke j_0, és alkossuk meg belőlük a Γ játék $\overline{\pi}=(\overline{\pi}_1,\dots,\overline{\pi}_n)$ helyzetét. Megmutatjuk, hogy $\overline{\pi}\in\mathfrak{S}_\Gamma$.

Valóban, tetszés szerinti π helyzetre $i\neq k\neq 0$ esetén, valamint $i=k\neq 0$, $\pi_k(0)=j_0$ esetén

$$H_i(\overline{\pi}\|\pi_i)=\sum_{W\in K^*}(\overline{\pi}\|\pi_i)[W]h_i(W)=\sum_{W\in K^{(j_0)*}}(\overline{\pi}\|\pi_i)[W]h_i(W)\leqq$$
$$\leqq\sum_{W\in K^{(j_0)*}}\overline{\pi}^{(j_0)}[W]h_i(W)=\sum_{W\in K^*}\overline{\pi}[W]h_i(W)=H_i(\overline{\pi}).$$

Továbbá ha $k\neq 0$ és $\pi_k(0)=j\neq j_0$, akkor

$$H_k(\overline{\pi}\|\pi_k)=\sum_{W\in K^*}(\overline{\pi}\|\pi_k)[W]h_k(W)=\sum_{W\in K^{(j)*}}(\overline{\pi}^{(j)}\|\pi_k^{(j)})[W]h_k(W)\leqq$$
$$\leqq H_k^{(j)}(\overline{\pi}^{(j)})\leqq H_k^{(j_0)}(\overline{\pi}^{(j_0)})=\sum_{W\in K^*}\overline{\pi}[W]h_k(W)=H_k(\overline{\pi}).$$

Végül $k=0$ esetén

$$H_i(\overline{\pi}\|\pi_i)=\sum_{j=1}^{l}p_0^{(j)}\sum_{W\in K^{(j)*}}(\overline{\pi}^{(j)}\|\pi_i^{(j)})[W]h_i(W)\leqq$$
$$\leqq\sum_{j=1}^{l}p_0^{(j)}\sum_{W\in K^{(j)*}}\overline{\pi}^{(j)}[W]h_i(W)=H_i(\overline{\pi}).$$

Tehát $\overline{\pi}\in\mathfrak{S}_\Gamma$, és ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. Kevert stratégiák. Pozíciós játéknál egy játékos kevert stratégiájának nevezünk szokás szerint az illető játékos tiszta stratégiáinak a halmazán értelmezett minden valószínűségi mértéket. Minthogy pozíciós játéknál a játékos tiszta stratégiái függvények, azért a kevert stratégiák véletlen függvények lesznek.

Legyen $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ a Γ játék kevert stratégiás helyzete. Ezt a helyzetet az összes tiszta stratégiás helyzetek halmazán értelmezett valószínűségi mértéknek lehet tekinteni, ha a π tiszta stratégiás helyzet mértékét a

$$\mu[\pi]=\mu_1[\pi_1]\cdots\mu_n[\pi_n]$$

képlettel definiáljuk.

Egy kevert stratégiás μ helyzetet úgy lehet tárgyalni, mint randomizált véletlen bolyongást a K_Γ fán, nevezetesen mint olyan jelenséget, amelynek során a π véletlen bolyongás $\mu[\pi]$ valószínűséggel valósul meg. Eszerint beszélhetünk egy tetszés szerinti X állás valószínűségéről a μ helyzetben:

$$\mu[X]=\sum_{\pi\in S}\mu[\pi]\pi[X]$$

és speciálisan a végállások valószínűségéről, tehát a nyereségfüggvény új

$$H_i(\mu)=\sum_{W\in K^*}h_i(W)\mu[W]$$

definíciójáról is. A nyereségfüggvény kevert helyzetekre adott utóbbi definíciója nyilván nincs ellentmondásban a megszokott definícióval:

$$H_i(\mu)=\sum_{\pi\in S}H_i(\pi)\mu[\pi].$$

A pozíciós játékoknak, mint minden véges játéknak, NASH tétele szerint vannak kevert stratégiás egyensúlyi helyzeteik. Ahogy a 2. § 1. pontjában megjegyeztük, a véges játék egyensúlyi helyzetei tényleges megtalálásának a nehézségei elsősorban a játékot meghatározó paraméterek nagy számából adódnak. A pozíciós játékokra vonatkozó [27]—[33] munkák többsége azzal a kérdéssel foglalkozik, csökkenthető-e ezeknek a paramétereknek a száma. Az e célra indítványozott eljárások a következő megfontolásra épülnek. Mindegyik játékos összes M_i kevert stratégiái közül tüntessünk ki egy Φ_i osztályt, amelyen belül minden egyes stratégiát aránylag kisszámú paraméter határoz meg. Tegyük fel továbbá, hogy sikerül megszerkeszteni a M_i halmazok Φ_i-re való olyan φ_i leképezéseit, amelyeknél abból, hogy $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ egyensúlyi helyzet, következik, hogy $(\varphi_1\mu_1, \ldots, \varphi_n\mu_n)$ is az. Ha nem tűzzük ki célul a játék összes egyensúlyi helyzeteinek a leírását, hanem megelégszünk közülük néhánynak (vagy csak egynek is) a megtalálásával, akkor nyilván elég a Φ_i halmazokhoz tartozó stratégiákból alkotott helyzeteket tekinteni és ezek között keresni egyensúlyi helyzeteket. Ennek a paragrafusnak a hátralevő részét a magatartás-stratégiák KUHNtól származó elmélete ismertetésének fogjuk szentelni. Ez az elmélet a pozíciós játékok egy osztályára megvalósítja a kitűzött programot.

6. Magatartás-stratégiák. Legyen $\mu_i \in S_i^*$ és $X \in K$. Ha van olyan μ helyzet, hogy $(\mu \| \mu_i)[X] \neq 0$, akkor a X helyzetet a μ_i stratégia mellett *lehetségesnek* (angolul: possible) nevezzük. Ezt így jelöljük: $X \in \operatorname{Poss} \mu_i$. Azt mondjuk, hogy a U információs halmaz a μ_i kevert stratégia mellett *lényeges* (angolul: relevant), ha $U \cap \operatorname{Poss} \mu_i \neq \Lambda$. Ezt a tényt a következőképpen szokás felírni: $U \in \operatorname{Rel} \mu_i$.

Minden $U \in \mathfrak{U}_i$ információs halmazhoz definiáljunk egy $\beta_{i,U}$ valószínűségeloszlást U összes alternatívái halmazán. Az összes így kapott eloszlások családját az i játékos *magatartásának* nevezzük. Ez az elnevezés azért indokolt, mert az összes felsorolt eloszlások megadása teljesen meghatározza a játékos tevékenységét a játék minden információs halmazában és így a játék minden állásában. A játékos magatartása azonban nem határozza meg egyértelműen a játékos kevert stratégiáját: a véletlen függvények definiálásához általában nem elég tudni a függvényértékek eloszlását az értelmezési tartomány minden pontjában. A játékos magatartásával „összeegyeztetett" összes kevert stratégiák közül emeljünk ki egyet, amely különös figyelmet érdemel.

Legyen $\beta_{i,U}$ az i játékos valamely magatartása. A

$$(\mu(\beta_i))[\pi_i] = \prod_{U \in \mathfrak{U}_i} \beta_{i,U}[\pi_i(U)] \tag{3.2}$$

képlettel, ahol π_i az i játékos tetszés szerinti tiszta stratégiája, i-nek egy $\mu(\beta_i)$ kevert stratégiáját definiálhatjuk, amelyet az i játékos *magatartás-stratégiájának* fogunk nevezni.

Fordítva, legyen μ_i az i játékos tetszés szerinti kevert stratégiája. Tekintsük azt a $\beta(\mu_i)$ magatartást, amelyet a következő egyenlőségek értelmeznek:

$$\begin{cases} \beta_{i,U}(\nu) = \dfrac{\mu_i[\pi_i(U) = \nu,\ U \in \operatorname{Rel} \pi_i]}{\mu_i[U \in \operatorname{Rel} \pi_i]} & \text{ha} \quad U \in \operatorname{Rel} \mu_i, \\ \beta_{i,U}(\nu) = \mu_i[\pi_i(U) = \nu] & \text{ha} \quad U \notin \operatorname{Rel} \mu_i. \end{cases} \tag{3.3}$$

A $\mu(\beta(\mu_i))$ magatartás-stratégiát a μ_i *kevert stratégiának megfelelő magatartás-stratégiának* nevezzük.

7. Teljes emlékezetű játékok. Kuhn tétele. Azt mondjuk, hogy az i játékosnak a pozíciós játékban *teljes emlékezete* van, ha bármely π_i tiszta stratégiájára $X \in U \in \operatorname{Rel} \pi_i$ fennállásából következik, hogy $X \in \operatorname{Poss} \pi_i$. Meg lehet mutatni, hogy a játékos emlékezetének a teljessége egyenértékű a következő feltétellel: ha $U, V \in \mathfrak{U}_i$ és $U < V$, akkor található olyan ν alternatíva, hogy $V \subset D(U, \nu)$. Az utóbbi feltétel lényegében annak a körülménynek a formális felírása, hogy a játékos a V-hez tartozó bármelyik állásban emlékszik, volt-e már ő a U-hoz tartozó valamilyen állásban, és ha igen, akkor melyik alternatívát választotta ebben az állásban. A 2. pont 1. példájában egyik játékosnak sincs teljes emlékezete, a 2. példában viszont nyilvánvaló, hogy mindkét játékosnak teljes az emlékezete. A gyakorlatban a teljes emlékezet hiánya rendszerint úgy jelentkezik, hogy a játékos egy csapatot képvisel, amely több elkülönített, a játék folyamán egymással információt cserélni nem tudó személyből áll. Éppen így fejeződött ki a teljes emlékezet hiánya az 1. példában szereplő játéknál.

Az i játékos μ_i' és μ_i'' kevert stratégiáját egymással *ekvivalensnek* nevezzük (jelekben: $\mu_i' \equiv \mu_i''$), ha minden $W \in K^*$ állásra és μ helyzetre

$$(\mu \| \mu_i')[W] = (\mu \| \mu_i'')[W].$$

Nyilvánvaló, hogy ha $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathfrak{S}_\Gamma$ és $\mu_i' \equiv \mu_i$, akkor $\mu \| \mu_i' \in \mathfrak{S}_\Gamma$.

8. TÉTEL (KUHN). *Ahhoz, hogy a Γ játékban tetszés szerinti $\mu_i \in S_i^*$ stratégiára fennálljon*

$$\mu(\beta(\mu_i)) \equiv \mu_i,$$

szükséges és elégséges, hogy az i játékosnak teljes emlékezete legyen Γ-ban.

A tétel bizonyításához előrebocsátunk néhány lemmát.

Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a

$$\pi_i[W] = \prod_{X \in \mathfrak{P}_i^*(W)} \pi_i(X, \nu_X^{(W)}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

jelölés mellett fennáll

$$\pi[W] = \prod_{i=0}^{n} \pi_i[W].$$

1. LEMMA. *Legyen Γ valamilyen pozíciós játék és $X \in K_\Gamma$. Legyen továbbá $\mathfrak{P}_i^*(X) = \Lambda$ esetén $T_i(X) = S_i$, $\mathfrak{P}_i^*(X) \neq \Lambda$ esetén pedig*

$$T_i(X) = \{\pi_i : Y \in \operatorname{Poss} \pi_i, \pi_i(Y) = \nu_Y^{(X)}\},$$

ahol Y a $\mathfrak{P}_i^*(X)$ álláshalmaz utolsó eleme.

Akkor minden π helyzetre

$$\pi[X] = \begin{cases} \pi_0[X] & \text{ha} \quad \pi_i \in T_i(X) \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A bizonyítás indukcióval történik. Tegyük fel, hogy a lemma állítása igaz minden $\mathfrak{P}^*(X)$-beli állásra, és legyen ennek a halmaznak az utolsó Z állására $Z \in I_j$. Akkor

$$\pi[X] = \pi[Z] \pi_j(Z, X). \tag{3.4}$$

Továbbá $\pi_i \in T_i(X)$ $(i=1,\dots,n)$ azt jelenti, hogy $\pi_i \in T_i(Z)$ $(i=1,\dots,n)$ és azonkívül

(3. 5) $$\pi_j(Z)=\nu_Z^{(X)}.$$

Tehát ebben az esetben

(3. 6) $$\pi[Z]=\pi_0[Z].$$

Ha $j=0$, akkor (3. 4) alapján

$$\pi[X]=\pi_0[Z]\pi_0(Z,X)=\pi_0[X].$$

Ha viszont $j\neq 0$, akkor (3. 5) alapján $\pi_j(Z,X)=1$, továbbá $\pi_0[X]=\pi_0[Z]$, és (3. 4), (3. 6) alkalmazásával megkapjuk a kívánt eredményt.

Legyen most legalább egy $i\neq 0$ indexre $\pi_i \notin T_i(X)$. Ha emellett akár csak egyetlen i-re is $\pi_i \notin T_i(Z)$, akkor a feltevés szerint $\pi[Z]=0$. Nyilvánvaló azonban, hogy $0\leqq \pi[X]\leqq \pi[Z]$, úgyhogy a tekintett esetben $\pi[X]=0$ is igaz. Végül ha minden $i\neq 0$-ra $\pi_i \in T_i(Z)$, akkor $\pi_i \notin T_i(X)$ csak úgy lehetséges, hogy $Z\in I_i$ és $\pi_i(Z)\neq \nu_Z^{(X)}$. Ez azt jelenti, hogy $\pi_i(Z,X)=0$; tehát $\pi[X]=0$.

2. LEMMA. *Legyen $X\in I_i$, jelentse ν a X állás egyik alternatíváját, legyen $X<W$ és Y a X után következő állás $\mathfrak{P}_i(W)$-ben. Akkor $Y\in \mathrm{Poss}\,\pi_i$ fennállásához szükséges és elégséges, hogy $X\in \mathrm{Poss}\,\pi_i$ és $\pi_i(X)=\nu_X^{(Y)}$ legyen.*

A bizonyítás azonnal következik a (3. 4) képletből.

Áttérünk a tétel bizonyítására. Legyen a Γ játékban az i játékosnak teljes emlékezete, és μ_i^* legyen e játékos tetszés szerinti kevert stratégiája. Céljaink érdekében elég megmutatni, hogy bármelyik $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ helyzetben

(3. 7) $$(\mu\|\mu_i^*)[W]=(\mu\|\mu(\beta(\mu_i^*)))[W].$$

Vegyünk egy $W\in K^*$ végállást és először tegyük fel, hogy van olyan $X<W$, amely a μ_i^* stratégia mellett nem lehetséges. Akkor (3. 7) baloldala nyilván zérussal egyenlő.

Másrészt legyen X a $\mathfrak{P}_i(W)$ sorozat μ_i^* stratégia mellett lehetséges állásai közül az utolsó, Y pedig az utána következő állás ebben a sorozatban. Akkor a 2. lemma szerint

$$\mu_i^*[X\in \mathrm{Poss}\,\pi_i,\ \pi_i(X)=\nu_X^{(Y)}]=\mu_i^*[Y\in \mathrm{Poss}\,\pi_i]=0.$$

Minthogy azonban az i játékosnak teljes emlékezete van, azért $X\in U\in \mathfrak{U}_i$ esetén

$$\mu_i^*[U\in \mathrm{Rel}\,\pi_i,\ \pi_i(U)=\nu_U^{(W)}]=\mu_i^*[X\in \mathrm{Poss}\,\pi_i,\ \pi_i(X)=\nu_X^{(Y)}]=0.$$

Következésképpen

$$\beta(\mu_i^*)[U,\nu_U^{(W)}]=0$$

és így

$$\mu(\beta(\mu_i^*))[W]=0.$$

Ezzel a (3. 7) összefüggést a $W \notin \operatorname{Poss} \mu_i^*$ esetre bebizonyítottuk. Most legyen $W \in \operatorname{Poss} \mu_i^*$. Fennáll

$$(\mu \| \mu(\beta(\mu_i^*)))[W] =$$
$$= \pi_0[W] \mu(\beta(\mu_i^*)) [\bigcap_{U \cap \mathfrak{P}_i(W) \neq \Lambda} (\pi_i(U) = \nu_U^{(W)})] \prod_{j \neq i} \mu_j [\bigcap_{U \cap \mathfrak{P}_j(W) \neq \Lambda} (\pi_j(U) = \nu_U^{(W)})].$$

(3. 2) alapján írhatjuk:

$$\alpha = \mu(\beta(\mu_i^*)) [\bigcap_{U \cap \mathfrak{P}_i(W) \neq \Lambda} (\pi_i(U) = \nu_U^{(W)})] = \prod_{U \cap \mathfrak{P}_i(W) \neq \Lambda} \beta(\mu_i^*)[U, \nu_U^{(W)}].$$

Továbbá bevezetve a $\mathfrak{P}_i(W) = \{Z_1, \ldots, Z_r\}$; $Z_s \in U_s$ $(s = 1, \ldots, r)$ jelölést, (3. 3) segítségével kapjuk:

$$\alpha = \prod_{s=1}^{r} \frac{\mu_i^*[\pi_i(U_s) = \nu_U^{(W)},\ U_s \in \operatorname{Rel} \pi_i]}{\mu_i^*[U_s \in \operatorname{Rel} \pi_i]}.$$

Minthogy i-nek teljes emlékezete van,

$$\alpha = \prod_{s=1}^{r} \frac{\mu_i^*[\pi_i(Z_s) = \nu_{Z_s}^{(W)},\ Z_s \in \operatorname{Poss} \pi_i]}{\mu_i^*[Z_s \in \operatorname{Poss} \pi_i]}.$$

A 2. lemma szerint az s-nek megfelelő tört számlálója egyenlő az $(s+1)$-nek megfelelő tört nevezőjével és különbözik zérustól. Következésképpen

$$\alpha = \frac{\mu_i^*[\pi_i(Z_r) = \nu_{Z_r}^{(W)},\ Z_r \in \operatorname{Poss} \pi_i]}{\mu_i^*[Z_1 \in \operatorname{Poss} \pi_i]}.$$

Itt a nevező nyilván 1-gyel egyenlő. Azonkívül, ismét a 2. lemma értelmében, $Z_r \in \operatorname{Poss} \pi_i$ azt jelenti, hogy $\pi_i(Z_s) = \nu_{Z_s}^{(W)}$ és természetesen $Z_s \in \operatorname{Poss} \pi_i$ $(s = 1, \ldots, r)$. Ezért

$$\alpha = \mu_i^* \left[\bigcap_{s=1}^{r} (\pi_i(Z_s) = \nu_{Z_s}^{(W)},\ Z_s \in \operatorname{Poss} \pi_i) \right].$$

Ilymódon azt kapjuk, hogy

$$(\mu \| \mu(\beta(\mu_i^*)))[W] = \pi_0[W] \mu_i^* [\bigcap_{Z \in \mathfrak{P}_i(W)} (\pi_i(Z) = \nu_Z^{(W)})] \prod_{j \neq i} \mu_j [\bigcap_{Z \in \mathfrak{P}_j(W)} (\pi_j(Z) = \nu_Z^{(W)})] =$$
$$= (\mu \| \mu_i^*)[W],$$

és ezt kellett bebizonyítani.

Áttérünk az elégségesség bizonyítására. Tegyük fel, hogy i-nek nincs teljes emlékezete a Γ játékban. Ez azt jelenti, hogy található olyan $U \in \mathfrak{U}_i$ információs halmaz és benne X, Y állások, továbbá olyan π_i stratégia, hogy $X \in \operatorname{Poss} \pi_i$, $Y \notin \operatorname{Poss} \pi_i$. Legyen a π_i' stratégia olyan, hogy $\pi_i'(U) \neq \pi_i(U)$ és $Y \in \operatorname{Poss} \pi_i'$. Vegyünk egy $W \in K^*$ végállást, amelyre $Y < W$ és $\pi_i'[W] \neq 0$, és képezzük a $\mu_i = \frac{1}{2}(\pi_i + \pi_i')$ kevert stratégiát. Világos, hogy

$$(\pi' \| \mu_i)[W] = \frac{1}{2}\pi_0[W].$$

Most tekintsük az utolsó állást a $\mathfrak{P}_i(Y) \cap \mathrm{Poss}\,\pi_i$ halmazban és jelöljük ezt Z-vel. Fennáll

$$\beta(\mu_i)[U, \nu_U^{(W)}] = \frac{1}{2},$$

$$\beta(\mu_i)[Z, \nu_Z^{(W)}] = \frac{1}{2}.$$

Tehát

$$(\pi' \| \mu(\beta(\mu_i)))[W] \leqq \frac{1}{4}\pi_0[W],$$

amivel a tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] E. Zermelo, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge **2** (1912), 501—550.

[2] E. Borel, La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche, *Compt. Rend. Acad. Sci.* **173** (1921), 1304—1308.

[3] E. Borel, Sur les jeux où interviennent l'hazard et l'habilité des joueurs, *Théorie des Probabilités*, Paris (1924), 202—224.
Angol fordítását lásd Econometrica 21 (1953), 97—117.

[4] E. Borel, Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu, *Compt. Rend. Sci.* **184** (1927), 52—54.

[5] J. Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.* **100** (1928), 295—320.

[6] L. Kalmár, Zur Theorie der abstracten Spiele, *Acta Szeged*, (1928—1929), 65—85.

[7] R. A. Fisher, Randomisation and an old enigma of card play, *Math. Gazette* **18** (1934), 294—297.

[8] R. Possel, Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de reflexion. *Actualités Sci. et Industr.* (1936) 436.

[9] E. Borel, Applications aux jeux de hasard, *Traité du calcul des Probabilités et de ses Applications* **4**, N° 11 (1938).

[10] J. Ville, Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habilité des joueurs, *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* **5**, N° 11 (1938), 105—113.

[11] E. Borel, A. Cheron, Théorie Mathématique du Bridge à la portée de tous (*Monographie des probabilités*, fasc. 5) Paris, 1940.

[12] J. Neumann—O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, 1944. New York.

[13] R. S. Beresford—M. H. Preston, A mixed strategy in action, *Operat. Res. Quart.* **6**, N° 4 (1955), 173—175.

[14] J. F. Nash, Non-cooperative games, *Ann. of Math.* **54** (1951), 286—295.

[15] П. С. Александров, Комбинаторная топология, Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1947.

[16] L. S. Shapley—R. N. Snow, Basic solution of discrete games, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950), 27—35.
[17] Н. Н. Воробьев, Ситуации равновесия в биматричных играх, Теория вероятностей и ее применения, 3 (1958), N° 3.
[18] D. Blackwell—M. A. Girshick, *Theory of games and Statistical decisions*, New York, 1954.
[19] I. Kaplansky, A contribution to von Neumann's theory of games, *Ann. of Math.* **46** (1945).
[20] H. F. Bohnenblust, S. Karlin, L. S. Shapley, Solution of discrete two-person games, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950), 51—72.
[21] G. W. Brown—J. v. Neumann, Solutions of games by differential equations, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950) 73—79.
[22] D. Gale, H. W. Kuhn, A. W. Tucker, On symmetric games, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950), 81—87.
[23] G. W. Brown, Iterative solutions of games by fictitious play, *Activity analysis of production and allocation*, Cowles commission Monographs, N° 13, New York.
[24] J. Robinson, An iterative method of solving a game, *Ann. of Math.* **54** (1951), 296—301.
[25] D. Gale—S. Sherman, Solutions of finite two-person games, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950), 37—49.
[26] H. W. Kuhn, Extensive games, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **36** (1950).
[27] H. W. Kuhn, Extensive games and the problem of information, *Contributions to the Theory of Games* II, Princeton (1953), 193—216.
[28] L. S. Shapley, Information and the formal solution of many-moved games, *Proc. Int. Congr. of Math.*, Cambridge, U. S. A., 1950 (Amer. Math. Soc., 1952), I, 574—575.
[29] W. O. Krental, J. C. C. McKinsey, W. V. Quine, A simplification of games in extensive form, *Duke Math. Journ.* **18** (1951), 885—900.
[30] N. Dalkey, Equivalence of information patterns and essentially determinate games, *Contributions to the Theory of Games* II, Princeton (1953), 217—243.
[31] G. L. Thompson, Signaling strategies on n-person games, *Contributions to the Theory of Games* II, Princeton (1953), 267—277.
[32] B. J. Birch, On games with almost complete informations, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51**, N° 2 (1955), 275—287.
[33] Н. Н. Воробьев, Редуцированные стратегии для игр в обобщенной форме, Доклады Академии наук СССР, 115 (1957), N° 5, 855—857.
[34] C. Berge, Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs, *Journ. math. pures et appl.* **32**, N° 9: 2 (1953), 129—184.
[35] A. Wald, *Statistical decision functions*, New York, 1950.
[36] H. N. Shapiro, Note on a computation method in the theory of games, *Comm. Pure and Appl. Math.* **11**, N° 4 (1958), 588—593.

Fordította: Bognár János
A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1960. IV. 3. — Terjedelem: 12,75 (A/5) ív, 3 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 60-1715

Ára: 28,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

X. KÖTET 3. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST
1960

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

X. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat. továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek, Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

AZ INFORMÁCIÓELMÉLET NÉHÁNY ALAPVETŐ KÉRDÉSE*

Írta: RÉNYI ALFRÉD

1. §. Bevezetés

Az információ fogalma központi szerepet játszik az egyes ember és a társadalom életében, és mindenfajta tudományos kutatásban. A világűrbe felbocsátott rakéták egyik legfontosabb feladata például információ szerzése a kozmikus térségekről, más égitestekről stb. Minden műszer információt regisztrál. A korszerű elektronikus adatfeldolgozó és számológépek és az automatikus irányító berendezések központi problémája az információ továbbításának, feldolgozásának, tárolásának a kérdése.

Az információ fogalma olyan univerzális, annyira áthatja mindennapi életünket és a tudomány minden ágát, hogy e tekintetben csak az energiafogalommal hasonlítható össze. A két fogalom között több szempontból is érdekes párhuzamot vonhatunk. Ha végigtekintünk a kultúra, a tudomány nagy eredményein, a legnagyobb felfedezéseken, azoknak jelentős részét két világosan elkülöníthető osztályba sorolhatjuk. Az egyik csoportba az energia átalakításával, tárolásával, továbbításával kapcsolatos felfedezések tartoznak, mint például a történelem előtti korban a tűz felfedezése, a víz- és szélenergia felhasználása (hajózás), az első gépek konstruálása (emelő, csiga, kerék, stb.) vagy az újkorban a gőzgép, az elektromos energia hasznosítása, legújabban a rakétamotorok, az atomenergia felszabadítása. A második csoportba az információ átalakításával, tárolásával, továbbításával kapcsolatos felfedezések tartoznak e felfedezések sorát az őskorban a beszéd, majd a történelem hajnalán az írás kialakulása nyitja meg. A sort a könyvnyomtatás, a távíró, a fényképezés, a telefon, a rádió, a gramofon, a film, a televízió felfedezése folytatják, e sorozat legújabb láncszemét a matematikai gépek alkotják. Számos, az első csoportba tartozó felfedezésnek megvan a párja a második csoportban. A tüzet például nemcsak főzésre és melegedésre, hanem — már az ókorban — fényjelek adására is használták. Egy időben szokás volt az elektrotechnikát erősáramú és gyengeáramú technikára felosztani. A lényeget sokkal jobban kifejezi az a

* A Magyar Tudományos Akadémia 1960. évi Nagygyűlésén, 1960. április 12-én elhangzott előadás részletesebben kidolgozott szövege.

megkülönböztetés, hogy az elektromos áramot részben energia-, részben pedig információtovábbításra használják.

Még egy szempontból tanulságos párhuzamot vonni az energia- és az információfogalom között. Hosszú időbe tellett, amíg kialakult az energiamennyiség elvont fogalma, amelynek alapján az energia különböző megjelenési formáit, mint pl. a mechanikai energiát, a hőenergiát, a kémiai energiát, az elektromos energiát stb. össze lehetett hasonlítani, közös egységgel lehetett mérni. Erre a felismerésre és egyben az energia-megmaradás elvének a megfogalmazására a múlt század közepén jutott el a tudomány. Ma már magától értetődő számunkra, hogy van értelme energiáról beszélni elvonatkoztatva annak megjelenési formájától, de ne felejtsük el, hogy ez a gondolat alig több mint száz éves. Az információ fogalmával kapcsolatban a megfelelő lépés csak az elmúlt évtizedekben történt meg. Egyáltalán nem volt kézenfekvő, hogy van értelme az információ mennyiségéről beszélni, elvonatkoztatva az információ tartalmától és formájától. Mi marad az információból, ha annak tartalmától, jelentésétől elvonatkoztatunk? Nem marad más, mint az információ puszta mennyisége. Ezzel az elvont információmennyiséggel foglalkozik az információelmélet, a valószínűségszámításnak ez az elmúlt évtizedekben kifejlődött új és jelentős fejezete. Az információ matematikai elmélete még fiatal tudomány, fogalmai most kezdenek kikristályosodni. Az, hogy az információ mennyiségét számszerűleg ki lehet fejezni, mérni lehet, ma már vitán felül áll. Az a kérdés azonban, hogy hogyan történjék ez, milyen mérőszámokkal, még nincs lezárva. E dolgozat ezzel a kérdéssel foglalkozik.

2. §. Az információfogalom kialakulása és az információ Shannon-féle mértéke

Mindenekelőtt egy történeti visszapillantással szeretném kezdeni. Legelőször R V. L. HARTLEY nevét említeném, aki az információ *logaritmikus mértékét* bevezette [1]. Egy N elemű halmaz egy elemének pontos megadására HARTLEY szerint $\log_2 N$ egységnyi információmennyiség szükséges. Eszerint tehát az információmennyiség egysége — amelyet 1 *bit*nek szokás nevezni — az az információ, amely egy kételemű halmaz egyik elemének megadásához szükséges. A logaritmikus információmérték legfontosabb tulajdonsága az additivitása: ha egy $N \cdot M$ elemű E halmaz M darab egyenként N elemű $E_1, E_2, \ldots, E_M$ idegen részhalmazból áll, akkor E egy elemének megadása két lépésben történhet: először megadjuk, hogy E szóban forgó eleme az $E_1, E_2, \ldots, E_M$ részhalmazok közül melyikbe tartozik — ehhez $\log_2 M$ egységnyi információ szükséges — azután megadjuk, hogy a szóban forgó N elemű E_k halmaz melyik eleméről van szó — ehhez $\log_2 N$ információ szükséges.

Az E halmaz egy elemének jellemzéséhez szükséges információmennyiség a két részinformáció összegével egyenlő: valóban $\log_2 NM = \log_2 N + \log_2 M$. A következő lépést C. E. SHANNON [2], [3] tette meg, aki felismerte, hogy a HARTLEY-féle képlet csak abban az esetben érvényes, ha az információ megszerzése előtt semmilyen előzetes tudomásunk sincsen arról, hogy az E halmaz elemei milyen mértékben jönnek tekintetbe, vagyis, ha az E halmaz elemei mind egyformán valószínűek. Ha azonban az E halmaz elemeinek valószínűségei nem egyenlők, megváltozik a helyzet. Ha az E halmaz elemeinek valószínűségei $p_1, p_2, \ldots, p_N$ $\left(\text{ahol tehát } \sum_{k=1}^{N} p_k = 1\right)$, akkor SHANNON szerint az E halmaz egy elemének megadása (más szóval egy olyan, véletlentől függő kísérlet egy konkrét elvégzésénél tapasztalt eredmény közlése, amelynél az egyes lehetséges eredmények valószínűségei $p_1, p_2, \ldots, p_N$)

$$(1) \qquad I = \sum_{k=1}^{N} p_k \log_2 \frac{1}{p_k}$$

információmennyiséget tartalmaz. SHANNONtól függetlenül, vele egyidejűleg N. WIENER is hasonló következtetésre jutott [4]. Ha $p_1 = p_2 = \cdots = p_N = \frac{1}{N}$, akkor az (1) SHANNON-féle képlet redukálódik az $I = \log_2 N$ HARTLEY-féle képletre. SHANNON képletét heurisztikusan a következőképpen lehet például megindokolni. Tegyük fel, hogy az E halmaz az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ részhalmazokból áll, amelyek rendre $N_1, N_2, \ldots, N_n$ eleműek $\left(\sum_{k=1}^{n} N_k = N\right)$. Tegyük fel, hogy csak az érdekel benünket, hogy E egy eleme melyik E_k részhalmazhoz tartozik. Ha E elemei egyformán valószínűek, akkor E egy elemének megadására vonatkozó információ két részből tevődik össze: abból az információból, amely megadja, hogy a szóban forgó elem melyik E_k részhalmazba tartozik, — ezt az információt jelöljük I_k-val, — és abból az információból, amely a szóban forgó elemet E_k halmazon belül specifikálja; ez utóbbi információ nyilván $\log_2 N_k$-val egyenlő a HARTLEY-féle képlet szerint, tehát függ a k indextől. Ha tehát a szóban forgó elem az E halmazhoz tartozik, akkor a megadásához szükséges információ, ami a HARTLEY-féle képlet szerint $\log_2 N$, összetevődik az E_k halmaz megadásához szükséges információból, amit I_k-val jelöltünk és az E_k halmazon belüli meghatározáshoz szükséges információból. Tehát az additivitás elve szerint $\log_2 N = I_k + \log_2 N_k$, azaz

$$(2) \qquad I_k = \log_2 \frac{N}{N_k}.$$

Kézenfekvő ezt az információt azzal a valószínűséggel, mint súllyal venni figyelembe, amellyel E egy eleme, az E_k halmazba tartozik, tehát az $\frac{N_k}{N}$ súllyal. Így jutunk az

$$I = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k}{N} I_k \tag{3}$$

összefüggésre, amiből, bevezetve a $p_k = \frac{N_k}{N}$ jelölést, (2) szerint azonnal adódik az

$$I = \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 \frac{1}{p_k} \tag{4}$$

SHANNON-féle képlet. A (4) mennyiséget a $(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \mathfrak{P}$ valószínűségeloszlás *entrópiájának* nevezik és $H(\mathfrak{P})$-vel szokták jelölni.

3. §. Az információmennyiség egyéb mértékei

Ha a fenti meggondolást alaposan elemezzük, észre fogjuk venni, hogy tulajdonképpen két posztulátumot használtunk fel. Az egyik *az információ additivitásának elve*, amely alapvető jellegű, és már a HARTLEY-féle formula felállításának is alapjául szolgált. E posztulátum kissé módosított alakjából könnyen levezethető, hogy ha egy olyan véletlen esemény következik be, amelynek valószínűsége p-vel egyenlő, úgy $I(p)$-vel jelölve azt az információmennyiséget, amit ez az esemény számunkra nyújt,

$$I(p) = \log_2 \frac{1}{p}. \tag{5}$$

Ugyanis az additivitás posztulátumát úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha két független eseményt figyelünk meg, akkor a nyert információk összeadódnak; ennélfogva $I(p)$-re fenn kell állni az $I(pq) = I(p) + I(q)$ függvényegyenletnek; ha még posztuláljuk, hogy $I\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ és hogy $I(p)$ p-nek monoton függvénye, (vagy azt, hogy $I(p)$ p-nek folytonos függvénye ha $p > 0$) úgy (5) azonnal következik. A másik posztulátum az, hogy amikor különböző valószínűséggel különböző információmennyiségek lépnek fel, akkor az egyes információértékeknek a hozzátartozó valószínűségekkel súlyozott középértékét (azaz az információ várható értékét) tekintjük a szóban forgó információ átlagos értékének. Általában, ha egy véletlentől függő kísérlet lehetséges A_k kimeneteleinek valószínűségei a p_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ számok és az A_k esemény bekövetkezése esetén I_k információt nyerünk, úgy a szóban forgó elv szerint átlagban

$$I(\mathfrak{P}, \mathfrak{J}) = \sum_{k=1}^{n} p_k I_k \tag{6}$$

információt nyerünk. (A rövidség kedvéért a $\mathfrak{P}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ $\mathfrak{I}=(I_1,I_2,\ldots,I_n)$ jelöléseket használjuk.) Ezt a most megfogalmazott elvet nevezhetjük a *lineáris középértékképzés elvének*. Nyilvánvaló, hogy a (4) képlet az (5) és (6) képletek, azaz az additivitás és a lineáris középértékképzés posztulátumainak következménye. Jól tudjuk azonban, hogy a lineáris középérték ugyan a leggyakrabban használt, de nem az egyedüli módja a középértékképzésnek. A középértékek általános elméletében (lásd pl. [5], [6]) az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ valós számok $p_1,p_2,\ldots,p_n$ súlyokkal $\left(p_k>0, \sum_{k=1}^{n} p_k=1\right)$ vett középértékén általában egy

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \varphi(x_k)\right) \tag{7}$$

alakú kifejezést értünk, ahol $\varphi(x)$ egy a valós számokon értelmezett, szigorúan monoton (növekvő vagy csökkenő) és folytonos, de egyébként tetszőleges függvény; $\varphi(x)$-et a (7) középértékhez tartozó KOLMOGOROV—NAGUMO függvénynek szokták nevezni*. Ha a SHANNON-formula fenti heurisztikus levezetésében a lineáris középérték helyett a (7) alatti középértéket vesszük, akkor a $\mathfrak{P}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ valószínűségeloszláshoz tartozó információ mennyiségére vonatkozólag (4) helyett a

$$I=\varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \varphi\left(\log_2 \frac{1}{p_k}\right)\right) \tag{8}$$

képletre, illetve (6) helyett az

$$I=\varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \varphi(I_k)\right) \tag{9}$$

képletre jutunk. Ha speciálisan $\varphi(x)$ lineáris, úgy (8) redukálódik a (4) SHANNON-féle képletre, ill. (9) a (6) képletre. Ilyen módon kézenfekvő a (8) kifejezést is az információmennyiség mértékszámának tekinteni. Felmerül azonban a kérdés, vajon a $\varphi(x)$ függvényt tetszőlegesen választva mindig az információmennyiség ésszerű mértékszámát nyerjük-e, nem kerülünk-e ellentétbe az additivitás posztulátumával? Könnyen belátható, hogy a $\varphi(x)$ függvény valóban nem választható tetszőlegesen, az additivitás elve a $\varphi(x)$ KOLMOGOROV—NAGUMO függvény választására vonatkozólag igen erős megszorítást jelent; e megszorításnak azonban nemcsak a lineáris függvény, hanem az

* A. N. KOLMOGOROV [7] és M. NAGUMO [8] voltak az elsők, akik az általános középértékek jellemző tulajdonságait vizsgálták. Ők csak az egyenlő súlyok esetével foglalkoztak; a tetszőleges súlyokra való kiterjesztéssel és a (7) alakú középértékek jellemzésével B. DE FINETTI [9], B. JESSEN [10], T. KITAGAWA [11], ACZÉL JÁNOS [6], [12], és sokan mások foglalkoztak. ([12]-ben részletes irodalomjegyzék található.)

exponenciális függvények is eleget tesznek. Az additivitás elvét ugyanis valamivel általánosabban a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Egy $\mathcal{K}$ kísérlet, amelynek eredménye a véletlentől függ, álljon két független kísérlet, $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ egyesítéséből; tegyük fel, hogy a $\mathcal{K}_1$ kísérletnél p_h valószínűséggel I_h információt nyerünk $(h=1,2,\ldots,m)$, a $\mathcal{K}_2$ kísérletnél q_k valószínűséggel J_k információt nyerünk; $(k=1,2,\ldots,n)$; akkor tehát a $\mathcal{K}$ kísérlet elvégzésekor $p_h q_k$ valószínűséggel I_h+J_k információt nyerünk $(h=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$. Ez esetben a $\mathcal{K}$ kísérlet elvégzésekor nyert információ (átlagos) mennyisége egyenlő kell hogy legyen a $\mathcal{K}_1$, ill. $\mathcal{K}_2$ kísérlet elvégzésekor nyert információmennyiségek összegével. (9) szerint tehát fenn kell állni a

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p_h q_k \varphi(I_h+J_k)\right)=\varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} p_k\varphi(I_h)\right)+\varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} q_k\varphi(J_k)\right) \tag{10}$$

összefüggésnek, a $\mathcal{P}=\{p_h\}$ és $\mathcal{Q}=\{q_k\}$ véges diszkrét valószínűségeloszlások és az I_h és J_k számok minden választása mellett.* Speciálisan, ha $J_k=J$ nem függ k-tól, akkor tehát (7) szerint fenn kell állnia a

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{h=1}^{m} p_h\varphi(I_h+J)\right)=\varphi^{-1}\left(\sum_{h=1}^{m} p_h\varphi(I_h)\right)+J \tag{11}$$

összefüggésnek. Mármost a középértékek elméletének egy általános tétele szerint (lásd [5], 89. tétel) a (11) egyenlet csak akkor áll fenn, ha $\varphi(x)$ lineáris vagy exponenciális függvény. Ha $\varphi(x)$ lineáris, akkor (6) a SHANNON-féle képletre redukálódik; ha $\varphi(x)$ exponenciális függvény, írjuk $\varphi(x)$-et $\varphi(x)=2^{(1-\alpha)x}$ alakba, ahol $\alpha\neq 1$, akkor (4) helyett az

$$I_\alpha(\mathcal{P})=\frac{1}{1-\alpha}\log_2\left(\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha\right) \tag{12}$$

kifejezésre jutunk. A (12) kifejezés minden $\alpha\neq 1$ valós számra értelmezhető és az információ mértékszámának tekinthető. $I_\alpha(\mathcal{P})$-nek azonban α negatív értékeire előnytelen tulajdonságai vannak; ha ugyanis $\alpha<0$ és a $\mathcal{P}=(p_1,\ldots,p_n)$ eloszlást $(p_k>0;\ k=1,2,\ldots,n)$ úgy változtatjuk, hogy p_1 0-hoz tartson, akkor $I_\alpha(\mathcal{P})$ végtelenhez tart. $I_\alpha(\mathcal{P})$ tehát $\alpha<0$ esetében túlságosan érzékeny a kicsiny valószínűségekre. (Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha $\alpha<0$, az eloszlást egy 0-val egyenlő valószínűséggel kiegészítve, amitől pedig az eloszlás nem változik meg, az $I_\alpha(\mathcal{P})$ mennyiség végtelenné válik.) Hasonlóképpen kizárandó az $\alpha=0$ eset is, mert az olyan kifejezésre vezet $(I_0(\mathcal{P})=\log_2 n)$,

* Az I_h, ill. J_k számokat a kísérlet elvégzése után és a kísérlet előtt rendelkezésre álló információ különbségeként fogva fel, e számoknak nemcsak pozitív, hanem *negatív* értékei is tekintetbe jönnek.

amely nem függ a p_k számoktól (csak azok számától). Ezért a következőkben (12)-ben többnyire az $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ megszorítást tesszük. *Az $I_\alpha(\mathcal{P})$ kifejezést a $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ valószínűségeloszláshoz tartozó α-adrendű információmértéknek nevezzük.* Érdekes megjegyezni, hogy

$$(13) \qquad I_1(\mathcal{P}) = \lim_{\alpha \to 1} I_\alpha(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 \frac{1}{p_k} = H(\mathcal{P}),$$

azaz határesetben, ha $\alpha = 1$, a *Shannon*-féle entrópiát kapjuk, amelyet ezentúl $I_1(\mathcal{P})$-vel fogunk jelölni. Az entrópia tehát a (12) alatti információmennyiségek közé tartozik és az $\alpha = 1$ esetnek felel meg. (12)-ből leolvasható, hogy $0 \leqq I_\alpha(\mathcal{P}) \leqq \log_2 n$, továbbá $I_\alpha(\mathcal{P}) = 0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha az eloszlás elfajult, míg $I_\alpha(\mathcal{P}) = \log_2 n$ csak akkor áll fenn, ha az eloszlás egyenletes, azaz $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$. Könnyen be lehet látni, hogy $I_\alpha(\mathcal{P})$ α-nak monoton csökkenő függvénye. Ugyanis

$$\frac{dI_\alpha(\mathcal{P})}{d\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left[\log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha \right) + \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha \log_2 p_k^{1-\alpha}}{\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha} \right]$$

és $\log_2 x$ konkávitása folytán a JENSEN-egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha \log_2 p_k^{1-\alpha} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha \right) \log_2 \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha}.$$

Tehát, ha a p_k számok nem mind egyenlők és az eloszlás nem elfajult, akkor

$$\log_2 n > I_\alpha(\mathcal{P}) > H(\mathcal{P}) \quad \text{ha} \quad 0 < \alpha < 1$$

és

$$\log_2 \frac{1}{\max\limits_{1 \leqq k \leqq n} p_k} < I_\alpha(\mathcal{P}) < H(\mathcal{P}) \quad \text{ha} \quad 1 < \alpha < +\infty.$$

Általánosabban, ha egy kísérlet eredményeképpen p_k valószínűséggel I_k információt nyerünk ($k = 1, 2, \ldots, n$), akkor a kísérlet által nyújtott információ α-adrendű mértékén az

$$(14) \qquad I_\alpha(\mathcal{P}, \mathcal{J}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot 2^{(1-\alpha) I_k} \right)$$

mennyiséget értjük; az $\alpha = 1$ speciális esetben (14) redukálódik (6)-ra.

Ha egy kísérlet lehetséges eredményei az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események és A_k bekövetkezése esetén — aminek valószínűsége p_k — I_k információt nyerünk, illetve általánosabban I_k-val nő (vagy csökken, ha I_k negatív) a rendelkezésünkre álló információ, akkor definiálhatunk egy $\boldsymbol{i}$ valószínűségi változót, amely az I_k értékeket $p_k = \mathbf{P}(A_k)$ valószínűséggel veszi fel; akkor a szóban forgó kísérletnél nyert SHANNON-féle információmennyiség egyszerűen $\boldsymbol{i}$ várható értékével egyenlő, míg

$$I_\alpha(\mathcal{P}, \mathfrak{J}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \mathbf{M}(2^{(1-\alpha)\boldsymbol{i}}),$$

ahol $\mathbf{M}$ a zárójelben álló valószínűségi változó várható értékét jelöli. Nyilvánvaló, hogy ha $\boldsymbol{i} \geqq 0$, akkor $\mathbf{M}(2^{(1-\alpha)\boldsymbol{i}}) \geqq 1$, vagy $\leqq 1$ aszerint, hogy $0 < \alpha < 1$ vagy $1 < \alpha < +\infty$ és így mindenképpen $I_\alpha(\mathcal{P}, \mathfrak{J}) \geqq 0$.

Speciálisan, ha $I_k = \log_2 \frac{1}{p_k}$, vagyis, ha egy eseményrendszer eseményeihez egyszerűen az illető esemény megfigyelése által nyert információt rendeljük hozzá, akkor célszerű bevezetni az

$$F_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{\log_2 \frac{1}{p_k} < x} p_k \tag{15}$$

függvényt, amelyet a $\mathcal{P} = \{p_k\}$ eloszláshoz tartozó *információeloszlásfüggvénynek* nevezünk. $F_{\mathcal{P}}(x)$ segítségével az $I_1(\mathcal{P})$, ill. $I_\alpha(\mathcal{P})$ mennyiségek az

$$I_1(\mathcal{P}) = \int_0^{+\infty} x\, dF_{\mathcal{P}}(x), \tag{16}$$

ill.

$$I_\alpha(\mathcal{P}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\int_0^{+\infty} 2^{(1-\alpha)x} dF_{\mathcal{P}}(x) \right) \tag{17}$$

alakban fejezhetők ki.

Érdekes megjegyezni, hogy két valószínűségeloszlás direkt szorzatának információeloszlásfüggvénye egyenlő a két eloszlás információeloszlásfüggvényének kompozíciójával, azaz, ha $\mathcal{P} = \{p_h\}$ és $\mathcal{Q} = \{q_k\}$ a két valószínűségeloszlás,

$$F_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{\log_2 \frac{1}{p_h} < x} p_h, \quad F_{\mathcal{Q}}(x) = \sum_{\log_2 \frac{1}{q_h} < x} p_k$$

akkor $\mathcal{P} * \mathcal{Q}$-val jelölve a $p_h q_k$ számokból álló eloszlást ($h = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$)

$$F_{\mathcal{P} * \mathcal{Q}}(x) = \sum_{\log_2 \frac{1}{p_h q_k} < x} = \int_0^{\infty} F_{\mathcal{P}}(x-y)\, dF_{\mathcal{Q}}(y).$$

Ilyen módon az a tény, hogy eloszlások direkt szorzatát képezve, a hozzájuk tartozó α-adrendű információmennyiségek összegeződnek, $\alpha = 1$ esetben a várható érték additivitásából, míg $\alpha \neq 1$ esetben abból a jólismert tételből következik, hogy két eloszlás kompozíciójának LAPLACE-transzformáltja egyenlő a két eloszlás LAPLACE-transzformáltjának szorzatával. Végül (17)-ből a LAPLACE-transzformáltakra vonatkozó ismert tétel segítségével az is leolvasható, hogy egy $\mathcal{P}$ valószínűségeloszlás egyértelműen meg van határozva azáltal, ha megadjuk minden $\alpha > 0$-ra az eloszláshoz tartozó α-adrendű információmennyiséget. Ez is mutatja, hogy a különböző rendű információmennyiségek vizsgálata sokkal több felvilágosítást adhat, mintha csak az entrópiát vizsgáljuk.

4. §. Nem teljes eloszlásokhoz tartozó információmennyiség

Az irodalomban eddig csak teljes eloszlásokhoz tartozó információmennyiséggel foglalkoztak, célszerű azonban definiálni egy nem teljes eloszláshoz tartozó információ mennyiségét is. Ha $\mathcal{P}=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ egy nem teljes valószínűségeloszlás, azaz $p_k > 0$, $S=\sum_{k=1}^{n} p_k < 1$, akkor a p_k valószínűségű esemény bekövetkezése esetén $\log_2 \frac{1}{p_k}$ információt nyerünk; a $\mathcal{P}$ nem teljes eloszláshoz tartozó információmennyiség nyilván a $\log_2 \frac{1}{p_k}$ számok középértéke; a súlyozásnál azonban a szóban forgó nem teljes eloszlást a megfelelő $p_k' = \frac{p_k}{S}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ feltételes eloszlással kell helyettesítenünk, hiszen a középértékképzésnek csak tényleges eloszlásra nézve van értelme (a súlyok összege 1 kell hogy legyen). Így tehát a szóban forgó nem teljes eloszláshoz tartozó α-adrendű információmértéket, $I_\alpha(\mathcal{P})$-t úgy kapjuk (14)-ből, hogy abba I_k helyébe a $\log_2 \frac{1}{p_k}$ értéket, p_k helyébe a $p_k' = \frac{p_k}{S}$ értéket helyettesítjük, és így

$$I_\alpha(\mathcal{P}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \right), \tag{18}$$

míg az $\alpha = 1$ esetben

$$I_1(\mathcal{P}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 \frac{1}{p_k}}{\sum_{k=1}^{n} p_k}. \tag{19}$$

Ha $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, akkor (18)-ból, ill. (19)-ből speciális esetként visszakapjuk a (12), ill. (13) képleteket; ha viszont a szóban forgó nem teljes eloszlás egyetlen egy p valószínűségből áll, akkor (18)-ból, ill. (19)-ből minden $\alpha > 0$-ra ($\alpha = 1$-et is beleértve)

$$I_\alpha(p) = \log_2 \frac{1}{p} \qquad (\alpha > 0), \tag{20}$$

vagyis az (5) képletet kapjuk vissza.

(18)-ból nyilvánvaló, hogy ha a $\mathcal{P}$ eloszlás nem teljes, $\sum_{k=1}^{n} p_k = S < 1$, és $\mathcal{P}'$-vel jelöljük a $p_k' = \frac{p_k}{S}$ valószínűség által alkotott teljes eloszlást, akkor

$$I_\alpha(\mathcal{P}) = I_\alpha(\mathcal{P}') + \log_2 \frac{1}{S} \geqq I_\alpha(\mathcal{P}'),$$

azaz egy nem teljes eloszláshoz tartozó α-adrendű információ egyenlő az eloszlás normálásával nyert teljes eloszlás információja és a nem teljes rendszer összvalószínűségének megfelelő információ összegével.

5. §. Információ és bizonytalanság

Az információ fogalmával kapcsolatban célszerű egy másik, rokon fogalmat is bevezetni: a bizonytalanság fogalmát. Egy véletlentől függő kimenetelű kísérlet eredménye több-kevesebb mértékben bizonytalan. A kísérlet elvégzésével ez a bizonytalanság megszűnik; a kísérlet eredményére vonatkozó, eredetileg fennálló bizonytalanságot mérhetjük azzal az információmennyiséggel, amit a kísérlet elvégzésével (átlagban) nyerünk. A bizonytalanságot tehát felfoghatjuk, mint információhiányt *(a bizonytalanság: negatív információ)*, vagy megfordítva: az információt értelmezhetjük, mint a bizonytalanság megszűnését, ill. csökkenését *(az információ: negatív bizonytalanság)*. Az „információ" és „bizonytalanság" fogalmak tehát egymással hasonló viszonyban állnak, mint a bevétel és a kiadás, vagy pl. a felmelegedés és a lehülés.

A két fogalom viszonyát a következő példa világítja meg: Ha egy A esemény valószínűsége eredetileg p-vel volt egyenlő, de a B esemény megfigyelése után q-ra változott (azaz $\mathbf{P}(A) = p$ és $\mathbf{P}(A/B) = q$), akkor $\log_2 \frac{1}{p} - \log_2 \frac{1}{q}$ információt nyertünk (vagy vesztettünk) a B esemény megfigyelése folytán az A eseményre nézve; ugyanis eredetileg $\log_2 \frac{1}{p}$ információt nyújtott volna az A esemény bekövetkezése; B megfigyelése után ugyanez az esemény $\log_2 \frac{1}{q}$ információt nyujt már, tehát a B esemény megfigyelésekor $\log_2 \frac{1}{p} - \log_2 \frac{1}{q} = \log_2 \frac{q}{p}$ információt kaptunk A-ra nézve. Ugyanez más szavakkal, de egyszerűbben fejezhető ki a bizonytalanság fogalma segítségével: az A esemény bizonytalansága eredetileg $\log_2 \frac{1}{p}$ volt, ez a bizonytalanság a B esemény megfigyelése folytán $\log_2 \frac{1}{q}$-ra változott; a bizonytalanság $\log_2 \frac{1}{p} - \log_2 \frac{1}{q}$ „csökkenése" egyenlő a B esemény megfigyelése útján A-ra nézve nyert információval, (illetve a bizonytalanság növekedése egyenlő az információveszteséggel).* Vegyük észre, hogy

$$\log_2 \frac{1}{p} - \log_2 \frac{1}{q} = \log_2 \frac{\mathbf{P}(A/B)}{\mathbf{P}(A)} = \log_2 \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} = \log_2 \frac{\mathbf{P}(B/A)}{\mathbf{P}(B)},$$

tehát a B esemény bekövetkezése ugyanannyi információt nyújt az A eseményre vonatkozólag, mint A bekövetkezése B-re vonatkozólag; ez az információ csak az A és B események közötti sztochasztikus kapcsolat erősségétől függ, és nyilvánvalóan akkor és csak akkor zérus, ha $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(A)$, vagyis ha az A és B események függetlenek egymástól.

6. §. Az információnyereség

Az előző §-ban tárgyalt példa további vizsgálata egy nagyon fontos fogalomhoz, az *információnyereség* fogalmához fog minket elvezetni [14]. Ugyanakkor el fogunk jutni a SHANNON-féle entrópia (1-rendű információ) azon tulajdonságának felismeréséhez, amely azt kitünteti az összes α-adrendű ($\alpha > 0$) információmennyiségek közül. Egy $\mathcal{K}$ kísérlet lehetséges kimenetelei legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események, amelyek (a priori) valószínűségei a $p_k = \mathbf{P}(A_k)$ számok ($k = 1, 2, \ldots, n$); Megfigyeltük egy B esemény bekövetkezését, amely kapcsolatban áll a $\mathcal{K}$ kísérlettel; úgy azon feltétel mellett, hogy B bekövetkezett, az A_k események feltételes (a posteriori) valószínűségei eltérnek ezek eredeti(a priori) valószínűségeitől, mégpedig $\mathbf{P}(A_k|B) = q_k$. Kérdés: menynyi információt nyertünk a B esemény megfigyelése által a $\mathcal{K}$ kísérlet várható kimenetelére nézve? Az A_k esemény bizonytalansága, mint láttuk, $\log_2 \frac{1}{p_k}$-ról $\log_2 \frac{1}{q_k}$-ra változott; mivel $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} q_k = 1$, tehát, ha a $\mathcal{P} = \{p_k\}$ és $\mathcal{Q} = \{q_k\}$ eloszlások nem azonosak, kell hogy legyen olyan A_k esemény, amelyre $p_k > q_k$

* Nem érdektelen rámutatni e képlet jelentőségére a heurisztikában (lásd [13]); ha egy A hipotézis valószínűsége p és elvégzünk egy kísérletet, amelynek B eredménye mint feltétel mellett A valószínűsége q, akkor az A hipotézis helyességére nézve $\log_2 \frac{q}{p}$ információt nyertünk.

— amelyre tehát a bizonytalanság csökkent — és olyan is, amelyre $p_k < q_k$, tehát amelyre a bizonytalanság megnőtt; a bizonytalanság „csökkenése" vagyis az információnyereség, tehát $\log_1 \frac{q_k}{p_k}$ egyes k értékekre pozitív, másokra negatív; (más szóval a bizonytalanság növekedése, vagyis $\log_2 \frac{p_k}{q_k}$, egyes k értékekre negatív, másokra pozitív.) A teljes $\mathfrak{K}$ kísérletre vonatkozó információnyereséget mármost kétféleképpen számíthatjuk ki: vagy az információ növekedés átlagát számítjuk ki, vagy a bizonytalanság növekedés átlagát számítjuk ki, és ennek vesszük a (—1)-szeresét.

Ha az entrópiával (1-rendű információval) számolunk, mindkét számítás ugyanarra az eredményre vezet, ha az A_k eseményre vonatkozó információ növekedést, ill. bizonytalanság növekedést az A_k esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségével, azaz q_k-val súlyozzuk; nyilván ez a logikus eljárás, hiszen az egész számítás azon a feltevésen alapszik, hogy a B esemény bekövetkezett, tehát $q_k = \mathbf{P}(A_k/B)$ az A_k esemény *tényleges* valószínűségi súlya. A szóban forgó információnyereség nyilván csak a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ eloszlásoktól függ, ezért azt $I_1(\mathcal{Q}\|\mathcal{P})$-vel jelöljük. Azt kapjuk, hogy

$$I_1(\mathcal{Q}\|\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} q_k \log_2 \frac{q_k}{p_k}. \tag{21}$$

Az $I_1(\mathcal{Q}\|\mathcal{P})$ *mennyiséget a B esemény megfigyelése által kapott, a $\mathfrak{K}$ kísérletre vonatkozó* SHANNON-*féle információnyereség*nek vagy *a $\mathcal{P}$ eloszlás*nak *a $\mathcal{Q}$ eloszlással való helyettesítésénél fellépő* 1-*rendű* (vagy SHANNON-féle) *információnyereség*nek nevezzük. Ha azonban α-adrendű információ- illetve bizonytalanság mennyiséggel számolunk, ($\alpha \neq 1$) a kétféle számítási eljárás különböző eredményre vezet.

Az első számítási eljárás az

$$\bar{I}_\alpha(\mathcal{Q}\|\mathcal{P}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{q_k^{2-\alpha}}{p_k^{1-\alpha}} \right) \tag{22a}$$

képletet adja, ami $\alpha \geqq 2$ esetben ugyanolyan nehézségekre vezet, mint $I_\alpha(P)$ használata az $\alpha \leqq 0$ esetben, hiszen pl. $\alpha = 2$ esetben a (22a) mennyiség azonosan 0. A második eljárás ezzel szemben a következő eredményre vezet:*

$$I_\alpha(\mathcal{Q}\|\mathcal{P}) = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{q_k^{\alpha}}{p_k^{\alpha-1}} \right). \tag{22b}$$

* Vegyük észre, hogy $\bar{I}_\alpha(\mathcal{Q}\|\mathcal{P}) = I_{2-\alpha}(\mathcal{Q}\|\mathcal{P})$. Ha tehát a $2-\alpha$-adrendű információmértékből indulunk ki és a bizonytalanság csökkenést vizsgáljuk, ugyanarra az eredményre jutunk, mintha az α-adrendű információmértéket használjuk és az információnyereséget tekintjük.

A (22b) alatti mennyiséget a B esemény által a $\mathcal{K}$ kísérlet kimenetelére nézve nyújtott (vagy pedig a $\mathcal{P}$ eloszlásnak a $\mathcal{Q}$ eloszlással való helyettesítésénél fellépő) α-adrendű információnyereségnek nevezzük. Ez a mennyiség bármely két $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ ugyanannyi tagú eloszlásra értelmezhető.

A JENSEN-féle egyenlőtlenséget a konkáv $\log_2 x$ függvényre, ill. az x^α függvényre alkalmazva, amely $\alpha > 1$-re konvex és $0 < \alpha < 1$-re konkáv, következik (21)-ből ill. (22b)-ből, hogy $I_1(\mathcal{Q}\|\mathcal{P}) \geqq 0$ ill. $I_\alpha(\mathcal{Q}\|\mathcal{P}) \geqq 0$ és a szóban forgó információmennyiségek mindegyike akkor és csak akkor lesz egyenlő 0-val, ha $p_k \equiv q_k$, amikor tehát a B esemény megfigyelése nem változtatja meg az A_k események valószínűségeit, tehát valóban nem nyújt semmi információt. *A B esemény megfigyelése által a $\mathcal{K}$ kísérlet kimenetelére vonatkozó információnyereség, ill. α-adrendű információnyereség tehát mindig nem negatív és csak akkor 0, ha a $\mathcal{K}$ kísérlet és a B esemény függetlenek.*

Az információelméletben szoktak foglalkozni a

$$J_1(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = I_1(\mathcal{Q}\|\mathcal{P}) + I_1(\mathcal{P}\|\mathcal{Q}) = \sum_{k=1}^{n} (p_k - q_k) \log_2 \frac{p_k}{q_k}$$

szimmetrikus mennyiséggel is, az ún. JEFFREYS-féle invarianciával, vagy J-divergenciával (l. [15]). Az ennek megfelelő α-adrendű kifejezés

$$J_\alpha(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = I_\alpha(\mathcal{Q}\|\mathcal{P}) + I_\alpha(\mathcal{P}\|\mathcal{Q}) = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(p_h q_k)^\alpha}{p_k^{\alpha-1} q_h^{\alpha-1}}$$

felfogható, mint a $\mathcal{P} * \mathcal{Q} = \{p_h q_k\}$ eloszlásnak a $\overline{\mathcal{P} * \mathcal{Q}} = \{q_h p_k\}$ transzponált eloszlással való helyettesítésénél fellépő információnyereség. A megfelelő interpretáció az $\alpha = 1$ esetben G. BARNARD-tól származik [16], aki észrevette, hogy $J_1(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ a

$$J_1(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_h q_k \log_2 \frac{p_h q_k}{q_h p_k}$$

alakban is felírható. $J_\alpha(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ felfogható a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ eloszlások különbözősége mérőszámának. (Távolságnak azonban nem tekinthető, mert a háromszög-egyenlőtlenségnek nem tesz eleget.)

Érdemes megjegyezni, hogy a közönséges információ kifejezhető az információnyereséggel. Az $I_1(\mathcal{P})$ vagyis a SHANNON-féle információ esetében ez jól ismeretes. Arról van szó, hogy ha $\mathcal{P}_n = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ egy tetszőleges véges diszkrét valószínűségeloszlás, és $\mathcal{E}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ az n-elemű egyenletes eloszlás, akkor

$$I_1(\mathcal{P}_n\|\mathcal{E}_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 n p_k = \log_2 n - I_1(\mathcal{P}_n) = I_1(\mathcal{E}_n) - I_1(\mathcal{P}_n),$$

vagyis az az információnyereség, amit akkor kapunk, amikor a (maximális bizonytalanságú) $\mathcal{E}_n$ egyenletes eloszlást a $\mathcal{P}_n$ eloszlással helyettesítjük, egyenlő azzal a bizonytalanság csökkenéssel, amelyet az $\mathcal{E}_n$ eloszlás $\mathcal{P}_n$-nel való helyettesítése jelent. Ez a reláció változatlanul érvényes az α-adrendű információmennyiségekre vonatkozólag is, ugyanis

$$I_\alpha(\mathcal{P}_n \| \mathcal{E}_n) = \frac{1}{\alpha-1} \log_2 n^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha = I_\alpha(\mathcal{E}_n) - I_\alpha(\mathcal{P}_n).$$

7. §. A Shannon-féle információmennyiség egy jellemző tulajdonsága

A mondottakból nyilvánvaló, hogy melyik az a legegyszerűbb tulajdonsága a SHANNON-féle információmennyiségnek, amely azt, az összes α-rendű információmennyiségekkel szemben kitünteti: az t. i., hogy ha $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ egy tetszőleges valószínűségeloszlás, $\mathcal{J} = [I_1, I_2, \ldots, I_n)$ és

$$-\mathcal{J} = (-I_1, -I_2, \ldots, -I_n),$$

akkor

(23a) $$I_1(\mathcal{P}, \mathcal{J}) + I_1(\mathcal{P}, -\mathcal{J}) = 0,$$

míg, ha $\alpha \neq 1$,

(23b) $$I_\alpha(\mathcal{P}, \mathcal{J}) + I_\alpha(\mathcal{P}, -\mathcal{J}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2\left(\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_h p_k \cos h\big((1-\alpha) \log_2 (I_h - I_k)\big)\right)$$

és így, figyelembe véve, hogy $\cos hx \geqq 1$, $I_\alpha(\mathcal{P}, \mathcal{J}) + I_\alpha(\mathcal{P}, -\mathcal{J}) > 0$, vagy < 0 aszerint, hogy $0 < \alpha < 1$, vagy $1 < \alpha < +\infty$, kivéve, ha az I_k számok mind egyenlők, amikor persze $I_\alpha(\mathcal{P}, \mathcal{J}) + I_\alpha(\mathcal{P}, -\mathcal{J}) = 0$. Más szóval a SHANNON-féle entrópiát az tünteti ki az α-adrendű információmennyiségek családjában, hogy csak erre igaz, hogy *az átlagos információveszteség és az átlagos információnyereség algebrai összege mindig* 0.

Ilyen módon tehát, ha még figyelembe vesszük azt is, hogy mely tulajdonságaival lehet az általános (kvázilineáris) középértékeket jellemezni (lásd [5] 215. tétel), a SHANNON-féle információmennyiség következő jellemzését nyerjük.

TÉTEL. *Legyen $\mathcal{A}$ egy tetszőleges kísérlet, amelynek lehetséges eredményei az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események. Tegyük fel, hogy az A_k esemény bekövetkezése I_k információnyereséget nyújt* ($k = 1, 2, \ldots, n$). *Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, amelynek értéke A_k bekövetkezése esetén I_k-val egyenlő, és jelölje $F(x)$ a ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Tegyük fel, hogy minden ilyen ξ véletlen információhoz hozzá van rendelve egy $I(\xi)$ szám — az $\mathcal{A}$ kísérlet által nyújtott átlagos információmennyiség — amelyre teljesülnek a következő posztulátumok:*

1. *Ha* ξ *és* η *függetlenek, akkor* $I(\xi+\eta)=I(\xi)+I(\eta)$;

2. *Ha* ξ *állandó, azaz* $\mathbf{P}(\xi=x)=1$, *akkor* $I(\xi)=x$;

3. *Ha* ξ_1 *eloszlásfüggvénye* $F_1(x)$, ξ_2 *eloszlásfüggvénye* $F_2(x)$ *és* x *minden értékére* $F_1(x)\leqq F_2(x)$, *akkor* $I(\xi_2)\geqq I(\xi_1)$; *egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha* $F_1(x)\equiv F_2(x)$.

MEGJEGYZÉS. A 3. *posztulátum szerint* $I(\xi)$ *csak a* ξ *véletlen információ* $F(x)$ *eloszlásfüggvényétől függ, tehát használhatjuk az* $I(\xi)=I[F(x)]$ *jelölést is.*

4. *Ha* $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$ *eloszlásfüggvények és* $0<t<1$, *továbbá* $I[F_2(x)]=I[F_3(x)]$, *akkor*

$$I[tF_1(x)+(1-t)F_2(x)]=I[tF_1(x)+(1-t)F_3(x)].$$

Akkor $I(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)$ *vagy* $I(\xi)=\frac{1}{1-\alpha}\log_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2^{(1-\alpha)x}dF(x)$, *ahol* $\alpha\neq 1$. *Ha még a következő posztulátum is teljesül:*

5. $I(\xi)+I(-\xi)=0$,

akkor

$$I(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x).$$

BIZONYÍTÁS. A 2., 3. és 4. posztulátumokból egy KOLMOGOROVtól, NAGUMOtól és DE FINETTItől származó tétel szerint (lásd [5], 215. tétel) következik, hogy $I(\xi)=\varphi^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dF(x)\right)$, ahol $\varphi(x)$ szigorúan monoton és folytonos; az 1. posztulátumból a középértékek elméletének egy másik ismert tétele ([5] 84. tétel) szerint következik, hogy $\varphi(x)$ vagy lineáris vagy exponenciális függvény, míg az 5. posztulátum az exponenciális függvényeket kizárja.

8. §. A feltételes információ

Legyenek ξ és η valószínűségi változók. Jelöljék $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ξ lehetséges értékeit, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ η lehetséges értékeit; jelölje A_h a $\xi=x_h$ eseményt, és B_k az $\eta=y_k$ eseményt, $\mathcal{A}$ az $\{A_h\}$ és $\mathcal{B}$ a $\{B_k\}$ eseményrendszert (illetve azt a kísérletet, amelynek lehetséges kimenetelei az A_h, ill. B_k események). Legyen

$$\mathbf{P}(A_h)=p_h,\quad \mathbf{P}(B_k)=q_k,\quad \mathbf{P}(A_hB_k)=r_{hk},\quad \mathbf{P}(A_h|B_k)=p_{h|k}$$

és

$$\mathbf{P}(B_k|A_h)=q_{k|h}\qquad (h=1,2,\ldots,m;\quad k=1,2,\ldots,n),$$

akkor tehát $r_{hk}=p_{h|k}q_k=q_{k|h}p_h$. Azon feltevés mellett, hogy a B_k esemény bekövetkezett, a ξ változó megfigyelése (ill. az $\mathcal{A}$ kísérlet elvégzése) esetén nyert α-adrendű információ:

$$I_\alpha(\xi \mid \eta = y_k) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{h=1}^{m} p_{h|k}^{\alpha} \right).$$

Tehát azon feltevés mellett, hogy az η változó értékét ismerjük, a ξ értékéből nyert α-adrendű információ $I_\alpha(\xi \mid \eta = y_k)$-val egyenlő, ha η éppen az y_k értéket veszi fel. Ennélfogva azon feltevés mellett, hogy η értékét ismerjük, ξ értékéből (átlagban) nyert *feltételes α-adrendű információ*, amelyet $I_\alpha(\xi \mid \eta)$-val fogunk jelölni,

$$(24) \quad I_\alpha(\xi \mid \eta) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} q_k 2^{(1-\alpha) I_\alpha(\xi \mid \eta = y_k)} \right) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{h=1}^{m} r_{hk}^{\alpha}}{q_k^{\alpha-1}} \right).$$

Az $\alpha = 1$ esetben $I_1(\xi \mid \eta = y_k) = \sum_{h=1}^{m} p_{h|k} \log_2 \frac{1}{p_{h|k}}$, és így a ξ értékéből nyerhető (átlagos) feltételes SHANNON-féle információ azon feltevés mellett, hogy η értéke ismeretes,

$$(25) \quad I_1(\xi \mid \eta) = \sum_{k=1}^{n} q_k I_1(\xi \mid \eta = y_k) = \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} r_{hk} \log_2 \frac{q_k}{r_{hk}}.$$

Világos, hogy minden α-ra

$$(26) \quad 0 \leqq I_\alpha(\xi \mid \eta) \leqq I_\alpha(\xi),$$

és $I_\alpha(\xi \mid \eta) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\xi = g(\eta)$ (azaz, ha η értéke ξ értékét egyértelműen meghatározza és így η adott értéke mellett ξ értéke már semmi új információt sem nyújt). Ugyanis $I_\alpha(\xi \mid \eta = y_k) \geqq 0$, és így $I_\alpha(\xi \mid \eta) \geqq 0$ és $I_\alpha(\xi \mid \eta) = 0$ csak akkor áll fenn, ha minden k-ra $I_\alpha(\xi \mid \eta = y_k) = 0$; ez utóbbi viszont csak úgy lehetséges, ha minden k-ra van olyan $h(k)$, hogy $p_{h(k)|k} = 1$ és $p_{h|k} = 0$, ha $h \neq h(k)$. Másrészt $I_\alpha(\xi \mid \eta) = I_\alpha(\xi)$ akkor és csak akkor áll fenn, ha ξ és η függetlenek (azaz, ha η értékének ismerete semmi befolyással sincs ξ eloszlására). Ugyanis

$$(27) \quad I_\alpha(\xi) - I_\alpha(\xi \mid \eta) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \frac{\sum_{h=1}^{m} p_h^{\alpha}}{\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{r_{hk}^{\alpha}}{q_k^{\alpha-1}}},$$

és a JENSEN-egyenlőtlenség szerint, ha $\alpha > 1$

$$p_h^{\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{n} q_k \frac{r_{hk}}{q_k} \right)^{\alpha} \leqq \sum_{k=1}^{n} q_k \left(\frac{r_{hk}}{q_k} \right)^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_{hk}^{\alpha}}{q_k^{\alpha-1}},$$

míg ha $\alpha < 1$, úgy az ellenkező irányú egyenlőtlenség érvényes és egyenlőség mindkét esetben csak akkor áll fenn, ha $p_{h|k}$ nem függ k-tól, amiből állításunk már következik.

9. §. Egy valószínűségi változó által egy másikra vonatkozólag nyújtott relatív információ

Az információelméletben definiálni szokták azt az információmennyiséget, amelyet egy η valószínűségi változó megfigyelése egy másik, vele kapcsolatban álló ξ valószínűségi változóra nézve nyújt. Ez a mennyiség — amelyet relatív információnak fogunk nevezni — az információ zajos csatornán keresztül való (azaz véletlenszerű torzításokkal járó) továbbításánál játszik alapvető szerepet, amikor ξ a leadott, és η a felvett (torzított) jel.

Ezt a mennyiséget az információelméletben a SHANNON-féle információdefiníció alapján a következőképpen szokták értelmezni: ha ξ lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots, x_m$, η lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots, y_n$, továbbá $\mathbf{P}(\xi = x_h) = p_h$, $\mathbf{P}(\eta = y_k) = q_k$, $\mathbf{P}(\xi = x_h, \eta = y_k) = r_{hk}$, $p_{h|k} = \frac{r_{hk}}{q_k}$ és $q_{k|h} = \frac{r_{hk}}{p_h}$, akkor a szóban forgó mennyiségnek, amelyet $I_1(\xi, \eta)$-val jelölünk, a szokásos definíciója

$$I_1(\xi, \eta) = \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} r_{hk} \log_2 \frac{r_{hk}}{p_h q_k}. \tag{28}$$

(28)-ból látható, hogy $I_1(\xi, \eta) = I_1(\eta, \xi)$, azaz ξ *ugyanannyi információt nyújt* η*-ra nézve, mint* η ξ*-re nézve;* (28)-ból az is következik, hogy $I_1(\xi, \eta)$ a következő alakban is felírható:

$$I_1(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{n} q_k \left(\sum_{h=1}^{m} p_{h|k} \log_2 \frac{p_{h|k}}{p_h} \right) = \sum_{k=1}^{n} q_k I_1(\mathcal{P}_k \| \mathcal{P}), \tag{29}$$

ahol $\mathcal{P}$ ξ eloszlását és $\mathcal{P}_k$ ξ-nek az $\eta = y_k$ feltétel melletti feltételes eloszlását jelenti, vagyis $I_1(\mathcal{P}_k \| \mathcal{P})$ az $\eta = y_k$ esemény megfigyeléséből ξ-re vonatkozó ((21) alapján számított) információnyereség. Ennek alapján kézenfekvő az η változó megfigyelése által a ξ változóra vonatkozólag nyújtott α-adrendű relatív információ mennyiségét a következőképpen definiálni:

$$I_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} q_k 2^{(1-\alpha) I_\alpha(\mathcal{P}_k \| \mathcal{P})} \right), \tag{30a}$$

amiből

$$I_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\sum_{h=1}^{m} \frac{p_{h|k}^{\alpha}}{p_h^{\alpha-1}}} \right). \tag{30b}$$

Természetesen az $\alpha \to 1$ határesetben $I_\alpha(\xi, \eta)$ átmegy $I_1(\xi, \eta)$-ba. $I_\alpha(\xi, \eta)$-ra vonatkozólag fennáll (ugyanúgy, mint az $\alpha = 1$ esetben), hogy

$$0 \leq I_\alpha(\xi, \eta) \leq I_\alpha(\xi), \tag{31}$$

mégpedig $I_\alpha(\xi, \eta) = 0$ akkor és csak akkor, ha ξ és η függetlenek és $I_\alpha(\xi, \eta) =$

$=I_\alpha(\xi)$ akkor és csak akkor, ha $\xi=g(\eta)$ azaz η értéke ξ értékét (1 valószínűséggel) egyértelműen meghatározza.

A (31) alatti első egyenlőtlenség $I_\alpha(\mathcal{P}_k\|\mathcal{P})$ nemnegativitásából következik; a második a következőképpen látható be: mivel $r_{hk}\leqq p_h$, tehát ha $\alpha>1$, akkor

$$\sum_{h=1}^{m}\frac{p_{h|k}^{\alpha}}{p_h^{\alpha-1}}=\sum_{h=1}^{m}\frac{r_{hk}^{\alpha}}{q_k^{\alpha}p_h^{\alpha-1}}\leqq\sum_{h=1}^{m}\frac{r_{hk}}{q_k^{\alpha}}=\frac{1}{q_k^{\alpha-1}}$$

és így

$$\frac{q_k}{\sum_{h=1}^{m}\frac{p_{h|k}^{\alpha}}{p_h^{\alpha-1}}}\geqq q_k^{\alpha},$$

míg $\alpha<1$ esetében a fordított egyenlőtlenség áll fenn, és nyilván $I_\alpha(\xi,\eta)=$ $=I_\alpha(\xi)$ csak akkor állhat fenn, ha $r_{hk}=p_h$, hacsak $r_{hk}\neq 0$, ami viszont csak úgy lehetséges, hogy minden k-ra van egy olyan $h(k)$, hogy $r_{h(k),k}=p_k$ és ha $h\neq h(k)$, akkor $r_{hk}=0$, másszóval, ha $\eta=y_k$-ból következik $\xi=x_{h(k)}$, azaz $\xi=g(\eta)$. Érdekes megjegyezni, hogy ellentétben az $\alpha=1$ esettel, ha $\alpha\neq 1$, általában $I_\alpha(\xi,\eta)\neq I_\alpha(\eta,\xi)$, tehát *$\eta$ értéke nem ugyanakkora α-adrendű információt nyújt ξ-re nézve, mint ξ értéke η-ra nézve, ha $\alpha\neq 1$.*

Az $\alpha=1$ esetben az $I_1(\xi,\eta)$ relatív információ másképpen is értelmezhető, mégpedig fennáll az

$$I_1(\xi,\eta)=I_1(\xi)-I_1(\xi|\eta) \tag{32}$$

reláció, azaz az η értékében foglalt, ξ-re vonatkozó információt megkapjuk, ha a ξ értékére vonatkozó bizonytalanságból levonjuk az η értékének megadása után ξ-re vonatkozólag megmaradó bizonytalanságot. Ebből kiindulva analóg módon értelmezhetjük az

$$I_\alpha^*(\xi,\eta)=I_\alpha(\xi)-I_\alpha(\xi|\eta)=\frac{1}{1-\alpha}\log_2\left[\frac{\sum_{h=1}^{m}p_h^{\alpha}}{\sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{r_{hk}^{\alpha}}{q_k^{\alpha-1}}\right)}\right] \tag{33}$$

mennyiséget, amellyel az előző §-ban már foglalkoztunk (lásd (27)). Az $I_\alpha^*(\xi,\eta)$ mennyiséget, amely ($\alpha\neq 1$ esetben) általában különbözik $I_\alpha(\xi,\eta)$-tól, úgy interpretálhatjuk, mint az η értékének megadása által ξ értékére vonatkozó bizonytalanság csökkenését; ez tehát az $\alpha=1$ esettől eltérően nem egyenlő a ξ-re vonatkozó relatív információval.

Ugyanúgy, ahogy (az $\alpha=1$ esettől eltérőleg) $I_\alpha(\eta,\xi)\neq I_\alpha(\xi,\eta)$, általában $I_\alpha^*(\xi,\eta)\neq I_\alpha^*(\eta,\xi)$, tehát az η megadása által ξ-re vonatkozó bizonytalanság csökkenése általában nem egyenlő a η-ra vonatkozó bizonytalanság ξ értékének megadása által való csökkenésével. Az $I_\alpha(\xi,\eta)$, $I_\alpha(\eta,\xi)$, $I_\alpha^*(\xi,\eta)$, $I_\alpha^*(\eta,\xi)$ mennyiségek mind a ξ és η közötti sztochasztikus kapcsolat erősségétől függnek, és csak abban az esetben egyenlők 0-val, ha ξ és η függetlenek.

10. §. További összefüggések az α-adrendű információmennyiségre vonatkozólag

Az $\alpha=1$ esetben az információ additivitására vonatkozó tétel kiterjeszthető nem-független valószínűségi változókra is, mégpedig a következőképpen: ha ξ és η tetszőleges valószínűségi változók, akkor ξ és η együttes eloszlásának entrópiája egyenlő η entrópiájának és ξ adott η érték melletti átlagos feltételes entrópiájának az összegével. Ugyanis

$$\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} r_{hk}\log_2\frac{1}{r_{hk}}=\sum_{k=1}^{n} q_k\log_2\frac{1}{q_k}+\sum_{k=1}^{n} q_k\left(\sum_{h=1}^{m} p_{h|k}\log_2\frac{1}{p_{h|k}}\right),$$

ahol $p_{h|k}=\frac{r_{hk}}{q_k}$ a $\xi=x_h$ esemény feltételes valószínűsége az $\eta=y_k$ feltétel mellett. Tehát, ha $I_1((\xi,\eta))$ jelöli ξ és η együttes eloszlásának entrópiáját, akkor

(34) $$I_1((\xi,\eta))=I_1(\eta)+I_1(\xi|\eta).$$

Vizsgáljuk meg, hogyan általánosítható (34) az $\alpha\neq1$ esetre. $I_\alpha((\xi,\eta))$-val jelölve a ξ és η együttes eloszlásához tartozó α-adrendű információ mennyiséget,

(35) $$I_\alpha((\xi,\eta))-I_\alpha(\eta)=\frac{1}{1-\alpha}\log_2\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k^\alpha\left(\sum_{h=1}^{m} p_{h|k}^\alpha\right)}{\sum_{k=1}^{n} q_k^\alpha},$$

tehát, bevezetve a

(36) $$\varrho_k=\frac{q_k^\alpha}{\sum_{k=1}^{n} q_k^\alpha}$$

jelölést (vegyük észre, hogy $\alpha=1$ esetben $\varrho_k=q_k$),

(37) $$I_\alpha((\xi,\eta))=I_\alpha(\eta)+\frac{1}{1-\alpha}\log_2\left(\sum_{k=1}^{n}\varrho_k\cdot 2^{(1-\alpha)I_\alpha(\xi|\eta=y_k)}\right),$$

tehát ξ és η együttes eloszlásában foglalt α-adrendű információmennyiség egyenlő az η eloszlásban foglalt α-adrendű információ és ξ-nek az $\eta=y_k$ feltétel melletti feltételes eloszlásában foglalt α-adrendű információja a (36) alatti ϱ_k súlyokkal vett megfelelő középértékének összegével.

Tehát $\alpha\neq1$ esetében az $I_\alpha(\xi|\eta=y_k)$ információkat nem a q_k, hanem a ϱ_k súlyokkal kell súlyozni! A SHANNON-féle információ esetében az $I_1(\xi,\eta)$ mennyiség (az η értékében foglalt ξ-ra vonatkozó relatív információ) nemcsak (29)-cel vagy (32)-vel értelmezhető, hanem értelmezhető a következőképpen is:

(38) $$I_1(\xi,\eta)=I_1(\xi)+I_1(\eta)-I_1((\xi,\eta))$$

(38) nyilvánvalóan következik (32) és (34) összehasonlításából. A (38) relációval analóg módon, tekintetbe véve (35)-öt, képezhetjük az

(39) $$\tilde{I}_\alpha(\xi, \eta) = I_\alpha(\xi) + I_\alpha(\eta) - I_\alpha((\xi, \eta))$$

mennyiséget. Egyszerű számolással adódik, hogy

(40) $$\tilde{I}_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \frac{\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (p_h q_k)^\alpha}{\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} r_{hk}^\alpha}.$$

A (40) mennyiség természetesen szimmetrikus ξ-ben és η-bán, azaz $\tilde{I}_\alpha(\xi, \eta) = \tilde{I}_\alpha(\eta, \xi)$. Az $\alpha = 1$ határesetben $\tilde{I}_\alpha(\xi, \eta)$ is átmegy $I_1(\xi, \eta)$-ba.

Azonban, míg az $\alpha = 1$ esetben mindig fennáll a

(41) $$I_1(\xi) + I_1(\eta) \geqq I_1((\xi, \eta))$$

egyenlőtlenség, az $\alpha \neq 1$ esetben nem mindig teljesül, hogy $I_\alpha(\xi) + I_\alpha(\eta) \geqq I_\alpha((\xi, \eta))$, vagyis a (40) alatt álló kifejezés negatív is lehet. Ezért nem tekinthető (40) a ξ és η változók által egymásra vonatkozólag nyújtott relatív információmennyiség adekvát mértékének.

A (41) egyenlőtlenségnek a következő gyenge általánosítása lehetséges, amely minden $\alpha > 0$-ra érvényes:

(41b) $$I_\alpha((\xi, \eta)) \leqq I_\alpha(\xi) + \log_2 n.$$

Másszóval $I_\alpha((\xi, \eta)) \leqq I_\alpha(\xi) + I_\alpha(\eta)$ fennáll, ha $I_\alpha(\eta) = \log_2 n$. Ez a HÖLDER-féle egyenlőtlenségből könnyen következik, ugyanis, ha $\alpha > 1$, akkor

$$p_h^\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} r_{hk}\right)^\alpha \leqq n^{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{n} r_{hk}^\alpha\right),$$

tehát

$$\sum_{h=1}^{m} p_h^\alpha \leqq n^{\alpha-1} \left(\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} r_{hk}^\alpha\right).$$

Ha viszont $\alpha < 1$, akkor ugyancsak a HÖLDER-egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{k=1}^{n} r_{hk}^\alpha \leqq n^{1-\alpha} \left(\sum_{k=1}^{n} r_{hk}\right)^\alpha = n^{1-\alpha} p_h^\alpha,$$

tehát

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} r_{hk}^\alpha \leqq n^{1-\alpha} \left(\sum_{h=1}^{m} p_h^\alpha\right).$$

A (41b) egyenlőtlenség írható a szimmetrikus

(41c) $$I_\alpha((\xi, \eta)) \leqq \frac{1}{2} \left(I_\alpha(\xi) + I_\alpha(\eta) + \log_2 n + \log_2 m\right)$$

alakba is.

Még egy negyedik lehetőség is kínálkozik a ξ és η változók által egymásra vonatkozólag nyújtott α-adrendű relatív információmennyiség mértékének definiálására. A (28) képlet szerint, tekintettel (21)-re, $I_1(\xi, \eta)$ felfogható a ξ és η változók eloszlásai direkt szorzatának a ξ és η változók együttes eloszlásával való helyettesítésénél fellépő információnyereségként is. Ebből a megjegyzésből kiindulva (tekintettel (22)-re), kézenfekvő megvizsgálni az

$$\hat{I}_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \left(\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{r_{hk}^{\alpha}}{p_h^{\alpha-1} q_k^{\alpha-1}} \right) \tag{42}$$

mennyiséget is. Nyilván a (42) információmennyiség is szimmetrikus, és az $\alpha = 1$ határesetben (42) is átmegy $I_1(\xi, \eta)$-ba. Azonban az $\hat{I}_\alpha(\xi, \eta)$ mennyiség sem használható a ξ és η változók által egymásra vonatkozólag nyújtott relatív információ mértékszámaként. Ugyanis, bár abból, hogy az α-adrendű információnyereség mindig nemnegatív, azonnal következik, hogy a (42) alatti kifejezés mindig nemnegatív, azonban nem tesz eleget annak a természetes követelménynek, hogy az η által ξ-re vonatkozólag nyújtott információ ne haladja meg az $I_\alpha(\xi)$ mennyiséget. Ugyanis például $\hat{I}_\alpha(\xi, \xi)$ nem $I_\alpha(\xi)$-vel, hanem $I_{2-\alpha}(\xi)$-vel egyenlő, ha $0 < \alpha < 2$, míg $\alpha = 2$ esetben $\hat{I}_\alpha(\xi, \xi) = \log_2 m$, vagyis általában nagyobb $I_\alpha(\xi)$-nél.

Ezzel szemben, ha a $\mathfrak{P} * \mathfrak{Q} = \{p_h q_k\}$ eloszlásnak az $\mathfrak{R} = \{r_{hk}\}$ eloszlással való helyettesítésénél fellépő információnyereséget az egyébként elvetett (22a) mennyiséggel definiáljuk, azaz az

$$\bar{I}_\alpha(\xi, \eta) = I_{2-\alpha}(\mathfrak{R} \| \mathfrak{P} * \mathfrak{Q}) = \bar{I}_\alpha(\mathfrak{R} \| \mathfrak{P} * \mathfrak{Q}) \tag{43}$$

mennyiséget vizsgáljuk, akkor — legalább is a $0 < \alpha < 2$ esetben* — egy ésszerű mértékszámot nyerünk, amelyre

$$\bar{I}_\alpha(\xi, \eta) = \bar{I}_\alpha(\eta, \xi) \tag{44}$$

és

$$0 \leq \bar{I}_\alpha(\xi, \eta) \leq \min(I_\alpha(\xi), I_\alpha(\eta)). \tag{45}$$

Ebből kiindulva ugyancsak a $0 < \alpha < 2$ esetre szorítkozva, felmerül az a gondolat, hogy (30a)-ban az $I_\alpha(\mathfrak{P}_k \| \mathfrak{P})$ mennyiség helyett az $\bar{I}_\alpha(\mathfrak{P}_k \| \mathfrak{P})$ mennyiséget használjuk fel. Mivel

$$\frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} q_k \left(\sum_{h=1}^{m} \frac{p_{h|k}^{2-\alpha}}{p_h^{1-\alpha}} \right) \right) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} \frac{r_{hk}^{2-\alpha}}{p_h^{1-\alpha} q_k^{1-\alpha}} \right),$$

ez úton újból a $\bar{I}_\alpha(\xi, \eta)$ mennyiségre jutunk.

* Vegyük azonban észre, hogy pl. az $\alpha = 2$ esetben $\bar{I}_\alpha(\xi, \eta) = 0$.

11. §. Abszolút folytonos eloszlások

Röviden vázolni szeretném ezután, hogy hogyan lehet az α-adrendű információmennyiségeket abszolút folytonos eloszlások esetében definiálni. Kézenfekvő azt a tárgyalásmódot alapul venni, amelyet a SHANNON-féle információmennyiségre vonatkozólag követtem [17]. Az egyszerűség kedvéért véges intervallum esetére szorítkozunk. (Az általános eset erre könnyen visszavezethető.) Legyen $f(x)$ egy tetszőleges pozitív sűrűségfüggvény a véges $[a, b]$ intervallumban; — legyen $p_{nk} = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx$. Jelöljük a $\mathfrak{P}_n = \{p_{nk}\}$ diszkrét eloszláshoz tartozó α-adrendű információmennyiséget $I_\alpha(\mathfrak{P}_n)$-nel, akkor tehát

$$I_\alpha(\mathfrak{P}_n) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} p_{nk}^{\alpha} \right). \tag{46}$$

Hasonlóképpen, mint azt az $\alpha = 1$ esetre nézve megmutattam, kimutatható, hogy *ha* $\alpha > 0$ *és az* $\int_a^b f(x)^\alpha dx$ *integrál létezik,* (ez a $0 < \alpha < 1$ esetben mindig teljesül!) *akkor*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(I_\alpha(\mathfrak{P}_n) - \log_2 n \right) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\int_a^b f(x)^\alpha dx \right). \tag{47}$$

A bizonyítás (felhasználva az $\alpha = 1$ esetben általam adott bizonyítás egy CSISZÁR IMRÉtől származó egyszerűsítését) a következőképpen végezhető el: Legyen először $\alpha > 1$. Legyen $p_{nk} = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx$ és $f_n(x) = np_{nk}$, ha $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Akkor, figyelembe véve, hogy ha $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, akkor $f_n(x) = \dfrac{F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$, ha $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$, és hogy $F(x)$ majdnem mindenütt deriválható, és $F'(x) = f(x)$, következik, hogy majdnem minden x-re $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

A FATOU-féle lemmából következik, hogy

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)^\alpha dx \geq \int_a^b f(x)^\alpha dx. \tag{48}$$

Másrészt viszont a JENSEN-féle egyenlőtlenség szerint, ha $\alpha>1$, akkor

$$\int_a^b f_n(x)^\alpha dx \leqq \int_a^b f(x)^\alpha dx. \tag{49}$$

Ilyen módon tehát (48) és (49) szerint az $\alpha>1$ esetben

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)^\alpha dx = \int_a^b f(x)^\alpha dx, \tag{50}$$

amiből ez esetben (47) következik. A $0<\alpha<1$ esetben a bizonyítás módosul. Csak azt az esetet tárgyaljuk, amikor $f(x)$ korlátos. (Az általános eset erre visszavezethető. Ez esetben a LEBESGUE-féle konvergenciatétel szerint

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n^\alpha(x)dx = \int_a^b f^\alpha(x)dx. \tag{51}$$

A (47) jobboldalán álló mennyiséget *az $f(x)$ sűrűségfüggvényű eloszláshoz tartozó α-adrendű információmennyiségnek* nevezzük és $I_\alpha(f(x))$-szel jelöljük. Hasonlóképpen értelmezhető az $f(x)$ pozitív sűrűségfüggvényű abszolút folytonos eloszlásnak az ugyanabban az intervallumban értelmezett $g(x)$ sűrűségfüggvényű abszolút folytonos eloszlással való helyettesítésénél fellépő α-adrendű információnyereség is, amelyet az

$$I_\alpha(g(x)\|f(x)) = \frac{1}{\alpha-1}\log_2 \int_a^b \frac{g(x)^\alpha}{f(x)^{\alpha-1}}dx \tag{52}$$

képlet fejez ki. Ha ugyanis p_{nk} jelentése az előbbi és $q_{nk} = \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)dx$, továbbá a $\{q_{nk}\}$ eloszlást $\mathfrak{Q}_n$-nel jelöljük, akkor, ha az (52) jobboldalán szereplő integrál létezik,

$$\lim_{n\to+\infty} I_\alpha(\mathfrak{Q}_n\|\mathfrak{P}_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1}\log_2\left(\sum_k \frac{q_{nk}^\alpha}{p_{nk}^{\alpha-1}}\right) = I_\alpha(g(x)\|f(x)). \tag{53}$$

Az (53) reláció bizonyításánál az egyszerűség kedvéért újból arra az esetre szorítkozunk, amikor az $f(x)$ és $g(x)$ sűrűségfüggvényű eloszlások az $[a,b]$ véges intervallumban vannak definiálva, és feltesszük, hogy $f(x)>0$, ha $a\leqq x\leqq b$. Az általános eset erre az esetre könnyen visszavezethető. Megjegyzendő azonban, hogy általában az $I_\alpha(\mathfrak{Q}\|\mathfrak{P})$ mennyiség csak abban az esetben van értelmezve, ha $\mathfrak{Q}$ abszolút folytonos $\mathfrak{P}$-re nézve (e feltevést hallgatólagosan már a diszkrét eloszlások esetében is alkalmaztuk); a LEBESGUE-mértékre abszolút folytonos, $g(x)$, ill. $f(x)$ sűrűségfüggvényű $\mathfrak{Q}$, ill. $\mathfrak{P}$ eloszlások esetében ez azt jelenti, hogy feltesszük, hogy azon x-ekre, melyekre $f(x)=0$, fennáll az is, hogy $g(x)=0$.

Legyen újból $p_{nk}=\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$ és $f_n(x)=np_{nk}$ ha $\frac{k}{n}\leqq x<\frac{k+1}{n}$, továbbá legyen $q_{nk}=\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(x)dx$ és $g_n(x)=nq_{nk}$ ha $\frac{k}{n}\leqq x<\frac{k+1}{n}$ $(k=0,\pm 1,\dots)$, és végül $h_n(x)=\frac{g_n(x)}{f_n(x)}$. Akkor

$$I_\alpha(\mathfrak{Q}_n\|\mathfrak{P}_n)=\frac{1}{\alpha-1}\log_2\left(\int\limits_a^b h_n^\alpha(x)f_n(x)\,dx\right). \tag{54}$$

Mármost legyen először $\alpha>1$. A FATOU-lemma szerint, mivel majdnem mindenütt $h_n(x)^\alpha f_n(x)\to\frac{g(x)^\alpha}{f(x)^{\alpha-1}}$,

$$\liminf_{n\to+\infty}\int\limits_a^b h_n(x)^\alpha f_n(x)dx\geqq\int\limits_a^b\frac{g(x)^\alpha}{f(x)^{\alpha-1}}dx. \tag{55}$$

Másrészt a JENSEN-egyenlőtlenség szerint

$$\int\limits_a^b h_n(x)^\alpha f_n(x)dx\leqq\int\limits_a^b\frac{g(x)^\alpha}{f(x)^{\alpha-1}}dx \tag{56}$$

és így (55)-ből és (56)-ból

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^b h_n(x)^\alpha f_n(x)\,dx=\int\limits_a^b\frac{g(x)^\alpha}{f(x)^{\alpha-1}}dx, \tag{57}$$

amivel (53)-at az $\alpha>1$ esetre bebizonyítottuk. A $0<\alpha<1$ eset is hasonlóan intézhető el.

Az abszolút folytonos eloszlásokhoz tartozó α-adrendű információmennyiségeknek hasonló tulajdonságai vannak, mint a megfelelő SHANNON-féle (1-rendű)

$$I_1(f(x))=\int\limits_a^b f(x)\log_2\frac{1}{f(x)}dx \tag{58}$$

információnak, illetve a

$$(59)\qquad I_1(g(x)\|f(x)) = \int\limits_a^b g(x)\log_2\frac{g(x)}{f(x)}\,dx$$

információnyereségnek. Például ugyanúgy, mint az $\alpha = 1$ esetben, $I_\alpha(f(x))$ is felvehet negatív értékeket, ezzel szemben $I_\alpha(g(x)\|f(x))$ mindig nemnegatív.

Nemrégiben JU. V. LINNIK [18] egy új módszert fedezett fel a valószínűségszámítás határeloszlástételeinek bizonyítására, az információelmélet segítségével. Módszerének lényege, hogy azt, hogy az $f_n(x)$ sűrűségfüggvényű eloszlás az $f(x)$ sűrűségfüggvényű eloszláshoz konvergál, azáltal bizonyítja be, hogy kimutatja, hogy $I_1(f_n(x)\|f(x))$ zérushoz tart. A LINNIK-féle módszer egyszerűsítésével és továbbfejlesztésével foglalkozva észrevettem, hogy célszerű az ilyen irányú vizsgálatokban az $I_1(g(x)\|f(x))$ mennyiség helyett az $I_\alpha(g(x)\|f(x))$ mennyiséggel dolgozni, valamely 1-től különböző α-val. (A legcélszerűbbnek az $\alpha = 2$ eset mutatkozott.) Ez a módosítás lehetővé teszi a LINNIK-féle módszer lényeges egyszerűsítését, ugyanakkor megőrizve a módszer lényegét. Érdekes megjegyezni, hogy a LINNIK-féle módszer rávilágított arra, hogy milyen szoros kapcsolat van a valószínűségszámítás centrális határeloszlástétele és a termodinamika második főtétele között. Ezáltal a független változók standardizált összegei eloszlásának a GAUSS-féle (normális) eloszláshoz való konvergenciájának és egy magárahagyott termodinamikai rendszernek a maximális entrópiájú egyensúlyi állapothoz való közeledésének közös lényegére világított rá.

12. §. A Fisher-féle információmennyiség

Befejezésül az információfogalomnak a matematikai statisztikában való felhasználásáról szeretnék néhány szót szólni. A matematikai statisztika feladata a statisztikai adatok feldolgozása, tehát az ezen adatokban foglalt, a szóban forgó kérdésre vonatkozó információ kianalizálása, kiszűrése. Érthető tehát, hogy az információmennyiség fogalma döntő szerepet játszik a statisztikában. Egy statisztikai próba megfelelő voltát éppen azon az alapon lehet elbírálni, hogy milyen jól gazdálkodik a rendelkezésre álló, minket érdeklő információval, mennyire képes azt lehetőleg veszteség nélkül megőrizni és ugyanakkor a számunkra mellékes, irreleváns információtól elválasztani. Nem véletlen ezért, hogy R. A. FISHER alapvető matematikai statisztikai munkáiban az információ fogalma központi szerepet játszik. FISHER az elégséges statisztikai függvényt például azzal jellemezte, hogy az kimeríti a mintában foglalt, a becsült paraméterre vonatkozó összes információt. Számszerűen csak egy speciális, de fontos esetben definiálta az információmennyiséget, mégpedig egy minta elemeiben egy paraméterre vonatkozólag foglalt információ mennyiségét, már jóval HARTLEY előtt [19], [20].

Ha $f(x, \theta)$ egy pozitív sűrűségfüggvény az $[a, b]$ intervallumban, amely folytonosan differenciálható módon függ a folytonos θ paramétertől, akkor az $f(x, \theta)$ sűrűségfüggvényű sokaságból vett minta egy elemében a θ-ra vonatkozó információ mennyiségét FISHER az

$$I_F = I_F(f(x, \theta)) = \int_a^b \frac{\left(\frac{\partial f(x)}{\partial \theta}\right)^2}{f(x)} dx \tag{60}$$

kifejezéssel értelmezte. Jól ismeretes a fontos, FRÉCHETtől, CRAMÉRtól és RAOtól származó egyenlőtlenség* (lásd pl. [14]), mely szerint, ha egy n független elemű minta elemei tetszőleges függvényével becsüljük a θ paramétert, a becslés torzítatlan, és a becslés szórásnégyzete σ^2, akkor

$$\sigma^2 \geqq \frac{1}{n I_F}, \tag{61}$$

ahol I_F a (60) alatti mennyiség; az I_F információmennyiség szabja tehát meg, hogy milyen pontosan lehet a becslés optimális választása mellett (ha elégséges becsléssel dolgozunk) θ értékét a mintából megbecsülni. Mint ismeretes (lásd pl. [14]), az I_F FISHER-féle információmennyiség a következőképpen függ össze a SHANNON-féle információval:

Tekintsük az $f(x, \theta_0)$ sűrűségfüggvényű eloszlásnak az $f(x, \theta_1)$ sűrűségfüggvényű eloszlással való helyettesítésénél fellépő információnyereséget, azaz az

$$I_1(\theta_1 \| \theta_0) = \int_a^b f(x, \theta_1) \log_2 \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)} dx \tag{62}$$

mennyiséget, és vegyük e mennyiség θ_1 szerinti második differenciálhányadosát a $\theta_1 = \theta_0$ helyen; könnyen belátható, hogy

$$\left[\frac{d^2}{d\theta_1^2} I_1(\theta_1 \| \theta_0)\right]_{\theta_1 = \theta_0} = \frac{1}{2 \log 2} I_F(f(x, \theta_0)). \tag{63}$$

Érdekes rámutatni, hogy az α-adrendű információmennyiségek e tekintetben is

* amelynek joggal adhatjuk *a matematikai statisztika határozatlansági relációja* elnevezést

pótolhatják a SHANNON-féle információt, ugyanis, ha

$$(64)\qquad I_\alpha(\theta_1\|\theta_0)=\frac{1}{\alpha-1}\log_2\int_a^b \frac{f(x,\theta_1)^\alpha}{f(x,\theta_0)^{\alpha-1}}\,dx,$$

akkor

$$(65)\qquad I_\alpha(\theta_0\|\theta_0)=0,\quad \left[\frac{d}{d\theta_1}I_\alpha(\theta_1\|\theta_0)\right]_{\theta_1=\theta_0}=0$$

és

$$(66)\qquad \left[\frac{d^2}{d\theta_1^2}I_\alpha(\theta_1\|\theta_0)\right]_{\theta_1=\theta_0}=\frac{\alpha}{2\log 2}I_F(f(x,\theta_0)).$$

Megjegyzendő, hogy fennáll a

$$(67)\qquad \left[\frac{d^2}{d\theta_1^2}I_\alpha(\theta_0\|\theta_1)\right]_{\theta_1=\theta_0}=\frac{\alpha}{2\log 2}I_F(f(x,\theta_0))$$

reláció is.

Hogy a FISHER-féle információfogalom kapcsolatát a SHANNON-féle információfogalommal ne csak formálisan értsük meg, az információnyereségnek, az előbbiekben adottól eltérően interpretációjából kell kiindulnunk. Legyen adva egy ξ valószínűségi változó, és két hipotézis, H_0 és H_1, amelyek szerint ξ az x_k értékeket a $p_0(k)$, ill. $p_1(k)$ valószínűségekkel veszi fel ($k=1,2,\ldots,n$). Legyenek π_0 és π_1 a H_0 és H_1 hipotézisek a priori valószínűségei. Ha a ξ valószínűségi változót megfigyeltük és azt tapasztaltuk, hogy értéke x_k volt, akkor a H_i hipotézis a posteriori valószínűsége a BAYES-tétel szerint

$$(68)\qquad \mathbf{P}(H_i|\xi=x_k)=\frac{\pi_i p_i(k)}{\pi_1 p_1(k)+\pi_2 p_2(k)}\qquad (i=1,2)$$

és így

$$(69)\qquad \log_2\frac{\mathbf{P}(H_1|\xi=x_k)}{\mathbf{P}(H_0|\xi=x_k)}=\log_2\frac{p_1(k)}{p_0(k)}+\log_2\frac{\pi_1}{\pi_0}.$$

A $\log_2\dfrac{\mathbf{P}(H_1|\xi=x_k)}{\mathbf{P}(H_0|\xi=x_k)}$ mennyiséget nyilván felfoghatjuk, mint azt az információt, amelyet a $\xi=x_k$ megfigyelés a H_1 hipotézis mellett (a H_0 hipotézissel szemben) nyújt, hiszen $\log_2\dfrac{\mathbf{P}(H_1|\xi=x_k)}{\mathbf{P}(H_0|\xi=x_k)}=\log_2\dfrac{1}{\mathbf{P}(H_0|\xi=x_k)}-\log_2\dfrac{1}{\mathbf{P}(H_1|\xi=x_k)}$ azt fejezi ki, hogy mennyivel nagyobb H_0 bizonytalansága, mint H_1-é. Azon feltevés mellett, hogy H_1 a helyes hipotézis, e mennyiség átlagos értéke nyilván

$$(70)\qquad \mathbf{M}\left(\log_2\frac{\mathbf{P}(H_1|\xi)}{\mathbf{P}(H_0|\xi)}\right)=I_1(\mathfrak{P}_1\|\mathfrak{P}_0)+\log_2\frac{\pi_1}{\pi_0}.$$

Ilyen módon $I_1(\mathfrak{P}_1 \| \mathfrak{P}_0)$ egy additív állandótól eltekintve (amely 0-val egyenlő, ha $\pi_1 = \pi_0$, vagyis ha a két hipotézis a priori egyformán valószínű) annak mértékéül is tekinthető, hogy mennyi információt nyújt ξ megfigyelése a H_1 hipotézis mellett, a H_0 hipotézissel szemben. Hasonlóan interpretálható $I_1(f_1(x) \| f_0(x))$ is.

A mondottak alapján, ha tudjuk azt, hogy ξ eloszlásának sűrűségfüggvénye az $f(x, \theta)$ családba tartozik és az a hipotézisünk, hogy θ értéke egy megadott θ_0 számmal egyenlő, akkor az az információ, amelyet a ξ változó megfigyelése e hipotézis ellen egy másik $\theta = \theta_1$ hipotézis mellett átlagban nyújt (azon feltevés mellett, hogy a $\theta = \theta_1$ hipotézis a helyes), nyilván egyenlő a fent vizsgált $I_1(\theta_1 \| \theta_0)$ mennyiséggel. Ha viszont nem lineáris, hanem exponenciális átlagolást végzünk, akkor a változó megfigyelése útján a $\theta = \theta_1$ hipotézis mellett a $\theta = \theta_0$ hipotézissel szemben nyert információ nyilvánvalóan $I_\alpha(\theta_1 \| \theta_0)$. Mint láttuk, ha θ_1 közel van θ_0-hoz, nem sok különbséget jelent, hogy hogyan átlagolunk, hiszen $I_\alpha(\theta_1 \| \theta_0)$ második deriváltja a $\theta_1 = \theta_0$ helyen minden $\alpha > 0$ mellett egy konstans faktortól eltekintve a FISHER-féle információmennyiséggel egyenlő.

Kevésbé közismert a χ^2-tel jelölt, eloszlások eltérésének mérésére használt jól ismert kifejezés kapcsolata az információelmélettel. Ha vizsgáljuk a $\mathfrak{P} = \{p_k\}$ és $\mathfrak{Q} = \{q_k\}$ diszkrét eloszlásokat ($p_k > 0$; $k = 1, 2, \ldots, n$) és tekintjük a $\mathfrak{P}$ eloszlásnak az $(1-t)\mathfrak{P} + t\mathfrak{Q} = \{(1-t)p_k + tq_k\}$ kevert eloszlással való helyettesítésénél fellépő α-adrendű információnyereséget, akkor egyszerű számolással adódik, hogy bármely $\alpha > 0$-ra e mennyiség t szerinti második deriváltja a $t = 0$ helyen a $\mathfrak{Q}$ eloszlásnak a $\mathfrak{P}$ eloszlástól való χ^2-eltérésével arányos, mégpedig

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} I_\alpha[(1-t)\mathfrak{P} + t\mathfrak{Q} \| \mathfrak{P}]\right]_{t=0} = \frac{\alpha}{2 \log 2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(q_k - p_k)^2}{p_k}. \tag{71}$$

E megjegyzésből látszik, hogy a matematikai statisztika szempontjából az α-adrendű információmennyiségek lényegében egyenértékűek. Láttuk azonban, hogy a SHANNON-féle információmennyiségnek sok előnye van. Vitathatatlan, hogy a SHANNON-féle információ mérték az információ legtermészetesebb mérőszáma. A fentiekben ismertetett vizsgálatok egyik fő tanulságának éppen azt tartom, hogy az egyedül számbajövő alternatív mértékszámokkal, az α-adrendű információmennyiséggel való összehasonlítás segítségével egészen nyilvánvalóvá vált, hogy a SHANNON-féle információmennyiség nemcsak hogy nem önkényes, hanem az információmennyiségnek minden tekintetben adekvát mértéke. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a többi információmennyiség, vagyis az $\alpha \neq 1$-rendű információmennyiségek feleslegesek. A mondottak ugyanis azt is bizonyítják, hogy a többi információmennyiség számos tekintetben hasonlóan viselkedik, mint a SHANNON-féle, a legdöntőbb tulajdonságaik közösek, és mint utaltam rá, vannak előnyei az α-adrendű információmennyiségeknek is, mert ezek számolástechnikailag gyakran könnyebben kezelhetők, mint a SHANNON-féle entrópia. Bár az információelmélet legtöbb problémájánál célhoz jutunk a SHANNON-féle információmennyiséggel, azért az $\alpha\neq 1$-rendű információmennyiségek olyan lehetőséget jelentenek, amelyet helytelen volna figyelmen kívül hagyni; célszerű e mennyiségek használatát mint lehetséges alternatív eljárást mindig szem előtt tartani.

13. §. Más, rokon vizsgálatok

Az a gondolat, hogy az $\frac{1}{1-\alpha}\log_2\left(\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha\right)$, ill. az $\frac{1}{\alpha-1}\log_2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k^\alpha}{p_k^{\alpha-1}}\right)$ kifejezések információmennyiségekként értelmezhetők, nem új. Ez a gondolat megtalálható pl. BHATTACHARYYAnál [21], [22] és JEFFREYSnél [15], akik az $\alpha=\frac{1}{2}$ esettel foglalkoztak és az $I_{1/2}[\mathcal{P}\|\mathcal{Q}]$ mennyiséget a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ eloszlások eltérése mértékeként értelmezték,* továbbá SCHÜTZENBERGERnél [23], aki említi az $I_\alpha(\mathcal{P})$ mennyiségeket; az ő terminológiája szerint ezek azonban csak „pszeudo-információk". S. KULLBACK (lásd [14], ahol további irodalmi utalások is találhatók) is foglalkozott az $I_\alpha(\mathcal{P}\|\mathcal{Q})$ mennyiségekkel. Egyik általános tételének (amely a fentebb a matematikai statisztika határozatlansági relációjának nevezett tétellel rokon) egy speciális esete a következőképpen fogalmazható meg:

Legyenek $\mathcal{Q}=(q_1,q_2,\dots,q_n)$ és $\mathcal{R}=(r_1,\dots,r_n)$ pozitív elemű valószínűségeloszlások. Vizsgáljuk azon $\mathcal{P}=(p_1,\dots,p_n)$ eloszlásokat, amelyek eleget tesznek az

$$I_1(\mathcal{P}\|\mathcal{Q})=I_1(\mathcal{P}\|\mathcal{R}) \tag{72}$$

feltételnek, és vizsgáljuk meg ezen eloszlásokra $I_1(\mathcal{P}\|\mathcal{Q})$ minimumát. Akkor

$$\min_{I_1(\mathcal{P}\|Q)=I_1(\mathcal{P}\|\mathcal{R})} I_1(\mathcal{P}\|\mathcal{Q})=\max_{0<\alpha<1}(1-\alpha)I_\alpha(\mathcal{Q}\|\mathcal{R}). \tag{73}$$

Az $(1-\alpha)I_\alpha(\mathcal{Q}\|\mathcal{R})$ kifejezés maximumával foglalkozott H. CHERNOFF is [24].

KULLBACK tétele azt mutatja, hogy az α-adrendű információk fellépnek a SHANNON-féle információra vonatkozó szélsőértékfeladatok megoldásai során is.

Az α-adrendű információmennyiségekkel tehát más vonatkozásban már többen foglalkoztak. Tárgyalásunkban eszerint nem e mennyiségek bevezetése

* Vegyük észre, hogy $I_{1/2}[Q\|\mathcal{P}]=-2\log_2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{p_k q_k}=I_{1/2}[\mathcal{P}\|Q]$.

az új, hanem csak annyi, hogy kimutattuk, hogy az információmennyiségre vonatkozó bizonyos kézenfekvő posztulátumoknak a SHANNON-féle információn kívül kizárólag az α-adrendű információmennyiségek tesznek eleget, tisztáztuk, hogy ezen családban mely tulajdonságok tüntetik ki a SHANNON-féle információmennyiséget, és végül, hogy az α-adrendű információmennyiségekre a SHANNON-féle információmennyiségre vonatkozó ismert tételek hogyan terjeszthetők ki. A relatív α-adrendű információval, továbbá a nem teljes eloszlásokhoz tartozó információmennyiséggel tudomásunk szerint eddig nem foglalkoztak.

14. §. Néhány általános megjegyzés

Befejezésül néhány elvi jellegű megjegyzést kívánunk tenni az információfogalommal kapcsolatban. Úgy tűnhet esetleg, mintha az információfogalomban szubjektív elemek lényeges szerepet játszanának, sőt, azt is gondolhatná valaki, hogy e fogalomnak nincs is objektív, az információt kapó egyéntől független értelme, hogy információról csak akkor lehetne beszélni, ha azt az információt valaki tudomásul veszi. Szeretnénk hangsúlyozni, hogy ez nem így van, és ezt a látszatot csak az információelmélet terminológiája kelti. Valójában egy véletlen jelenség megfigyeléséből nyerhető információ mennyisége objektív számadat, amely kizárólag a véletlen jelenség objektív körülményeitől függ és nem függ attól, hogy ezt az információt bárki vagy bármi, (ember, műszer vagy elektronikus számológép) regisztrálja és felhasználja-e. Láttuk, hogy az információ felfogható mint a bizonytalanság csökkenése is. A „bizonytalanság" kifejezés e vonatkozásban szintén objektív értelemben értendő. Nem egy megfigyelő tudatában jelenlevő bizonytalanságról, hanem a szóban forgó, a véletlentől függő jelenségre vonatkozólag fennálló objektív bizonytalanságról van szó, amely éppen a szóban forgó jelenség véletlen voltából származik, abból, hogy ténylegesen különböző lehetőségek állnak fenn. A bizonytalanság mértéke, tehát az $I_1(\mathcal{P})$, ill. $I_\alpha(\mathcal{P})$ mennyiség csupán e lehetőségek valószínűségeitől függ, és így nyilvánvaló, hogy szintén objektív érvénnyel bír.

E tekintetben is igen tanulságos az információfogalom és a termodinamikai entrópia fogalom közötti kapcsolat megvizsgálása. Ismeretes, hogy a termodinamikai entrópia fogalom BOLTZMANNtól származó valószínűségszámítási értelmezése abban áll, hogy egy fizikai rendszer (pl. ideális gáz) entrópiája a rendszer rendezetlenségének a mértékszáma, azaz annak a bizonytalanságnak, amely a rendszerre (pl. a gáz molekuláinak a fázistérben való eloszlására) vonatkozólag fennáll. Mondhatjuk tehát, hogy a statisztikus mechanikai entrópia is a bizonytalanság mértéke (mégpedig annak SHANNON-féle mértéke); e vonatkozásban egészen nyilvánvaló, hogy itt minden szubjektív vonástól mentes objektív bizonytalanságról (egy fizikai rendszer rendezetlenségéről) van szó. Ugyanez a helyzet az információ (ill. bizonytalanság) fogalmával kapcsolatban általában.

Összefoglalva tehát, azt mondhatjuk, hogy az információ ugyanabban az értelemben objektív, mint a valószínűség. A legnyilvánvalóbb ez éppen egyetlen véletlen esemény esetében: ha ezen esemény valószínűsége p, akkor a megfelelő információmennyiség $\log_2 \frac{1}{p}$. Nyilvánvaló, hogy pl. amennyiben p fizikai állandóként fogható fel, úgy ez $\log_2 \frac{1}{p}$-re nem kevésbé igaz.

IRODALOM

[1] R. V. Hartley, Transmission of information, *Bell System Technical Journal* **7** (1928), 535—563.

[2] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Technical Journal **27** (1948) 379—423 és 623—653.

[3] C. E. Shannon—W. Weawer, *The mathematical theory of communication*, University of Illinois Press, Urbana, 1949.

[4] N. Wiener, *Cybernetics*, Wiley, New York, 1948.

[5] G. H. Hardy - J. E. Littlewood—G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

[6] J. Aczél, On mean values, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **54** (1948) 392—400.

[7] A. Kolmogoroff, Sur la notion de la moyenne, *Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei* **12** (1930) 388—391.

[8] M. Nagumo, Über eine Klasse von Mittelwerte, *Japanese Journal of Mathematics*, **7** (1930) 71—79.

[9] B. de Finetti, Sul concetto di media, *Giornale di Istituto Italiano dei Attuarii* **2** (1931) 369—396.

[10] B. Jessen, Über die Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels, *Acta Sci. Math.* **5** (1931) 108—116.

[11] T. Kitagawa, On some class of weighted means, *Proceedings Physico Mathematical Society of Japan* **16** (1934) 117—126.

[12] J. Aczél, О средных величинах, *Colloquium Mathematicum* **4** (1956) 33—55.

[13] G. Pólya, *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton, 1954.

[14] S. Kullback, *Information theory and statistics*, Wiley, 1959.

[15] H. Jeffreys, *Theory of Probability* (2nd edition), Oxford Clarendon Press, 1948.

[16] G. A. Barnard, The theory of information, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B. **13** (1951) 46—64.

[17] A. Rényi, On the dimension and entropy of probability distribution, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 193 215.

[18] Ju. V. Linnik, Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдеберга, Теория Вероятностей и ее применения **4** (1959) 311—321.

[19] R. A. Fisher, *Statistical methods for research workers,* Oliver and Boyd, London, 1925.

[20] R. A. Fisher, *Statistical methods and scientific inference,* Oliver and Boyd, London, 1956.

[21] A. Bhattacharyya, On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions, *Bulletin of the Calcutta Math. Soc.* **35** (1943) 99—109.

[22] A. Bhattacharyya, On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation, *Sankhya* **8** (1946) 1—14.

[23] M. P. Schützenberger, Contribution aux applications statistiques de la théorie de l'information, *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris* **3** (1954) 3—117.

[24] H. Chernoff, A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations, *Bulletin of the American Mathematical Society* **23** (1952) 493 - 507.

BOLYONGÁSI PROBLÉMÁK TÁRGYALÁSA MÁTRIXELMÉLETI MÓDSZERREL

Írta: REIMANN JÓZSEF

1. Bevezetés

Az alábbi dolgozatban véges számú állapottal bíró homogén MARKOV-láncok speciális eseteivel, a tér rácspontjain történő bolyongás által származtatott MARKOV-láncok vizsgálatával foglalkozunk.

Ismeretes, hogy a homogén MARKOV-láncot a kezdeti valószínűségeloszlás, valamint az egylépéses átmenet-valószínűségeket tartalmazó

$$(1.1) \qquad \Pi = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \text{ sztochasztikus mátrix}$$

teljesen meghatározza.

Az N-lépéses átmenet-valószínűségeket a Π mátrix N-edik hatványának megfelelő elemei szolgáltatják. A többlépéses átmenetvalószínűségek meghatározása tehát mátrix-hatványozási probléma, ami tetszőleges sztochasztikus mátrix esetében igen nehezen vihető keresztül.

A sztochasztikus mátrixok bizonyos speciális osztálya azonban ebből a szempontból jól kezelhető.

Legyenek a homogén MARKOV-láncot alkotó kísérletsorozat egyes kísérleteinek lehetséges eredményei az $A_0, A_1, \ldots, A_n$ események, amelyeket szokásos terminológiával egy véletlen állapotváltozásokat mutató fizikai rendszer lehetséges állapotainak tekintjük, és jelölje p_{ij} az A_i állapotból az A_j állapotba történő egylépéses átmenet-valószínűséget. Sematizáljuk a fizikai rendszert az alábbi módon: egy részecske bolyong a számegyenes $0, 1, 2, \ldots, n$ egész koordinátájú pontjain és az $A_i \to A_j$ egylépéses átmenetnek feleljen meg a részecske $x = i$ pontból $x = j$ pontba történő ugrása.

Legyen $p_{00} = 1$, $p_{nn} = 1$, $p_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$,

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{ha } j = i+1 \\ q & \text{ha } j = i-1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A kapott sztochasztikus mátrix:

$$(1.2)\qquad P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

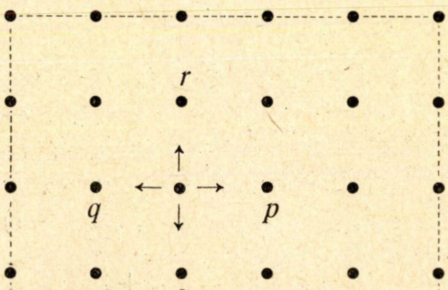
megfelel annak az esetnek, amikor az $x=0$ és $x=n$ pontokban elnyelő falakat helyezünk el, azaz, ha a részecske e pontok valamelyikébe ér, mozgása megszűnik, egyébként bármely belső pontból csak a tőle jobbra vagy balra levő szomszédos pontba léphet p ill. q valószínűséggel. A bolyongást szimmetrikusnak nevezzük, ha $p=q=\frac{1}{2}$.

Helyezzünk a részecske útjába az $x=-\frac{1}{2}$ és $x=n+\frac{1}{2}$ pontokba visszaverő falakat, ekkor az előző példában említett átmenet-valószínűségek mellett a következő sztochasztikus mátrixot kapjuk:

$$(1.3)\qquad P_2=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

Ha a részecske a sík rácspontjaiból álló téglalapon bolyong, amely téglalapot elnyelő fallal szegélyezünk, s bármely belső pontból a részecske egy lépés során a 4 szomszédos rácspont valamelyikébe léphet rendre p, q, r, s valószínűséggel, akkor az alábbi bolyongási tartomány esetén:

(1.4) (T)



a következő sztochasztikus mátrixot kapjuk:

$$
(1.5)\qquad
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\&&&1&&\\&&&&1&\\&&&&&1\end{matrix} & & & & \\ \hline
\begin{matrix}0&&&&&\\&r&&&&\\&&r&&&\\&&&r&&\\&&&&r&\\&&&&&0\end{matrix} &
\begin{matrix}1&&&&&\\q&0&p&&&\\&q&0&p&&\\&&q&0&p&\\&&&q&0&p\\&&&&&1\end{matrix} &
\begin{matrix}0&&&&&\\&s&&&&\\&&s&&&\\&&&s&&\\&&&&s&\\&&&&&0\end{matrix} & & \\ \hline
 & \begin{matrix}0&&&&&\\&r&&&&\\&&r&&&\\&&&r&&\\&&&&r&\\&&&&&0\end{matrix} &
\begin{matrix}1&&&&&\\q&0&p&&&\\&q&0&p&&\\&&q&0&p&\\&&&q&0&p\\&&&&&1\end{matrix} &
\begin{matrix}0&&&&&\\&s&&&&\\&&s&&&\\&&&s&&\\&&&&s&\\&&&&&0\end{matrix} & \\ \hline
 & & \begin{matrix}0&&&&&\\&r&&&&\\&&r&&&\\&&&r&&\\&&&&r&\\&&&&&0\end{matrix} &
\begin{matrix}1&&&&&\\q&0&p&&&\\&q&0&p&&\\&&q&0&p&\\&&&q&0&p\\&&&&&1\end{matrix} &
\begin{matrix}0&&&&&\\&s&&&&\\&&s&&&\\&&&s&&\\&&&&s&\\&&&&&0\end{matrix} \\ \hline
 & & & & \begin{matrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\&&&1&&\\&&&&1&\\&&&&&1\end{matrix}
\end{array}\right] = [P_{ij}].
$$

(Valamennyi föl nem tüntetett elem 0.)

A $[P_{ij}]$ hipermátrix P_{ij} blokkjának elemei az i-edik pontsor egyes pontjaiból a j-edik pontsor egyes pontjaiba való egylépéses átmenet-valószínűségeket tartalmazzák. (Így a P_{ij} blokk μ-edik sorának ν-edik eleme megadja annak valószínűségét, hogy a részecske az i-edik pontsor μ-edik pontjából a j-edik pontsor ν-edik pontjába megy át egy lépésben).

Ha a (T) tartományt visszaverő-fallal szegélyezzük, egyébként a feltételek azonosak, az alábbi sztochasztikus mátrixot nyerjük:

$$
(1.6)\qquad P=\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
q+r & p & 0 & 0 & s & & & & & & & \\
q & r & p & 0 & & s & & & & & & \\
0 & q & r & p & & & s & & & & & \\
0 & 0 & q & p+r & & & & s & & & & \\ \hline
r & & & & q & p & 0 & 0 & s & & & \\
 & r & & & q & 0 & p & 0 & & s & & \\
 & & r & & 0 & q & 0 & p & & & s & \\
 & & & r & 0 & 0 & q & p & & & & s \\ \hline
 & & & & r & & & & q+s & p & 0 & 0 \\
 & & & & & r & & & q & s & p & 0 \\
 & & & & & & r & & 0 & q & s & p \\
 & & & & & & & r & 0 & 0 & q & s+p
\end{array}\right).
$$

FELLER [5] munkájában generátorfüggvény alkalmazásával kiszámítja az (1. 3) és (1. 4) matrixok N-edik hatványának elemeit, valamint elnyelőfalas egydimenziós bolyongásnál annak valószínűségét, hogy a részecske az $x=z$ pontból indulva N lépésben az $x=0$ pontban nyelődjék el. LOÈVE [7] munkájában megtalálható egydimenziós szimmetrikus elnyelő-falas bolyongás esetén annak a valószínűsége, hogy a részecske N-lépés után még nem nyelődött el. (E probléma megoldására LOÈVE mátrixmódszert használt). Két és háromdimenziós síkbeli elnyelőfalas szimmetrikus bolyongásra vonatkozólag JORDAN K. [6] könyvében található annak valószínűsége, hogy a részecske a (T) tartomány egy rögzített rácspontjából indulva N-lépésben egy kiszemelt rácspontba jusson. (A szerző a probléma megoldására a differencia-egyenletek módszerét használta). MC. CREA és WHIPPLE közös [2] dolgozatukban síkbeli szimmetrikus elnyelőfalas bolyongás esetén egy hidrodynamikai modell segítségével kiszámítják annak valószínűségét, hogy a részecske a (T) tartomány egy belső pontjából indulva — meghatározatlan számú lépés után — végül egy kijelölt elnyelőpontban fejezi be életét.

Az alábbiakban bemutatásra kerülő *mátrixelméleti módszer* segítségével valamennyi említett eredmény egységes módon nyerhető, (míg az említett szerzők mindegyike más módszert alkalmaz), mégpedig nemcsak szimmetrikus bolyongás esetén (a fenti eredmények többsége erre az esetre vonatkozik), hanem abban az általánosabb esetben is, amikor az egységnyi valószínűséget tetszőleges módon osztjuk fel a különböző irányokba történő elmozdulás szempontjából. Módszerünk segítségével az eddigi egy-két vagy három dimenzióra nyert eredmények könnyűszerrel általánosíthatók n-dimenziós térben elnyelő- vagy visszaverő fallal határolt tartományon történő bolyongás esetére.[1] A [2] dolgozatban tárgyalt problémát tetszőleges alakú tartomány esetében is megoldjuk. A módszer egyéb alkalmazásaira, valamint a nyert eredményeknek a matematikai statisztikában történő felhasználására egy későbbi dolgozatban kívánunk visszatérni.

A módszer alapgondolata a következő: a) Az (1. 2) és (1. 3) típusú mátrixok kanonikus előállítása segítségével a mátrixhatványozási probléma egy skalár elemekből álló diagonál-mátrix hatványozására redukálódik, így az egydimenziós térben történő bolyongásnál az N-lépéses átmenetvalószínűségek egyszerű módon adódnak.

b) Magasabb dimenziójú térben történő bolyongás által származtatott sztochasztikus hipermátrixok[2] az egydimenziós bolyongásnak megfelelő mát-

[1] Többdimenziós visszaverőfalas bolyongással az irodalomban eddig nem találkoztunk.

[2] Tudomásunk szerint a hipermátrixok elméletét eddig bolyongási problémák tárgyalására nem alkalmazták, pl. az (1. 5) és (1. 6) alakú sztochasztikus mátrixok az irodalomban nem szerepelnek.

rixok segítségével egyszerű módon felépíthetők, s mivel ismert mátrixelméleti tétel alapján az egydimenziós bolyongás mátrixainak kanonikus előállítása kulcsot szolgáltat a hipermátrixok kanonikus előállításához, az N lépéses átmenetvalószínűségek akárhány dimenziós térben történő bolyongás esetében elvileg könnyen nyerhetők.

2. Bolyongás az egyenesen

A) Elnyelő-falas eset

Az (1.3) sztochasztikus mátrix megfelelő átrendezéssel (sorok és oszlopok egyidejű felcserélésével), a következő alakra hozható:

$$P_1 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ B_1 & P \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

ahol P az alábbi $(n-1)$-edrendű mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Könnyű belátni, hogy

$$P_1^N = \begin{bmatrix} E & 0 \\ B_N & P^N \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Ha annak valószínűségét keressük, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva $(0<i<n)$ pontosan N lépésben az $x=0$ falnál nyelődjék el, akkor meghatározzuk annak valószínűségét, hogy az $x=i$ pontból induló részecske $N-1$ lépésben az $x=1$ pontba jusson (ezt P^{N-1} elemei adják meg), s az így kapott valószínűség q-szorosa a kívánt eredmény:

$$p_{i0}^{(N)} = q p_{i1}^{(N-1)} \quad \text{és} \quad p_{in}^{(N)} = p p_{i,n-1}^{(N-1)}.$$

Így számunkra elegendő a P mátrix N-edik hatványát meghatározni, amelyhez a következő tételt, a mátrixfüggvények kanonikus előállításának alaptételét vesszük alapul [3]:

Ha a P mátrix karakterisztikus polinomja $|\lambda E - P| = D(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$, *minimálpolinomja* $\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)$, *ha továbbá az* $f(z) = \sum_{\nu=0}^{s} c_\nu z^\nu$ *hatványsor konvergenciaköre a* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *0-helyeket a belsejében tartalmazza, akkor* *az $f(P)$ mátrixfüggvény a következő kanonikus alakban állítható elő:*

$$\text{(I)} \qquad f(P)=\sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k)\, L_k(P)=\sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k)(\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}+\cdots+\mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}^*_{k\alpha_k}),$$

ahol $L_k(z)=\dfrac{\Delta(z)}{\Delta'(\lambda_k)(z-\lambda_k)}$, és az $\mathbf{u}_{ki}, \mathbf{v}^*_{lj}$ vektorok biortogonális rendszert alkotnak, azaz

$$u^*_{ki}v_{lj}=\delta_{kl}\delta_{ij}\begin{pmatrix} k,l=1,2,\ldots,s \\ i=1,2,\ldots,\alpha_k \\ j=1,2,\ldots,\alpha_l \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{u}_{ki}$ ill. $\mathbf{v}^*_{kj}$ vektorok a P-nek a λ_k sajátértékhez tartozó jobb-, ill. baloldali sajátvektorai.

Innen $f(z)=z^N$ esetben

$$\text{(II)} \qquad P^N=\sum_{k=1}^{s} \lambda_k^N(\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}^*_{k1}+\cdots+\mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}^*_{k\alpha_k}).$$

Ha $P=P^*$, azaz P valós szimmetrikus, akkor kanonikus előállítása:

$$\text{(III)} \qquad P=\sum_{k=1}^{s} \lambda_k(\mathbf{u}_{k1}\mathbf{u}^*_{k1}+\cdots+\mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{u}^*_{k\alpha_k}).$$

Az alkalmazásokra való tekintettel megjegyezzük, hogy az $L_k(P)$ Lagrange-féle interpolációs mátrix-polinom és az $\operatorname{adj}(\lambda E-P)$ mátrix között az alábbi reláció áll fenn:

$$L_k(P)=\frac{\alpha_k}{D^{(\alpha_k)}(\lambda_k)}\{\operatorname{adj}(\lambda E-A)\}^{(\alpha_k-1)}_{\lambda=\lambda_k}.$$

Ha speciálisan λ_k egyszeres gyök:

$$\text{(IV)} \qquad L_k(P)=\frac{1}{D'(\lambda_k)}\operatorname{adj}(\lambda_k E-A).$$

A (2. 2)-ben adott P *mátrixot kanonikus előállítás céljából szimmetrikus alakra hozzuk.*

Fennáll az alábbi azonosság:

$$(2.4)\quad P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{q}{p}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{pq} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{pq} & 0 & \sqrt{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{pq} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{pq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{p}{q}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{n-2} \end{bmatrix} = T\Pi_1T^{-1},$$

ahol

$$\Pi_1 = \sqrt{pq}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \sqrt{pq}\,\Pi. \tag{2.5}$$

A Π mátrix kanonikus előállítása ismert [3]. (III)-ban

$$\lambda_k = 2\cos\frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$L_k(\Pi)_{ij} = \frac{2}{n}\sin\frac{ik\pi}{n}\sin\frac{jk\pi}{n},$$

$$\mathbf{u}_k^* = \sqrt{\frac{2}{n}}\left[\sin\frac{k\pi}{n}, \ldots, \sin\frac{(n-1)k\pi}{n}\right]$$

helyettesítendő. Ennek figyelembevételével a P mátrix kanonikus alakja:

$$P = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n}\right)\begin{bmatrix} \sin\frac{k\pi}{n} \\ \sqrt{\frac{q}{p}}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{n-2}\sin\frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix} \cdot \tag{2.6}$$

$$\cdot\left[\sin\frac{k\pi}{n}, \sqrt{\frac{p}{q}}\sin\frac{2k\pi}{n}, \ldots, \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{n-2}\sin\frac{(n-1)k\pi}{n}\right].$$

A (II) összefüggés alapján a P^{N-1} mátrix i-edik sorának j-edik eleme:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(N-1)} &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{N-1}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{i-1}\sin\frac{ik\pi}{n}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{j-1}\sin\frac{jk\pi}{n} = \\ &= \frac{2^N}{n}p^{\frac{N-1-i+j}{2}}q^{\frac{N-1+i-j}{2}}\sum_{k=1}^{n-1}\cos^{N-1}\frac{k\pi}{n}\sin\frac{ik\pi}{n}\sin\frac{jk\pi}{n}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ennek alapján

$$P_{i,0}^{(N)} = qP_{i,1}^{(N-1)} = \frac{2^N}{n}p^{\frac{N-i}{2}}q^{\frac{N+i}{2}}\sum_{k=1}^{n-1}\cos^{N-1}\frac{k\pi}{n}\sin\frac{ik\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}. \tag{2.8}$$

Utóbbi eredményünk megegyezik a FELLER [5] művében található eredménnyel[6].

Szimmetrikus bolyongás esetén $p=q=\frac{1}{2}$ helyettesítéssel eredményeink a következő alakot öltik:

$$P_{ij}^{(N-1)}=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{n-1}\cos^{N-1}\frac{k\pi}{n}\sin\frac{ik\pi}{n}\sin\frac{jk\pi}{n} \tag{2.9}$$

és

$$P_{i0}^{(N)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\cos^{N-1}\frac{k\pi}{n}\sin\frac{ik\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}. \tag{2.9'}$$

Annak valószínűsége, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva $2N$ lépésben kiinduló helyére térjen vissza:

$$P_{ii}^{(2N)}=\frac{2^{2N}}{n}p^N q^N\sum_{k=1}^{n-1}\cos^{2N}\frac{k\pi}{n}\sin^2\frac{ik\pi}{n}. \tag{2.10}$$

Ugyanez a valószínűség szimmetrikus bolyongás esetén:

$$P_{ii}^{(2N)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\cos^{2N}\frac{k\pi}{n}\sin^2\frac{ik\pi}{n}. \tag{2.11}$$

1. TÉTEL. *Annak valószínűsége, hogy a részecske N lépés után még életben van:*

$$\mathbf{P}(\xi>N)=\frac{2^{N+1}}{n}p^{\frac{N-i+1}{2}}q^{\frac{N+i-1}{2}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{[1+(-1)^{k-1}]\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{N}{2}}}{\frac{p}{q}-2\sqrt{\frac{p}{q}}\cos\frac{k\pi}{n}+1}\cos^N\frac{k\pi}{n}\sin\frac{ik\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}, \tag{2.12}$$

ahol ξ az elnyelődés előtti lépésszámot jelöli.

BIZONYÍTÁS: Annak valószínűsége, hogy a részecske N lépés után még nem nyelődött el, nyilván annak valószínűségével egyenlő, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva az $x=1, x=2, \ldots, x=n-1$ pontok valamelyikébe ment át N lépésben. Mivel egymást kölcsönösen kizáró eseményekről van szó, a keresett valószínűségre fennáll:

$$P=\sum_{j=1}^{n-1}P_{ij}^{(N)}, \tag{2.13}$$

azaz a keresett valószínűség a P^N mátrix i-edik sora elemeinek összege.

[6] Lásd [5] 292. oldal.

Jelöljük ξ-vel a részecske elnyelődés előtti lépéseinek számát, ekkor a $\mathbf{P}(\xi>N)$ valószínűségeket a

$$(2.14)\qquad \begin{bmatrix} & & \\ & P^N & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n-1} p_{ij}\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n-1} p_{n-1,j}\end{bmatrix}$$

vektor elemei szolgáltatják. E vektor i-edik eleme adja meg a keresett valószínűséget, ha a részecske az $x=i$ pontból indult. A (2. 7) formulát felhasználva, a $\mathbf{P}(\xi>N)$ valószínűséget explicit alakban is megadhatjuk:

$$\mathbf{P}(\xi>N)=\frac{2^{N+1}}{n}p^{\frac{N-i}{2}}q^{\frac{N+i}{2}}\sum_{k=1}^{n-1}\cos^N\frac{k\pi}{n}\sin\frac{ik\pi}{n}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^j\sin\frac{jk\pi}{n}\right].$$

Az összegezést j-re elvégezve, kapjuk (2. 12)-t. Ha ebben a formulában $p=q=\frac{1}{2}$-et helyettesítünk, kapjuk a LOÈVE által közölt[7]

$$(2.15)\qquad \mathbf{P}(\xi>N)=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{}' \cos^N\frac{k\pi}{n}\sin\frac{ik\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}$$

formulát, ahol az összegezést csak páratlan k-ra kell végezni.

2. TÉTEL. *Az elnyelődés előtti lépésszám várható értéke*

$$(2.16)\qquad \mathbf{M}(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{}' \frac{\sin\frac{ik\pi}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{}' \frac{\sin\frac{ik\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{2n}}{\sin^3\frac{k\pi}{2n}}.$$

BIZONYÍTÁS. A (2. 15) összefüggés felhasználásával könnyen kiszámíthatjuk annak valószínűségét, hogy a részecske pontosan N lépésben nyelődik el valamelyik falnál.

Nyilván

$$\mathbf{P}(\xi=N)=\mathbf{P}(\xi>N-1)-\mathbf{P}(\xi>N).$$

Így (2. 15) alapján

$$(2.16')\qquad \mathbf{P}(\xi=N)=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{}' \left(\cos^{N-1}\frac{k\pi}{n}-\cos^N\frac{k\pi}{n}\right)\sin\frac{ik\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}.$$

Kiszámítjuk az elnyelődési lépésszám várható értékét;

$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{}' \left\{\sum_{N=0}^{\infty}N\left[\cos^{N-1}\frac{k\pi}{n}-\cos^N\frac{k\pi}{n}\right]\right\}\sin\frac{ik\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}.$$

[7] Lásd: [7] 48. oldal.

Tekintetbe véve, hogy

$$\sum_{N=0}^{\infty} N \cos^{N-1}\frac{k\pi}{n}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{1-\cos\frac{k\pi}{n}}=\frac{1}{2\sin^2\frac{k\pi}{2n}},$$

kapjuk (2.16)-ot.

Például $n=6$, $i=3$ esetén

$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{12}}{\sin^3\frac{\pi}{12}}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}}{\sin^3\frac{\pi}{4}}+\frac{\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}}{\sin^3\frac{5\pi}{12}}\right)=9.$$

Vizsgáljuk most meg azt az esetet, amikor csak egy elnyelőfalat alkalmazunk. Legyen az elnyelő fal az $x=0$ pontban. A (2.8) összefüggésből, ha $n\to\infty$ kapjuk annak valószínűségét, hogy az $x=i$ pontból induló részecske N lépésben az $x=0$ falnál nyelődik el, amikor az $x=n$ pontban levő elnyelőfalat a végtelenbe toltuk. Ez a valószínűség:

$$P_0^N=2^N p^{\frac{N-i}{2}} q^{\frac{N+i}{2}}\int_0^1 \cos^{N-1}\pi x \sin i\pi x \sin \pi x\, dx. \tag{2.17}$$

Feller rámutat arra, hogy a fenti integrál elemi alakban is kifejezhető, s mint az parciális integrálással kimutatható:

$$P_0^N=\frac{i}{N}\binom{N}{\frac{N-i}{2}} p^{\frac{N-i}{2}} q^{\frac{N+i}{2}}. \tag{2.18}$$

Megjegyezzük, hogy az utóbbi formula elemi úton is származtatható. Ismeretes, hogy ha az $x=0$ pontban nincs elnyelő fal, azaz a részecske korlátlanul bolyonghat, akkor annak valószínűsége, hogy a részecske N lépésben az $x=i$ pontból az $x=0$ pontba jut[8]:

$$\binom{N}{\frac{N-i}{2}} p^{\frac{N-i}{2}} q^{\frac{N+i}{2}}. \tag{2.19}$$

Nekünk most annak valószínűségére van szükségünk, hogy az említett esemény N lépésben először következzék be. Egy jól ismert lemma segítségével könnyen megkapjuk a kívánt eredményt.

[8] Lásd: [5] 293. oldal.

LEMMA:[9] Annak valószínűsége, hogy egy α darab (—1)-ből és β darab (+1)-ből álló sorozatban ne legyen olyan részsorozat, amelyben a (—1)-ek és (+1)-ek száma megegyezik:

$$1-\frac{2\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

A mi esetünkben $\alpha=\frac{N+i}{2}$, $\beta=\frac{N-i}{2}$, a keresett valószínűség $\frac{i}{N}$, tehát

$$\frac{i}{N}\binom{N}{\frac{N-i}{2}}p^{\frac{N-i}{2}}q^{\frac{N+i}{2}}$$

éppen annak valószínűségét adja, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva, N lépésben először ért az $x=0$ pontba.

B) VISSZAVERŐ-FALAS ESET

Az (1.3) mátrixot a (2.4) formulában feltüntetett módon szimmetrizálhatjuk, majd egyszerű meggondolások alapján az alábbi sajátértékeket nyerjük:

$$\lambda_k=2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n}\qquad(k=1,2,\ldots,n-1),\tag{2.20}$$
$$\lambda_n=1.$$

Az elnyelőfalas esettel analóg számítási menettel a Lagrange-féle mátrixpolinomokra az alábbi értékeket kapjuk:

$$L_k(P)_{ij}=\frac{2}{n}\,\frac{p\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^i\left(\sin\frac{ik\pi}{n}-\sqrt{\frac{q}{p}}\sin\frac{(i-1)k\pi}{n}\right)}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n}}\cdot\tag{2.21}$$
$$\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^j\left(\sin\frac{jk\pi}{n}-\sqrt{\frac{q}{p}}\sin\frac{(j-1)k\pi}{n}\right)}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n}};$$

és

$$L_n(P)_{ij}=\frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^n}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\quad\text{minden } i\text{-re.}$$

[9] Lásd: [8] 694. oldal.

(II) alapján, annak a valószínűsége, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva N lépésben az $x=j$ pontba megy át:

$$(2.22)\qquad P_{ij}^{(N)}=\frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^n}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}+2^{N+1}p^{1+\frac{N-(j-i)}{2}}q^{\frac{N+(j-i)}{2}}n^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}s_k,$$

ahol

$$s_k=\frac{\cos^N\frac{k\pi}{n}\left[\sin\frac{ik\pi}{n}-\sqrt{\frac{q}{p}}\sin\frac{(i-1)k\pi}{n}\right]\left[\sin\frac{jk\pi}{n}-\sqrt{\frac{q}{p}}\sin\frac{(j-1)k\pi}{n}\right]}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n}}.$$

Eredményünk megegyezik a FELLER által közölt eredménnyel[10].

Szimmetrikus bolyongás esetén a keresett valószínűség:

$$P_{ij}^{(N)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos^N\frac{k\pi}{n}\left[\sin\frac{ik\pi}{n}-\sin\frac{(i-1)k\pi}{n}\right]\left[\sin\frac{jk\pi}{n}-\sin\frac{(j-1)k\pi}{n}\right]}{1-\cos\frac{k\pi}{n}}.$$

(2.22)-ből könnyen látható, hogy $P_{ij}^{(N)}$ az i-től független

$$\frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^n}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}$$

stacionárius eloszláshoz tart. Ez előre látható volt már a sajátértékek alapján, mivel $\lambda_n=1$, $\lambda_k<1$, $(k=1,2,\ldots,n-1)$, így a hatványozás során λ_n kivételével valamennyi λ_k zérushoz közeledik, tehát $P_{ij}^{(N)}=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^N L_k(P)_{ij}+L_n(P)_{ij}$-ből

$$\lim_{N\to\infty}P_{ij}^{(N)}=L_n(P)_{ij},$$

ami (2.21) alapján valóban a kapott határeloszlás.

3. Bolyongás a síkon elnyelőfalakkal határolt rácstéglalapon.

Tekintsük a szomszédos síkbeli rácspontoknak m sorból és n oszlopból álló téglalapját, amely rács-téglalapot elnyelő rácspontszegéllyel zárunk körül úgy, hogy a teljes rács $m+2$ sorból és $n+2$ oszlopból áll. A sorokat 0-tól

[10] Lásd: [4] 357—358. oldalakon.

$m+1$-ig, az oszlopokat 0-tól $n+1$-ig számozzuk. A bolyongás az (1.4)-ben megadott módon történik.

Az egylépéses átmenet-valószínűségeket $m=3$, $n=4$ esetben az (1.5) hipermátrix tartalmazza.

Könnyű belátni, hogy az (1.5) hipermátrix átrendezéssel a (2.1)-ben megadott alakra hozható.

3. TÉTEL. *$P^{(N)}_{(i,j)\to(\mu,\nu)}$-nel jelölve annak valószínűségét, hogy a részecske az i-edik pontsor j-edik pontjából a μ-edik pontsor ν-edik pontjába megy át N lépésben, ahol $0<i<m+1$, $0<j<n+1$, azaz (i,j) és (μ,ν) egyaránt belső pontok:*

$$(3.1) \qquad P^{(N)}_{(i,j)\to(\mu,\nu)} = \frac{2^{N+2}}{(m+1)(n+1)}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j-\nu}{2}}\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}} \cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{l=1}^{m}\sin\frac{il\pi}{m+1}\sin\frac{\mu l\pi}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{jk\pi}{n+1}\sin\frac{\nu k\pi}{n+1}\left(\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1}+\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m+1}\right)^{N}\right\}.$$

A keresett valószínűséget például az $m=3$, $n=4$ esetben a

$$(3.2) \qquad P=\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
0 & p & 0 & 0 & s & & & & & & & \\
q & 0 & p & 0 & & s & & & & & & \\
0 & q & 0 & p & & & s & & & & & \\
0 & 0 & q & p & & & & s & & & & \\
\hline
r & & & & 0 & p & 0 & 0 & s & & & \\
 & r & & & q & 0 & p & 0 & & s & & \\
 & & r & & 0 & q & 0 & p & & & s & \\
 & & & r & 0 & 0 & q & p & & & & s \\
\hline
 & & & & r & & & & 0 & p & 0 & 0 \\
 & & & & & r & & & q & 0 & p & 0 \\
 & & & & & & r & & 0 & q & 0 & p \\
 & & & & & & & r & 0 & 0 & q & p
\end{array}\right]$$

hipermátrix N-edik hatványának elemei szolgáltatják, mégpedig az i-edik blokksor μ-edik blokkjában a j-edik sor ν-edik eleme.

Legyen

$$(3.3) \qquad A_4=\begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_3=\begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a példában szereplő P hipermátrix az alábbi direkt-szorzatok összegeként írható fel:

$$P_{4\cdot 3} = A_4\cdot\times E_3 + E_4\cdot\times B_3.$$

BIZONYÍTÁS. Ha a belső rács m sorból és n oszlopból áll, akkor a P hipermátrix a következő alakban írható:

$$P = P_{nm}{}^{1} = A_n \cdot \times E_m + E_n \cdot \times B_m .$$

A hipermátrixok elméletéből ismert tétel alapján P kanonikus előállítása:

(V) $$P = A \cdot \times E + E \cdot \times B = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j)(a_i + b_j)(\mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*)$$

és

(VI) $$P^N = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j)(a_i + b_j)^N, \mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*$$

ahol az $\mathbf{u}_i$ és $\mathbf{u}_i^*$ vektorok az A mátrixnak, a $\mathbf{v}_j$, ill. $\mathbf{v}_j^*$ vektorok a B mátrixnak jobb-, ill. baloldali sajátvektorai, az a_i ill. b_j számok az A, ill. B mátrixok sajátértékei, és két vektor direkt szorzatán az

$$\mathbf{u} \cdot \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} v_1 \\ \mathbf{u} v_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u} v_n \end{bmatrix}$$

$n \cdot m$-dimenziós vektort értjük. P spektrálfelbontásához tehát csak az A_n és B_m mátrixok kanonikus alakjára van szükség, amely viszont megtalálható (2. 6)-ban.

Bevezetve a $p' = \frac{p}{p+q}$, $q' = \frac{q}{p+q}$, $r' = \frac{r}{r+s}$, $s' = \frac{s}{r+s}$ jelölést, (ahol $p+q+r+s=1$), (1. 3) és (1. 16) alapján

(3. 4) $$P^N = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j)\,[(p+q)\,a_i + (r+s)\,b_j]^N (\mathbf{u}_i'^* \cdot \times \mathbf{v}_j'^*),$$

ahol $\mathbf{u}_i$ és $\mathbf{u}_i'^*$ az A_n mátrix jobb-, ill. baloldali sajátvektorai, a $(p+q)\,a_i$ számok A_n sajátértékei ($i = 1, 2, \ldots, n$), a $\mathbf{v}_j$, ill. $\mathbf{v}_j'^*$ vektorok a B_m mátrix jobb-, ill. baloldali sajátvektorai, az $(r+s)\,b_j$ számok a B_m mátrix sajátértékei.

A vektorok direkt-szorzatait részletesen kifejtve, a keresett valószínűségre az alábbi formulát nyerjük:

(3. 5) $$P^{(N)}_{(i,j)\to(\mu,\nu)} = \sum_{l=1}^{m} v_{il} v'_{l\mu} \sum_{k=1}^{n} u_{jk} u'_{k\nu} [(p+q)\,a_k + (r+s)\,b_l]^N .$$

Figyelembe véve a (2. 6) formulát, e valószínűség a (3. 1)-ben adott explicit alakot ölti.

[11] $n \cdot m$ a P mátrix rendjét jelöli, egy indexnek tekintendő.

Szimmetrikus bolyongás, azaz $p=q=r=s=\frac{1}{4}$ *esetén*

$$P^{(N)}_{(i,j)\to(\mu,\nu)}=\frac{2^2}{(n+1)(m+1)}\times \tag{3.6}$$
$$\times\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{il\pi}{m+1}\sin\frac{\mu l\pi}{m+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1}\sin\frac{\nu k\pi}{n+1}\left[\frac{\cos\frac{k\pi}{n+1}+\cos\frac{l\pi}{m+1}}{2}\right]^N.$$

Utóbbi eredményünk megegyezik JORDÁN K. eredményével[11].

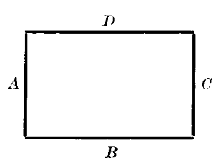
A (3. 1) összefüggés alapján könnyen válaszolhatunk arra a kérdésre, mennyi annak valószínűsége, hogy a részecske az (i,j) pontból indulva $N+1$ lépésben a $(\mu, 0)$ határpontban nyelődik el. Nyilván:

$$P^{(N+1)}_{(i,j)\to(\mu,0)}=qP^{(N)}_{(i,j)\to(\mu,1)}=\frac{2^{N+2}}{(n+1)(m+1)}\,q\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j-1}{2}}\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}}\cdot \tag{3.7}$$
$$\cdot\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{il\pi}{m+1}\sin\frac{\mu l\pi}{m+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1}\sin\frac{\nu k\pi}{n+1}\left(\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1}+\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m+1}\right)^N.$$

Szimmetrikus bolyongásnál:

$$P^{(N+1)}_{(i,j)\to(\mu,0)}=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{il\pi}{m+1}\sin\frac{\mu l\pi}{m+1}\cdot \tag{3.8}$$
$$\cdot\sin\frac{jk\pi}{n+1}\sin\frac{k\pi}{n+1}\left(\frac{\cos\frac{k\pi}{n+1}+\cos\frac{l\pi}{m+1}}{2}\right)^N.$$

Eredményeinket felhasználva, számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a bolyongó részecske $N+1$ lépésben az



elnyelő téglalap A oldalának valamely pontjában nyelődik el. E valószínűséget megkapjuk, ha a (3. 7), ill. (3. 8) formulákban μ-szerint összegzünk 1-től m-ig, mivel a baloldali elnyelőfalnak m számú olyan pontja van, ahova a részecske eljuthat. (Az elnyelő korlát csúcspontjaiba a részecske nem tud el-

[11] Lásd: [6] 425. oldal.

jutni). A keresett valószínűséget $P_{A(i,j)}^{(N+1)}$-gyel jelölve szimmetrikus bolyongás esetén:

$$P_{A(i,j)}^{(N+1)} = \frac{1}{2^N(n+1)(m+1)} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{il\pi}{m+1} \operatorname{ctg}\frac{l\pi}{2(m+1)} \sin\frac{jk\pi}{n+1} \cdot \tag{3.9}$$
$$\cdot \sin\frac{k\pi}{n+1}\left[\cos\frac{k\pi}{n+1} + \cos\frac{l\pi}{m+1}\right]^N.$$

4. TÉTEL. *Q_N-nel jelölve annak valószínűségét, hogy a részecske N lépés után még életben van:*

$$Q_N = \frac{2^{N+2}}{(n+1)(m+1)} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j}{2}} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i}{2}} \left\{ \sum_{l=1}^{m} \frac{[1+(-1)^{l-1}]\left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{m+1}{2}}}{\frac{s}{r} - 2\sqrt{\frac{s}{r}}\cos\frac{l\pi}{m+1} + 1} \cdot \right.$$
$$\cdot \sin\frac{l\pi}{m+1} \sin\frac{il\pi}{m+1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{[1+(-1)^{k-1}]\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\frac{p}{q} - 2\sqrt{\frac{p}{q}}\cos\frac{k\pi}{m+1} + 1} \cdot \right. \tag{3.10}$$
$$\left.\left. \cdot \sin\frac{k\pi}{m+1} \sin\frac{jk\pi}{n+1}\left[\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1} + \sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m+1}\right]^N \right\}\right\}.$$

BIZONYÍTÁS. A fenti valószínűség nyilván annak valószínűsége, hogy a részecske N lépésben az elnyelő falon belüli pontok valamelyikébe megy át, s mivel egymást kölcsönösen kizáró eseményekről van szó, a keresett valószínűség az egyes belső pontokba N lépésben történő átmenetek valószínűségeinek összege.

Ezek a valószínűségek, ha a részecske az i-edik pontsor j-edik pontjából indul, s a blokkok m-edrendűek, a (3. 2) alakú hipermátrix N-edik hatványa $[(i-1)m+j]$-edik sorának elemei, s Q_N éppen e sor elemeinek összege. Q_N kiszámítása céljából a (3. 6) formulában egy μ és egy ν szerinti összegezést kell csak végeznünk, azaz

$$Q_N = \frac{2^{N+2}}{(n+1)(m+1)} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j}{2}} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i}{2}} \left\{ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{\mu=1}^{m} \left(\sqrt{\frac{s}{r}}\right)^{\mu} \sin\frac{\mu l\pi}{m+1}\right] \sin\frac{il\pi}{m+1} \right\} \cdot \tag{3.11}$$
$$\cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{\nu} \sin\frac{\nu k\pi}{n+1}\right] \sin\frac{jk\pi}{n+1}\left[\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1} + \sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m+1}\right]^N \right\} \cdot$$

Ezzel a (3. 10)-et bebizonyítottuk, ugyanis a μ vagy ν szerinti összegezés eredménye lényegében már (2. 14)-ben megtalálható.

Eredményünk *szimmetrikus bolyongás esetén,* $p=q=r=s=\frac{1}{4}$ helyettesítéssel a

$$Q_N=\frac{4}{(n+1)(m+1)}\left\{\sum_{l=1}^{m}{}'\sum_{k=1}^{n}{}'\sin\frac{il\pi}{m+1}\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{2(m+1)}\sin\frac{jk\pi}{n+1}\cdot\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2(n+1)}\left[\frac{\cos\frac{k\pi}{n+1}+\cos\frac{l\pi}{m+1}}{2}\right]^N\right\} \tag{3.12}$$

alakot ölti, ahol az összegezést csak páratlan l, ill. k-ra kell elvégezni.

5. TÉTEL. *Szimmetrikus bolyongás esetén az elnyelődés előtti lépésszám várható értéke:*

$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{4}{(m+1)(n+1)}\sum_{l=1}^{m}{}'\sum_{k=1}^{n}{}'\frac{\sin\frac{il\pi}{m+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{2(m+1)}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2(n+1)}}{\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}+\sin^2\frac{l\pi}{2(m+1)}}. \tag{3.13}$$

BIZONYÍTÁS. Jelölje a ξ valószínűségi változó az elnyelődés előtti lépések számát, ekkor

$$\mathbf{P}(\xi\leqq N)=1-Q_N.$$

Könnyen nyerjük annak valószínűségét is, hogy a részecske pontosan N lépésben nyelődik el.

Nyilván

$$\mathbf{P}(\xi=N)=\mathbf{P}(\xi>N-1)-\mathbf{P}(\xi>N).$$

Ennek alapján például szimmetrikus bolyongás esetén

$$\mathbf{P}(\xi=N)=\frac{4}{(m+1)(n+1)}\sum_{l=1}^{m}{}'\sum_{k=1}^{n}{}'\sin\frac{il\pi}{m+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{2(m+1)}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2(n+1)}\cdot\left[\left(\frac{\cos\frac{k\pi}{n+1}+\cos\frac{l\pi}{m+1}}{2}\right)^{N-1}-\left(\frac{\cos\frac{k\pi}{n+1}+\cos\frac{l\pi}{m+1}}{2}\right)^{N}\right]. \tag{3.14}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\sum_{N=0}^{\infty} N\left(\frac{\cos\frac{k\pi}{n+1}+\cos\frac{l\pi}{m+1}}{2}\right)^{N-1}\left(1-\frac{\cos\frac{k\pi}{n+1}+\cos\frac{l\pi}{m+1}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{\cos\frac{k\pi}{n+1}+\cos\frac{l\pi}{m+1}}{2}},$$

valamint a $2-\cos\frac{k\pi}{n+1}-\cos\frac{l\pi}{m+1}=\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}+\sin^2\frac{l\pi}{2(m+1)}$ összefüggést, kapjuk a tétel állítását.

6. TÉTEL. *Annak valószínűsége, hogy az* (i, j) *pontból induló részecske mozgása meghatározatlan számú lépés után a* $(\mu, 0)$ *elnyelő pontban ér véget (természetesen a részecskét végül is elnyelő pontnak a* $(0, 0)$, $(0, n+1)$, $(m+1, 0)$ *és* $(m+1, n+1)$ *pontok kivételével az elnyelő fal bármely pontját választhatjuk):*

$$U_{(i,j)\to(\mu,0)}=\frac{2}{m+1}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j-1}{2}}\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}}\frac{q}{\sqrt{rs}}\sum_{l=1}^{m}\sin\frac{il\pi}{m+1}\sin\frac{\mu l\pi}{m+1}\frac{\operatorname{sh}(n+1-j)\vartheta_l}{\operatorname{sh}(n+1)\vartheta_l}. \tag{3.15}$$

BIZONYÍTÁS. A kérdésre válaszolandó, nem kell mást tennünk, mint a (3. 6) formulában elvégezni a

$$\sum_{N=0}^{\infty}\left[\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{m+1}+\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m+1}\right]^N=\frac{1}{1-\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1}-\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m+1}} \tag{3.16}$$

összegezést. Ezután a (3. 5) képletben még k (vagy l) szerint is összegezhetünk.

Bevezetve az $\frac{1}{\sqrt{rs}}-2\sqrt{\frac{pq}{rs}}\cos\frac{k\pi}{n+1}=2\operatorname{ch}\vartheta_l$ jelölést, a bizonyítandó tételt nyerjük.

Eredményünk $p=q=r=s=\frac{1}{4}$ esetén

$$U_{(i,j)\to(\mu,0)}=\frac{2}{m+1}\sum_{l=1}^{m}\sin\frac{il\pi}{m+1}\sin\frac{\mu l\pi}{m+1}\frac{\operatorname{sh}(n+1-j)\vartheta_l}{\operatorname{sh}(n+1)\vartheta_l}. \tag{3.17}$$

Utóbbi eredményünk megegyezik MC CREA és WHIPPLE eredményével. A nevezett szerzők eredményüket egy hidrodinamikai modell segítségével érték el. Megmutatjuk, hogy eredményük mátrixelméleti úton közvetlenül is kiszámítható a (3.5), ill. (3.6) formulák felhasználása nélkül, ha ismerjük a (3.1) alatti P hipermátrix spektrálfelbontását.

Amikor a (3.5) formulában a (3.6) alatti összegezést elvégezzük, lényegében az alábbi mátrix-összegezést hajtjuk végre:

$$E+P+P^2+\cdots+\cdots=(E-P)^{-1}, \tag{3.18}$$

ahol P-vel a (3.1) alakú nm-edrendű hipermátrixot, E-vel az nm-edrendű egységmátrixot jelöltük.

Az $(E-P)^{-1}$ hipermátrix elemeit az alábbi egyszerű meggondolás alapján nyerhetjük:

$(E-P)^{-1}$ sajátvektorai megegyeznek $(E-P)$ sajátvektoraival (amelyek nem mások, mint P sajátvektorai), sajátértékei pedig $(E-P)$ sajátértékeinek reciprokjai. A P hipermátrix sajátértékeit λ_k-val jelölve ($k=1,2,\ldots,nm$), az $(E-P)$ hipermátrix sajátértékei az $1-\lambda_k$ számok, az $(E-P)^{-1}$ hipermátrix sajátértékei pedig az $\frac{1}{1-\lambda_k}$ számok ($k=1,2,\ldots,nm$).

Mivel[12]

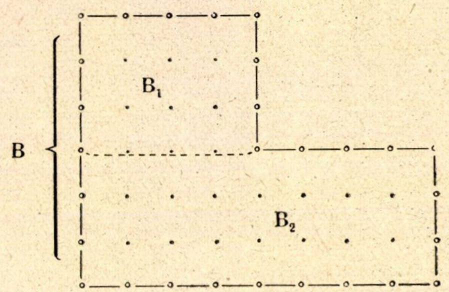
$$\frac{1}{1-\lambda_k}=\frac{1}{1-\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1}-\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m+1}},$$

ami megegyezik a (3.15) alatti kifejezéssel, P sajátvektorainak ismeretében (3.16) közvetlenül felírható, s természetesen (3.17) is.

4. Síkbeli elnyelő-falas bolyongás tetszőleges alakú tartományon

Bolyongjon a részecske egy tetszőleges alakú, elnyelő pontokkal határolt rácspont-tartományon. Válaszolni kívánunk arra a kérdésre, mennyi annak valószínűsége, hogy a részecske egy (i,j) belső pontból indulva mozgását egy kiválasztott $(\mu, 0)$ elnyelő-pontban fejezi be meghatározatlan számú lépés után.

Szemléletesség kedvéért tekintsük az alábbi egyszerű elrendezést:



[12] Mint könnyen látható: $|\lambda_k|<1$.

A részecske most a B tartományon bolyonghat. Írjuk fel az egyes belső pontokba való átmenetele valószínűségeit tartalmazó P hipermátrixot.

$$P = \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccccccc|ccccccc}
\hline
o&p&o & s&& & && & &&&&&& & &&&&&\\
q&o&p & &s& & && & &&&&&& & &&&&&\\
o&q&o & &&s & && & &&&&&& & &&&&&\\
\hline
r&& & o&p&o & s&& & &&&&&& & &&&&&\\
&r& & q&o&p & &s& & &&&&&& & &&&&&\\
&&r & o&q&o & &&s & &&&&&& & &&&&&\\
\hline
&& & r&& & o&p&o & s&&&&&& & &&&&&\\
&& & &r& & q&o&p & &s&&&&& & &&&&&\\
&& & &&r & o&q&o & &&s&&&& & &&&&&\\
\hline
&& & && & r&& & o&p&&&&& & s&&&&&&\\
&& & && & &r& & q&o&p&&&& & &s&&&&&\\
&& & && & &&r & &q&o&p&&& & &&s&&&&\\
&& & && & && & &&q&o&p&& & &&&s&&&\\
&& & && & && & &&&q&o&p& & &&&&s&&\\
&& & && & && & &&&&q&o&p & &&&&&s&\\
&& & && & && & &&&&&q&o & &&&&&&s\\
\hline
&& & && & && & r&&&&&& & o&p&&&&&\\
&& & && & && & &r&&&&& & q&o&p&&&&\\
&& & && & && & &&r&&&& & &q&o&p&&&\\
&& & && & && & &&&r&&& & &&q&o&p&&\\
&& & && & && & &&&&r&& & &&&q&o&p&\\
&& & && & && & &&&&&r& & &&&&q&o&p\\
&& & && & && & &&&&&&r & &&&&&q&o\\
\hline
\end{array}\right| \tag{4.1}$$

A kérdéses valószínűséget most is az $(E-P)^{-1}$ inverz hipermátrix megfelelő eleme fogja szolgáltatni. Amennyiben ezen hipermátrix elemeit ki tudjuk számítani, máris megkapjuk a választ a felvetett kérdésre.

Tekintsünk el átmenetileg a bekarikázott 6 elemtől, írjunk helyükbe 0-t, ezáltal P átmegy egy P' hipermátrixba, amely a következőképpen particionálható:

$$P' = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

ahol P_1 az ábrán jelzett B_1 tartományon, P_2 pedig a B_2 tartományon történő bolyongásnak megfelelő hipermátrix.

Képezzük most az $(E-P')$ hipermátrixot.

$$(E-P') = \begin{bmatrix} (E-P_1) & 0 \\ 0 & (E-P_2) \end{bmatrix}.$$

Könnyen meghatározhatjuk az $(E-P')^{-1}$ reciprok hipermátrixot is, mert

$$(E-P')^{-1} = \begin{bmatrix} (E-P_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (E-P_2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Vezessük be az

$$(E-P')^{-1}=R, \quad (E-P_1)^{-1}=R_1, \quad (E-P_2)^{-1}=R_2$$

jelölést. Ekkor

$$R=\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}.$$

Az R_1, ill. R_2 reciprok hipermátrixok meghatározásának módját a téglalapon történő elnyelőfalas bolyongásnál ismertettük, ezeket a mátrixokat tehát ismertnek tekinthetjük.

Az $(E-P)^{-1}$ meghatározása $(E-P')^{-1}$ ismeretében a J. SHERMAN és W. J. MORRISON által kidolgozott mátrixelméleti eljárás ismételt alkalmazásával megoldható. Ezen eljárás szerint, ha az $(E-P')$ és $(E-P)$ mátrixok egyetlen elemben különböznek, mondjuk $(E-P')$-ben az i-edik sor j-edik eleme a_{ij}, $(E-P)$-ben az ugyanezen helyen álló elem pedig $a_{ij}+k$, míg a többi elem megegyezik, akkor $(E-P)^{-1}$-et az

$$(E-P)^{-1}=R-\frac{1}{k^{-1}+r_{ji}}r_i r^j \qquad \left(\text{ha} \quad r_{ji}\neq-\frac{1}{k}\right)$$

összefüggés szolgáltatja, ahol $R=(E-P')^{-1}$, r_i, ill. r^j az R mátrix i-edik oszlop-, ill. j-edik sorvektora, r_{ji} R j-edik sorának i-edik eleme. Ez esetben tehát egyetlen diád levonása szolgáltatná $(E-P)^{-1}$-et.

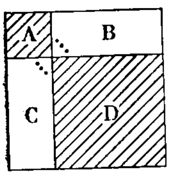
Példánkban $(E-P)$ az $(E-P')$ mátrixtól a diagonál blokkon kívüli 6 elemben különbözik, ennek megfelelően hatszor egymás után kell diádlevonást végeznünk, természetesen mindig az előző diád levonása után kapott reciprok mátrixot tekintve kisebbítendőnek.

Mivel téglalapokból tetszőleges alakú rácspont tartomány összerakható, eljárásunk tetszőleges tartományra alkalmazható. Az adott tartományt a vázolt példához hasonlóan téglalapok összegére bontjuk, felírjuk a teljes tartományon (példánkban a B tartományon) történő bolyongásnak megfelelő hipermátrixot, amelyben az egyes rész-téglalapokon történő bolyongásnak egy-egy diagonális blokk felel meg, s ezen felül a mátrixnak annyi pozitív eleme lesz, amennyi az egyes rész-téglalapok érintkezési pontjainak kétszeres száma. E pozitív elemeket 0-val helyettesítve, s a kapott diagonál blokkokból álló hipermátrixot a vele azonos rendű egységmátrixból levonva ismert módon invertálható, diagonális blokkokból álló hipermátrixot kapunk. Ezt a mátrixot elemenként módosítva a diagonál-blokkokon kívüli elemekkel, s SHERMAN—MORRISON tételét szukcesszíve alkalmazva meghatározhatjuk a kérdéses valószínűséget tartalmazó reciprok mátrixot. Módszerünk segítségével az egyes konkrét esetekben, természetesen a tartománytól függően, a keresett valószínűség explicit alakban is felírható.

Néhány megjegyzést kell tennünk a célhoz vezető lépések számának esetleges csökkentésére vonatkozólag.

Említettük, hogy a tartomány alakjára rátekintve, előre meg tudjuk mondani, hogy a tisztán diagonális blokkokból álló hipermátrix inverzéből hány diád szukcesszív levonásra lesz szükség. A levonandó diádok száma megegyezik a hipermátrix diagonálblokkokon kívüli elemeinek számával, amely szám viszont az egyes rész-téglalapok (példánkban a B_1 és B_2 tartományok) érintkezési belső pontjainak kétszeres száma. Nem túlságosan bonyolult tartományok esetén egyszerű mátrixelméleti meggondolás alapján a levonandó diádok száma felére csökkenthető. Ezen eljárást röviden az alábbi módon vázoljuk:

A példánkban szereplő $(E-P)$ hipermátrixot sematikusan ábrázolva nem csak az $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ alakú hipermátrixot könnyű invertálni, hanem az



$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ hipermátrixot is. Ugyanis:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix},$$

tehát itt is csak az A és D hipermátrix-blokkok inverzét kell ismernünk. Ezek után már csak a C blokk elemeinek megfelelő számú diád levonására lesz szükség ahhoz, hogy $(E-P)^{-1}$-et megkapjuk. Ezzel az eljárással a levonandó diádok száma éppen annyi, mint amennyi az egyes rész-téglalapok (példánkban a B_1 és B_2 tartományok) érintkezési pontjainak száma.

Az $(E-P)^{-1}$ mátrix inverzének meghatározására irányuló vizsgálataink mátrixelméleti szempontból lényegében azon problémára vonatkoznak, hogy ha egy ismert reciprokkal bíró mátrix néhány elemét más elemmel helyettesítjük, hogyan nyerjük az ismert reciprokmátrixból a módosított mátrix reciprokát. Az eddigiekben a kiindulásul szolgáló mátrix kijelölt elemeit egyenként módosítottuk, hogy SHERMAN—MORRISON tételét alkalmazhassuk. E tételt RÓZSA PÁL általánosította, s kidolgozott egy eljárást, amelynek segítségével az ismert reciprokkal bíró mátrix akárhány elemét egyszerre módosítva a reciprok mátrixból egy alkalmasan képezett mátrix levonásával megkapjuk a módosított mátrix reciprokát. Ezen kivonandó mátrix képezése során egy újabb mátrix-invertálási műveletet kell végeznünk, amely egyes esetekben azonban gyorsabban is célhoz vezethet, mint a diádok szukcesszív levonása. Azt, hogy mikor melyik eljárást alkalmazzuk, a mátrix rendjétől, struktúrájától és egyéb gyakorlati (pl. elektronikus gépeknél programozási) szempontoktól kell függővé tennünk. Az alábbiakban röviden vázoljuk a módosított mátrix reciprokának RÓZSA által kidolgozott módszerét,[13] a számunkra érdekes esetre vonatkoztatva.

Legyen $A = [a_{ij}]$ N-edrendű kvadratikus mátrix, amelynek reciprokát ismerjük:

$$A^{-1} = R = [r_{ij}].$$

A módosított mátrix, amelynek reciprokát keressük, legyen $B = A + K$, ahol

$$K = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} e_i k_{ij} e^j = \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} e_{\alpha_i} k_{\alpha_i \beta_j} e^{\beta_j} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \mu \\ j = 1, 2, \ldots, \mu \end{pmatrix},$$

az e_i N-edrendű oszlopvektor i-edik eleme 1, a többi 0, az e^j N-edrendű sorvektor j-edik eleme 1, a többi 0, α_i és β_i azon sorok és oszlopok indexei, amelyekre $k_{\alpha_i \beta_j} \neq 0$.

Ekkor

$$B^{-1} = R - R^{1, 2, \ldots, N}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu} \left(K^{-1} + R^{\beta_1, \ldots, \beta_\mu}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu}\right)^{-1} R^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu}_{1, 2, \ldots, N}.$$

Ha A helyébe a fentebb vázolt $(E—P')$ hipermátrixot, B helyébe az $(E—P)$ hipermátrixot tesszük, ahol P a (4. 1) hipermátrixot jelöli, akkor a vázolt példában:

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s \\ \hline -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

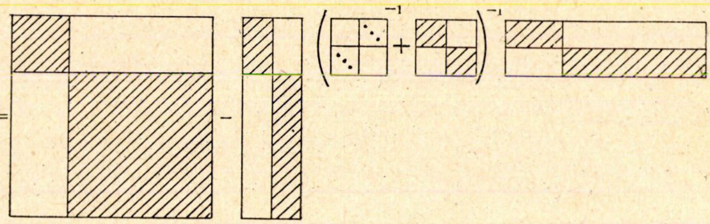
$$K^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{1}{r} & & \\ & & & & -\frac{1}{r} & \\ & & & & & -\frac{1}{r} \\ \hline -\frac{1}{s} & & & & & \\ & -\frac{1}{s} & & & & \\ & & -\frac{1}{s} & & & \end{array}\right]$$

[13] Lásd [9] 11—17 oldal.

A (4. 1) hipermátrix esetében

$$(E-P)^{-1} = R - R^{1,2,\dots,23}_{7,8,9,10,11,12}(K^{-1} + R^{7,8,9,10,11,12}_{7,8,9,10,11,12})^{-1} R^{7,8,9,10,11,12}_{1,2,\dots,23},$$

ahol $R = (E-P')^{-1}$, P' pedig az a hipermátrix, amelyet a (4. 1) alatti P hipermátrixból a bekarikázott 6 elem 0-val való helyettesítése útján nyerünk. Sematikusan az alábbi mátrixműveleteket kell végeznünk:

$(E-P)^{-1} =$ 

Az üresen hagyott helyeken mindenütt 0 áll.

A zárójelen belüli hatodrendű mátrix inverzének kiszámítása lényegében harmadrendű mátrixok invertálását igényli. Ugyanis mivel az invertálandó mátrix

$$Q = \left[\begin{array}{ccc:ccc} & & & -\frac{1}{r} & & \\ & A & & & -\frac{1}{r} & \\ & & & & & -\frac{1}{r} \\ \hdashline -\frac{1}{s} & & & & & \\ & -\frac{1}{s} & & & D & \\ & & -\frac{1}{s} & & & \end{array}\right]$$

alakú, Q^{-1} kiszámítását elvégezhetjük akár úgy, hogy miután kiszámítottuk A^{-1}-et és D^{-1}-et, kiindulunk az

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

mátrixból és szukcesszíve alkalmazzuk a SHERMAN—MORRISON-tételt, amelynek során most hatodrendű diádokat kell szukcesszíve levonnunk, akár úgy, hogy felhasználjuk az alábbi mátrix-azonosságot[14]:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ (B-AC^{-1}D)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

[14] Lásd: [1].

Ennek alapján

$$Q^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{1}{r} & & \\ & A & & & -\frac{1}{r} & \\ & & & & & -\frac{1}{r} \\ \hline -\frac{1}{s} & & & & & \\ & -\frac{1}{s} & & & D & \\ & & -\frac{1}{s} & & & \end{array}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} D\left(AD-\frac{1}{rs}E\right)^{-1} & -\frac{1}{r}\left(DA-\frac{1}{rs}E\right)^{-1} \\ -\frac{1}{s}\left(AD-\frac{1}{rs}E\right)^{-1} & A\left(DA-\frac{1}{rs}E\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Mindkét esetben csak harmadrendű mátrixok invertálására van szükség.

5. Bolyongás síkbeli rács-téglalapon visszaverő falak alkalmazásával

7. TÉTEL. *Annak a valószínűsége, hogy a bolyongó részecske N lépésben az (i, j) pontból az (μ, ν) pontba menjen át:*

$$
\begin{aligned}
P^{(N)}_{(ij)\to(\mu\nu)} = {} & \frac{2^{N+2}}{mn} rp \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{j-\nu}{2}} \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\left(\sin\frac{il\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}}\sin\frac{(i-1)l\pi}{m}\right)}{1-2\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m}} \cdot \right. \\
& \cdot \frac{\left(\sin\frac{\mu l\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}}\sin\frac{(\mu-1)l\pi}{m}\right)}{1-2\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m}} \cdot \frac{\left(\sin\frac{jk\pi}{n} - \sqrt{\frac{p}{q}}\sin\frac{(j-1)k\pi}{n}\right)}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n}} \cdot \\
& \left. \cdot \frac{\left(\sin\frac{\nu k\pi}{n} - \sqrt{\frac{p}{q}}\sin\frac{(\nu-1)k\pi}{n}\right)}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n}} \left(\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n} + \sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m}\right)^N \right\} + \\
(5.1) \quad & + \frac{2^{N+1}}{n} \frac{1-\frac{r}{s}}{1-\left(\frac{r}{s}\right)^m} \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1} p \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{j-\nu}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\frac{jk\pi}{n} - \sqrt{\frac{p}{q}}\sin\frac{(j-1)k\pi}{n}\right) \cdot \\
& \cdot \left(\sin\frac{\nu k\pi}{n} - \sqrt{\frac{p}{q}}\sin\frac{(\nu-1)k\pi}{n}\right)\left(\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n} + \frac{r+s}{2}\right)^N + \\
& + \frac{2^{N+1}}{m} \frac{1-\frac{p}{q}}{-1\left(\frac{p}{q}\right)^n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu-1} r \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}} \sum_{l=1}^{m} \left(\sin\frac{il\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}}\sin\frac{(i-1)l\pi}{m}\right) \cdot \\
& \cdot \left(\sin\frac{\mu l\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}}\sin\frac{(\mu-1)l\pi}{m}\right)\left(\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m} + \frac{q+q}{2}\right)^N + \\
& + \frac{\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1-\frac{r}{s}\right)}{\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)^n\right]\left[1-\left(\frac{r}{s}\right)^m\right]} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1} .
\end{aligned}
$$

A stacionárius határeloszlás:

$$\lim_{N\to\infty} P^{(N)}_{(ij)\to(\mu\nu)} = \frac{\left(1-\dfrac{p}{q}\right)\left(1-\dfrac{r}{s}\right)}{\left[1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^n\right]\left[1-\left(\dfrac{r}{s}\right)^m\right]}\left(\frac{p}{q}\right)^{\nu-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1}.$$

BIZONYÍTÁS. Az (1.6) hipermátrix direkt-szorzatok összegeként az alábbi módon írható fel:

$$P=\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0\\ q & 0 & p & 0\\ 0 & q & 0 & p\\ 0 & 0 & q & p\end{bmatrix}\cdot\times E_3+E_4\cdot\times\begin{bmatrix} r & s & 0\\ r & 0 & s\\ 0 & r & s\end{bmatrix}=A_4\cdot\times E_3+E_4\cdot\times B_3.$$

m sor és n oszlop esetén pedig

$$P=A_n\cdot\times E_m+E_n\cdot\times B_m. \tag{5.2}$$

Szimmetrikus bolyongás esetén

$$P=A_n\cdot\times E_m+E_n\cdot\times A_m, \tag{5.3}$$

ahol például

$$A_4=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

Az

$$A_n=[u_1, u_2, \dots, u_n]\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1'^* \\ u_2'^* \\ \vdots \\ u_n'^*\end{bmatrix},$$

illetve

$$B_m=[v_1, v_2, \dots, v_m]\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1'^* \\ v_2'^* \\ \vdots \\ v_m'^*\end{bmatrix}$$

spektrálfelbontásokban most

$$
(5.4)\qquad
\begin{aligned}
a_k &= 2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k=1,2,\ldots,n-1) \quad \text{és} \quad a_n = p+q,\\
b_l &= 2\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m} \qquad (l=1,2,\ldots,m-1) \quad \text{és} \quad b_m = r+s,
\end{aligned}
$$

$$
(5.5)\qquad
\begin{aligned}
u_{ik} &= \sqrt{\frac{2}{n}}\,p\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{i}\left(\sin\frac{ik\pi}{n} - \sqrt{\frac{q}{p}}\sin\frac{(i-1)k\pi}{u}\right),\\
&\qquad \text{ha} \quad i=1,2,\ldots,n-1 \quad \text{és} \quad u_{in}=1,\\
u'_{kj} &= \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{j}\frac{\sin\frac{jk\pi}{n} - \sqrt{\frac{q}{p}}\sin\frac{(j-1)k\pi}{n}}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n}},\\
&\text{ha} \quad k=1,2,\ldots,n-1 \quad \text{és} \quad u'_{nj} = \frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n}}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}.
\end{aligned}
$$

Analóg kifejezéseket kapunk a $\mathbf{v}_i$ és $\mathbf{v}_j'^{*}$ vektorok megfelelő elemeire, ha az $n=m$, $p=r$, $q=s$ helyettesítést elvégezzük.

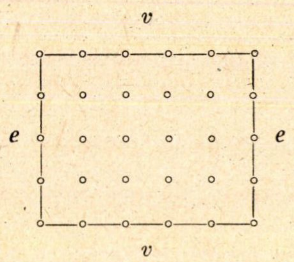
Felhasználva a (3. 4′) formulát, a tétel állítását kapjuk.

Felírjuk *szimmetrikus bolyongás esetére* annak valószínűségét, hogy a részecske N lépésben kiinduló helyzetébe térjen vissza. Az (5. 1) formulából egyszerű számítással kapjuk:

$$
(5.6)\qquad
\begin{aligned}
P^{(N)}_{(ij)\to(ij)} = \frac{1}{mn}\Bigg\{ & 1 + 2\sum_{l=1}^{m}\left(\cos\frac{(2i-1)l\pi}{4m}\sin\frac{l\pi}{4m}\right)^{2}\left(\cos\frac{l\pi}{m}\right)^{2N} + \\
& + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{(2j-1)k\pi}{4n}\sin\frac{k\pi}{4n}\right)^{2}\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{2N} + \\
& + 4\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\cos\frac{(2i-1)l\pi}{4m}\cos\frac{(2j-1)k\pi}{4n}\sin\frac{l\pi}{4m}\sin\frac{k\pi}{4n}\right)^{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{l\pi}{m}\right)\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{k\pi}{n}\right)}\cdot \\
& \cdot\left[\frac{\cos\frac{l\pi}{m}+\cos\frac{k\pi}{n}}{2}\right]^{N}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

6. Síkbeli bolyongás rács-téglalapon elnyelő- és visszaverő falak együttes alkalmazása esetén

Modellünket az alábbi ábra szemlélteti, ahol e elnyelő, v visszaverő falat jelöl. A bolyongási tartományt jelentő rácspontokat m sorban és $(n+1)$ oszlopban helyezzük el, a sorok számozása $1, 2, \ldots, m$; az oszlopok számozása: $1, 2, \ldots, n+1$.



Az ábrán jelzett esetben az átmenetvalószínűségeket tartalmazó hipermátrix számunkra érdekes része (az elnyelőfalas modelleknél alkalmazott meggondolás alapján) a következő:

$$(6.1)\qquad P=\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
r & p & 0 & 0 & s & & & & & & & \\
q & r & p & 0 & & s & & & & & & \\
0 & q & r & p & & & s & & & & & \\
0 & 0 & q & r & & & & s & & & & \\
\hline
r & & & & 0 & p & 0 & 0 & s & & & \\
& r & & & q & 0 & p & 0 & & s & & \\
& & r & & 0 & q & 0 & p & & & s & \\
& & & r & 0 & 0 & q & 0 & & & & s \\
\hline
& & & & r & & & & s & p & 0 & 0 \\
& & & & & r & & & q & s & p & 0 \\
& & & & & & r & & 0 & q & s & q \\
& & & & & & & r & 0 & 0 & p & s
\end{array}\right]=\begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & p \end{bmatrix}\cdot\times E_3+E_4\cdot\times\begin{bmatrix} r & s & 0 \\ r & 0 & s \\ 0 & r & s \end{bmatrix}=$$

$$=A_4\cdot\times E_3+E_4\cdot\times B_3.$$

8. TÉTEL. *Annak valószínűsége, hogy a részecske az (i, j) pontból N lépésben a (μ, ν) pontba megy át:*

$$P^{(N)}_{(ij)\to(\mu\nu)}=\frac{2^{N+2}}{mn}\,r\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{j-\nu}{2}}\left\{\sum_{l=1}^{m-1}\frac{\left(\sin\frac{il\pi}{m}-\sqrt{\frac{r}{s}}\sin\frac{(i-1)l\pi}{m}\right)}{1-2\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m}}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\left(\sin\frac{\mu l\pi}{m}-\sqrt{\frac{r}{s}}\sin\frac{(\mu-1)l\pi}{m}\right)}{1-2\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m}}\cdot$$

$$(6.2)\qquad\left.\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{jk\pi}{n+1}\sin\frac{\nu k\pi}{n+1}\left(\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1}+\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m}\right)^{N}\right\}+$$

$$+\frac{2^{N}}{n}\,\frac{1-\frac{r}{s}}{1-\left(\frac{r}{s}\right)^{m}}\left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j-\nu}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{jk\pi}{n+1}\sin\frac{\nu k\pi}{n+1}\left(\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1}+\frac{r+s}{2}\right)^{N}.$$

BIZONYÍTÁS. m sor és $n+1$ oszlop esetén $P = A_n \cdot\times E_m + E_m \cdot\times B_n$ A_n és B_m spektrálfelbontása számunkra már ismert. Felhasználva a (3. 4'), (3. 5) valamint az (5. 3) és (5. 4) összefüggéseket, a tétel állítását kapjuk.

Hasonló meggondolás alapján, mint amelyet az elnyelő-falas téglalapon történő bolyongásnál alkalmaztunk, annak valószínűsége, hogy a részecske az (i, j) pontból indulva $N+1$ lépésben a $(\mu, 0)$ pontban nyelődjék el:

$$P^{N+1}_{(i,j)\to(\mu,0)} = q P^{N}_{(i,j)\to(\mu,1)}$$

Ennek alapján:

$$P^{(N+1)}_{(i,j)\to(\mu,0)} = \frac{2^{N+2}}{m\cdot n} qr \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j-1}{2}} \cdot \tag{6. 3}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\frac{il\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin\frac{(i-1)l\pi}{m}\right) \cdot \left(\sin\frac{\mu l\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin\frac{(\mu-1)l\pi}{m}\right) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \sin\frac{jk\pi}{n+1} \sin\frac{k\pi}{n+1} \left(\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1} + \sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{m}\right)^{N} \right\} +$$

$$+ \frac{2^N}{n} \frac{1-\dfrac{r}{s}}{1-\left(\dfrac{r}{s}\right)^m} q \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j-1}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{jk\pi}{n+1} \sin\frac{k\pi}{n+1} \left(\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{n+1} + \frac{r+s}{2}\right)^{N}.$$

9. TÉTEL. *Annak a valószínűsége, hogy a részecske az (i, j) pontból indulva, meghatározatlan számú lépés után végül a $(\mu, 0)$ pontban nyelődik el:*

$$P_{(i,j)\to(\mu,0)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \left(\sin\frac{il\pi}{m} - \sin\frac{(i-1)l\pi}{m}\right) \cdot\right. \tag{6. 4}$$

$$\left. \cdot \left(\sin\frac{\mu l\pi}{m} - \sin\frac{(\mu-1)l\pi}{m}\right) \frac{\operatorname{sh}(n+1-j)\vartheta}{\operatorname{sh}(n+1)\vartheta_l} + \frac{\operatorname{sh}(n+1-j)\vartheta}{\operatorname{sh}(n+1)\vartheta} \right\} =$$

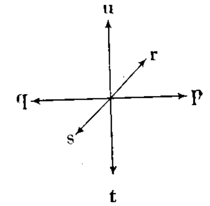
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{j}{n+1}\right) + \frac{2}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \cos\left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{l\pi}{m} \cos\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\frac{l\pi}{m} \sin^2\frac{l\pi}{2m} \frac{\operatorname{sh}(n+1)-j)\vartheta_l}{\operatorname{sh}(n+1)\vartheta_l}.$$

ahol $2\operatorname{ch}\vartheta_l = 4 - 2\cos\frac{l\pi}{m}$, $2\operatorname{ch}\vartheta = 2.$

BIZONYÍTÁS: A (6. 3) formulában N szerint összegezünk. Hasonlóan, mint az elnyelő falas esetnél, most még k szerint is tudunk összegezni, s ezáltal képletünk rövidebb alakot ölt. Egyszerűség kedvéért eredményünket szimmetrikus bolyongás esetére írtuk fel.

7. Bolyongás a 3-dimenziós térben

A síkbeli bolyongásra vonatkozó eredményeink alapján nem nehéz eredményekre jutni 3-dimenziós, elnyelő- vagy visszaverő-fallal ellátott hasáb alakú rácspont-tartományon történő bolyongás esetében. A bolyongó részecske a tartomány bármely belső pontjából a 6 szomszédos pont valamelyikébe lép, rendre p, q, r, s, t, u valószínűségekkel az alábbi irányítás szerint:



Álljon a bolyongási tartomány $c+2$ rétegből, ahol minden réteget egy $b+2$ sorból és $a+2$ oszlopból álló rácstéglalap alkot. Ha az elnyelő falakat nem tekintjük, a tartomány c rétegből, rétegenként b sorból és a oszlopból áll.

Ki akarjuk számítani annak valószínűségét, hogy a bolyongó részecske N lépésben az (x_0, y_0, z_0) egész koordinátákkal bíró pontból az (x_1, y_1, z_1) egész koordinátájú pontba jusson, azaz a

$$P^{(N)}_{(x_0,\, y_0,\, z_0)\to(x_1,\, y_1,\, z_1)}$$

átmenet-valószínűségeket.

Szemléletesség céljából tekintsük az $a=4$, $b=3$, $c=3$ esetet. Ekkor a tartomány belső pontjain történő bolyongás egylépéses átmenet valószínűségeit tartalmazó hipermátrix a következő: (l. 316. old.)

A hipermátrix tehát abc-edrendű és diagonál blokkjait a kétdimenziós bolyongás hipermátrixa alkotja. Ezen összetett hipermátrix direkt szorzatok összegeként a következő alakban írható fel:

$$A_a\cdot\times E_b\cdot\times E_c+E_a\cdot\times B_b\cdot\times E_c+E_a\cdot\times E_b\cdot\times C_c,$$

ahol a fenti példában:

$$A_4=\begin{bmatrix}0 & p & 0 & 0\\ q & 0 & p & 0\\ 0 & q & 0 & p\\ 0 & 0 & q & p\end{bmatrix},\qquad B_3=\begin{bmatrix}0 & s & 0\\ r & 0 & s\\ 0 & r & 0\end{bmatrix},\qquad C_3=\begin{bmatrix}0 & t & 0\\ u & 0 & t\\ 0 & u & 0\end{bmatrix},$$

Az N lépéses átmenet-valószínűségeket ugyanezen összetett hipermátrix N-edik hatványának elemei szolgáltatják.

$$
P=\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\begin{smallmatrix}0&p&0&0\\q&0&p&0\\0&q&0&p\\0&0&q&0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}s&&&\\&s&&\\&&s&\\&&&s\end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix}t&&&\\&t&&\\&&t&\\&&&t\end{smallmatrix} & & & & & \\ \hline
\begin{smallmatrix}r&&&\\&r&&\\&&r&\\&&&r\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0&p&0&0\\q&0&p&0\\0&q&0&p\\0&0&q&0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}s&&&\\&s&&\\&&s&\\&&&s\end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix}t&&&\\&t&&\\&&t&\\&&&t\end{smallmatrix} & & & & \\ \hline
 & \begin{smallmatrix}r&&&\\&r&&\\&&r&\\&&&r\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0&p&0&0\\q&0&p&0\\0&q&0&p\\0&0&q&0\end{smallmatrix} & & & \begin{smallmatrix}t&&&\\&t&&\\&&t&\\&&&t\end{smallmatrix} & & & \\ \hline
\begin{smallmatrix}u&&&\\&u&&\\&&u&\\&&&u\end{smallmatrix} & & & \begin{smallmatrix}0&p&0&0\\q&0&p&0\\0&q&0&p\\0&0&q&0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}s&&&\\&s&&\\&&s&\\&&&s\end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix}t&&&\\&t&&\\&&t&\\&&&t\end{smallmatrix} & & \\ \hline
 & \begin{smallmatrix}u&&&\\&u&&\\&&u&\\&&&u\end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix}r&&&\\&r&&\\&&r&\\&&&r\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0&p&0&0\\q&0&p&0\\0&q&0&p\\0&0&q&0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}s&&&\\&s&&\\&&s&\\&&&s\end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix}t&&&\\&t&&\\&&t&\\&&&t\end{smallmatrix} & \\ \hline
 & & \begin{smallmatrix}u&&&\\&u&&\\&&u&\\&&&u\end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix}r&&&\\&r&&\\&&r&\\&&&r\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0&p&0&0\\q&0&p&0\\0&q&0&p\\0&0&q&0\end{smallmatrix} & & & \begin{smallmatrix}t&&&\\&t&&\\&&t&\\&&&t\end{smallmatrix} \\ \hline
 & & & \begin{smallmatrix}u&&&\\&u&&\\&&u&\\&&&u\end{smallmatrix} & & & \begin{smallmatrix}0&p&0&0\\q&0&p&0\\0&q&0&p\\0&0&q&0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}s&&&\\&s&&\\&&s&\\&&&s\end{smallmatrix} & \\ \hline
 & & & & \begin{smallmatrix}u&&&\\&u&&\\&&u&\\&&&u\end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix}r&&&\\&r&&\\&&r&\\&&&r\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0&p&0&0\\q&0&p&0\\0&q&0&p\\0&0&q&0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}s&&&\\&s&&\\&&s&\\&&&s\end{smallmatrix} \\ \hline
 & & & & & \begin{smallmatrix}u&&&\\&u&&\\&&u&\\&&&u\end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix}r&&&\\&r&&\\&&r&\\&&&r\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0&p&0&0\\q&0&p&0\\0&q&0&p\\0&0&q&0\end{smallmatrix}
\end{array}\right|
$$

Ennek kiszámításához szükségünk lesz az (V) és (VI) formulák könnyen belátható általánosítására:

LEMMA. *Ha az A hipermátrix előállítható*

$$A_1\cdot\times E\cdot\times\cdots\cdot\times E+E\cdot\times A_2\cdot\times\cdots\cdot\times E+\cdots+E\cdot\times E\cdot\times\cdots\cdot\times A_n$$

alakban, akkor

$$\text{(VII)}\qquad A^N=\sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_n}(\overset{1}{\breve{u}}_{i_1}\cdot\times\overset{2}{\breve{u}}_{i_2}\cdot\times\cdots\cdot\times\overset{n}{\breve{u}}_{i_n})(\overset{1}{\breve{a}}_{i_1}+\overset{2}{\breve{a}}_{i_2}+\cdots+\overset{n}{\breve{a}}_{i_n})^N\cdot$$

$$\cdot(\overset{1}{\breve{u}}{}^*_{i_1}\cdot\times\overset{2}{\breve{u}}{}^*_{i_2}\cdot\times\cdots\cdot\times\overset{n}{\breve{u}}{}^*_{i_n}),$$

ahol $\overset{k}{\breve{a}}_k$ *az* A_k *mátrix sajátértékeit,* $\overset{k}{\breve{u}}_{i_k}$, *ill.* $\overset{k}{\breve{u}}^*_{i_k}$ *pedig ugyanezen mátrix jobb-, ill. baloldali sajátvektorait jelöli.*

10. TÉTEL. *Annak valószínűsége, hogy az* (x_0, y_0, z_0) *rácspontból induló részecske* N *lépésben az* (x_1, y_1, z_1) *rácspontba menjen át:*

$$P^{(N)}_{(x_0,y_0,z_0)\to(x_1,y_1,z_1)} = \frac{2^{N+3}}{(a+1)(b+1)(c+1)}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{x_0-x_1}{2}}\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{y_0-y_1}{2}}\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{z_0-z_1}{2}}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{c}\cdot$$

$$\tag{7.1} \cdot\sin\frac{x_0k\pi}{a+1}\sin\frac{x_1k\pi}{a+1}\sin\frac{y_0l\pi}{b+1}\sin\frac{y_1l\pi}{b+1}\sin\frac{z_0m\pi}{c+1}\sin\frac{z_1m\pi}{c+1}\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{a+1}+\sqrt{rs}\cos\frac{l\pi}{b+1}+\sqrt{tu}\cos\frac{m\pi}{c+1}\right)^N.$$

BIZONYÍTÁS. Felhasználva a (VII) összefüggést, valamint az A_a, B_b, és C_c mátrixok spektrálfelbontására kapott eredményeket, a síkbeli bolyongásnál követett eljárással analóg módon nyertük a keresett valószínűségre a (7. 1) összefüggést.

Szimmetrikus bolyongás esetén, azaz $p=q=r=s=t=u=\frac{1}{6}$ esetében összefüggésünk a következő alakot ölti:

$$\tag{7.2} \begin{gathered}\frac{2^3}{3^N(a+1)(b+1)(c+1)}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{c}\sin\frac{x_0k\pi}{a+1}\sin\frac{x_1k\pi}{a+1}\sin\frac{y_0l\pi}{b+1}\sin\frac{y_1l\pi}{b+1}\cdot\\ \cdot\sin\frac{z_0m\pi}{c+1}\sin\frac{z_1m\pi}{c+1}\left(\cos\frac{k\pi}{a+1}+\cos\frac{l\pi}{b+1}+\cos\frac{m\pi}{c+1}\right)^N.\end{gathered}$$

Ez utóbbi eredményünk megegyezik JORDAN K. eredményével[14].

Annak valószínűsége, hogy a bolyongó részecske az (x_0, y_0, z_0) rácspontból indulva $N+1$ lépésben az $(x_1, y_1, 0)$ pontban nyelődjék el, nyilván most:

$$\tag{7.3} P^{(N+1)}_{(x_0,y_0,z_0)\to(x_1,y_1,0)} = tP^{(N)}_{(x_0,y_0,z_0)\to(x_1,y_1,1)}.$$

A kívánt elnyelődési valószínűséget tehát megkapjuk, ha a (7. 1), ill. (7. 2) formulákban $z_1=1$-et írunk, és t-vel, ill. $\frac{1}{6}$-dal szorzunk.

3-dimenziós esetben is válaszolni kívánunk arra a kérdésre, mennyi annak valószínűsége, hogy a bolyongó részecske meghatározatlan számú lépés után egy kijelölt pontban nyelődik el. Eredményünket egyszerűség kedvéért szimmetrikus bolyongás esetére írjuk fel.

[14] Lásd [6].

A (7.2) formulában N szerint összegezve és alkalmazva a

$$3-\cos\frac{k\pi}{a+1}-\cos\frac{l\pi}{b+1}=\operatorname{ch}\vartheta_{kl}$$

helyettesítést, valamint elvégezve az m-szerinti összegezést, nyerjük:

$$P_{(x_0,\,y_0,\,z_0)\to(x_1,\,y_1,\,z_1)}=\frac{24}{(a+1)(b+1)}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{b}\sin\frac{x_0k\pi}{a+1}\sin\frac{x_1k\pi}{a+1}\cdot \tag{7.4}$$

$$\cdot\sin\frac{y_0l\pi}{b+1}\sin\frac{y_1l\pi}{b+1}\frac{\operatorname{sh}z_0\vartheta_{kl}\operatorname{sh}(n+1-z_1)\vartheta_{kl}}{\operatorname{sh}\vartheta_{kl}\operatorname{sh}(n+1)\vartheta_{kl}}.$$

$\frac{1}{6}$-dal szorozva és a $z_1=1$ helyettesítést elvégezve kapjuk a kívánt valószínűséget. Az utóbbi eredményünk megegyezik MC CREA és WHIPPLE eredményével.

Megjegyezzük, hogy az utóbbi eredmény ismét nem csak a (7.3) formulából kiindulva, hanem a 3-dimenziós bolyongásnak megfelelő P hipermátrixot alapul véve az $(E-P)^{-1}$ inverz hipermátrix elemeinek kiszámítása útján az N lépésre vonatkozó formulák kiszámítása nélkül közvetlenül is származtatható, akárcsak a kétdimenziós esetben.

Rámutatunk még, hogy a síkbeli esettel analóg módon, annak valószínűsége, hogy egy megjelölt rácspontból induló részecske végül is egy kijelölt elnyelő-rácspontban fejezze be életét, tetszőleges alakú hasábokból összerakható térbeli rácstartomány esetén kiszámítható.

Kiszámítjuk térbeli bolyongás esetén is annak valószínűségét, hogy a részecske N lépés után még életben van. Jelöljük ezt a valószínűséget Q_N-nel. A síkbeli bolyongásnál követett gondolatmenettel teljesen analóg módon nyerjük az eredményt, amely szimmetrikus bolyongás esetén a következő:

$$Q_N=\frac{2^3}{(a+1)(b+1)(c+1)}{\sum_{k=1}^{a}}'{\sum_{l=1}^{b}}'{\sum_{m=1}^{c}}'\sin\frac{x_0k\pi}{a+1}\sin\frac{y_0l\pi}{b+1}\sin\frac{z_0m\pi}{c+1}\cdot \tag{7.5}$$

$$\cdot\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2(a+1)}\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{2(b+1)}\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2(c+1)}\left[\frac{\cos\frac{k\pi}{a+1}+\cos\frac{l\pi}{b+1}+\cos\frac{m\pi}{c+1}}{3}\right]^N,$$

ahol az összegezést csak páratlan k, l, m-re kell elvégezni.

Ha a ξ valószínűségi változó jelöli az elnyelődés előtti lépések számát akkor

$$\mathbf{P}(\xi\leq N)=1-Q_N$$

szolgáltatja ξ eloszlásfüggvényét.

Annak valószínűsége, hogy a részecske pontosan N lépésben nyelődik el az elnyelőfal valamelyik pontjában:

$$\text{(7.6)}\quad \mathbf{P}(\xi=N)=\mathbf{P}(\xi>N-1)-\mathbf{P}(\xi>N)=Q_{N-1}-Q_N=$$

$$=\frac{2^3}{(a+1)(b+1)(c+1)}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{c}\sin\frac{x_0k\pi}{a+1}\sin\frac{y_0l\pi}{b+1}\sin\frac{z_0m\pi}{c+1}\cdot$$

$$\cdot\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2(a+1)}\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{2(b+1)}\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2(c+1)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\cos\frac{k\pi}{a+1}+\cos\frac{l\pi}{b+1}+\cos\frac{m\pi}{c+1}}{3}\right]^{N-1}\left(1-\frac{\cos\frac{k\pi}{a+1}+\cos\frac{l\pi}{b+1}+\cos\frac{m\pi}{c+1}}{3}\right).$$

A várható elnyelődési lépésszám pedig:

$$\text{(7.7)}\quad \mathbf{M}(\xi)=\frac{4}{(a+1)(b+1)(c+1)}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{c}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin\frac{x_0k\pi}{a+1}\sin\frac{y_0l\pi}{b+1}\sin\frac{z_0m\pi}{c+1}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2(a+1)}\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{2(b+1)}\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2(c+1)}}{\sin^2\frac{k\pi}{2(a+1)}+\sin^2\frac{l\pi}{2(b+1)}+\sin^2\frac{m\pi}{2(c+1)}}.$$

8. Bolyongás az n-dimenziós térben

A (VII). összefüggés alapján a két- és háromdimenziós bolyongásra vonatkozó eredményeink n-dimenziós rács-téglán történő bolyongásra is általánosítható mind elnyelő, mind visszaverő falas esetben. Itt most csak az elnyelőfalas bolyongással foglalkozunk, s anélkül, hogy teljességre törekednénk, fölírjuk néhány eredményünk n-dimenzióra való általánosítását.

Legyenek a méretek az n-dimenziós elnyelő-fallal övezett tégla belső, el nem nyelő pontjait tekintve, rács-egységben mérve: a_1-1 $a_2-1, \ldots, a_n-1$.

10. TÉTEL. *Végezzen a részecske szimmetrikus bolyongást, azaz egy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rácspontból bármely szomszédos rácspontba lépjen $\frac{1}{2n}$ valószínűséggel. Ekkor annak valószínűsége, hogy a részecske az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rácspontból N lépésben az $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rácspontba jusson:*

$$\text{(8.1)}\quad \frac{2^n}{a_1a_2\ldots a_n}\sum_{k_1=1}^{a_1-1}\sum_{k_2=1}^{a_2-1}\cdots\sum_{k_n=1}^{a_n-1}\sin\frac{x_1k_1\pi}{a_1}\sin\frac{y_1k_1\pi}{a_1}\sin\frac{x_2k_2\pi}{a_2}\sin\frac{y_2k_2\pi}{a_2}\cdots$$

$$\cdots\sin\frac{x_nk_n\pi}{a_n}\sin\frac{y_nk_n\pi}{a_n}\cdot\left[\frac{\cos\frac{k_1\pi}{a_1}+\cos\frac{k_2\pi}{a_2}+\cdots+\cos\frac{k_n\pi}{a_n}}{n}\right]^N.$$

Annak valószínűsége, hogy a részecske pontosan N lépésben nyelődjék el valamelyik elnyelő pontban:

$$(8.2)\quad \frac{2^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \sum_{k_1=1}^{a_1-1}{}' \cdots \sum_{k_n=1}^{a_n-1}{}' \sin\frac{x_1 k_1 \pi}{a_1} \cdots \sin\frac{x_n k_n \pi}{a_n} \operatorname{ctg}\frac{k_1\pi}{2a_1} \cdots \operatorname{ctg}\frac{k_n \pi}{2a_n} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\cos\frac{k_1\pi}{a_1} + \cdots + \cos\frac{k_n\pi}{a_n}}{n}\right]^{N-1} \left(1 - \frac{\cos\frac{k_1\pi}{a_1} + \cdots + \cos\frac{k_n\pi}{a_n}}{n}\right).$$

A várható elnyelődési lépésszám, ha ξ jelöli az elnyelődésig megtett lépések számát:

$$(8.3)\quad \mathbf{M}(\xi) = \frac{2^{n-1}}{a_1 \dots a_n} \sum_{k=1}^{a_1-1} \cdots \sum_{k_n-1}^{a_n-1} \frac{\sin\frac{x_1 k_1 \pi}{a_1} \cdots \sin\frac{x_n k_n \pi}{a_n} \operatorname{ctg}\frac{k_1\pi}{2a_1} \cdots \operatorname{ctg}\frac{k_n\pi}{2a_n}}{\sin^2\frac{k_1\pi}{2a_1} + \cdots + \sin^2\frac{k_n\pi}{2a_n}}.$$

Hasonló módon általánosíthatók a két- és háromdimenzióra vonatkozó többi eredményeink.

IRODALOM

[1] Aitken, A. C.: *Determinants and Matrices.* Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.

[2] McCrea, W. H.—Whipple, F. J. W.: Random Paths in Two- and Three Dimensions, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,* **60** (1940), 281—298.

[3] Egerváry J.: Mátrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. *MTA Mat.-Fiz. Oszt. Közleményei,* **3** (1953), 417—458.

[4] Egerváry J.: On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics, *Acta Sci. Math.* **15** (1954), 211—222.

[5] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Wiley, New York—London, 1950.

[6] Jordan. K: *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.

[7] Loève, M.: *Probability Theory.* Van Nostrand and Comp. Inc., New York, 1955.

[8] Rényi A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[9] Rózsa P.: A mátrixelmélet néhány új tételéről és azok alkalmazásairól a differencia- és differenciálegyenletek megoldására (Kandidátusi disszertáció), Budapest, 1956.

[10] Rózsa P.: Megjegyzések egy sztochasztikus mátrix spektrálfelbontásához. *MTA Mat.-Fiz. Oszt. Közleményei* **7** (1957), 199—205.

(Beérkezett: 1959. IX. 9.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A KOMPLEX-RENDŰ ÁLTALÁNOSÍTOTT WEYL-INTEGRÁLOK ÉS DERIVÁLTAK EGYSÉGES ELMÉLETÉHEZ, III.*

Írta: MIKOLÁS MIKLÓS

III. RÉSZ. $W(s)=f_{[s]}(x)$ FUNKCIONÁLIS SAJÁTSÁGAINAK ÉS ÉRTÉKKÉSZLETÉNEK VIZSGÁLATA

12. §. W_s-limeszek mint konvolúciók; „félcsoport-tulajdonságok"

1. Mind a 2. lemma, mind a VI. tétel bizonyításában lényegesen felhasználtunk bizonyos konvolúciókat s egyes, konvolúciókra vonatkozó tényeket. Most rátérünk az $f_{[s]}(x)$ W_s-limeszek azon fő sajátságainak rendszeres tárgyalására, amelyek konvolúció-alakjukban gyökereznek; ezúttal (az egyszerűség kedvéért) mindig feltételezzük, hogy

$$\gamma_0=\int_0^1 f(t)\,dt=0. \tag{12.1}$$

Ismeretes, hogy két, 1 szerint periodikus, $L(0, 1)$-beli $F(u)$, $G(u)$ függvény $(0, 1)$-re vonatkozó *konvolúció*ja (rezultánsa):

$$F*G=F(u)*G(u)|(x)=\int_0^1 F(x-t)\,G(t)\,dt \tag{12.2}$$

majdnem minden x-re létezik és szintén L-integrálható a $(0, 1)$ intervallumban; sőt minden x-re létezik és *folytonos* abban az esetben, ha $F(u)$ és $G(u)$ konjugált L-osztályokhoz tartozik (vö.[47]). — Könnyű megmutatni, hogy (12.2) több szempontból szorzatként viselkedik: a „konvolválás" (= konvolúció-képzés) művelete triviálisan *kommutatív* (szimmetrikus) és — legalább majdnem mindenütt — *asszociatív* is. Az utóbbi tulajdonság speciálisan minden x-re fennáll, midőn pl. a szóban forgó függvények valamelyike korlátos vagy $\in L^2(0, 1)$.[81]

* A dolgozat I. része az MTA III. Osztályának Közleményei X/1. (1960) számában (59—91. old.), II. része a X/2. (1960) számban (171—201. old.) jelent meg. A jelen, befejező rész fejezetei és tételei számozása az előző részek számozásának folytatása. A teljes irodalomjegyzéket az I. rész tartalmazza.

[81] Vö. pl. [7], I. kötet, 113—115.

2. A definíció alapján $\sigma > 1$ mellett (vö. (12. 1), (2. 12)—(2. 13)):

$$(12.3)\qquad f_{[s]}(x) = f(u) * \mathfrak{Z}_s(u) \,|\, (x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-s} \gamma_n e^{2n\pi i x};$$

ha — kézenfekvő módon — a W_s-jelet mint *operátort* alkalmazzuk, (12. 3) röviden így írható:

$$(12.4)\qquad f_{[s]} = W_s f = f * \mathfrak{Z}_s.$$

Jelöljük a (12. 3)-beli

$$(12.5)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-s} \gamma_n e^{2n\pi i x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-s} \gamma_{-n} e^{-2n\pi i x}$$

DIRICHLET-sorok abszolút konvergencia-abszcisszáját σ_0^*-val, ill. $\bar{\sigma}_0^*$-val; legyen $\chi_0^* = \max(\sigma_0^*, \bar{\sigma}_0^*)$. Látjuk, hogy a (természetesen $f(u)$ választásától függő) $\sigma_0^*, \bar{\sigma}_0^*, \chi_0^*$ mennyiségek x-től függetlenek, továbbá, hogy a (12. 5) alatti mindkét sor egyúttal egyenletesen konvergens, midőn $\sigma \geqq \chi_0^* + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, $0 \leqq x \leqq 1$.

3. A következő tételekben két komplex paramétert használunk: $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, $s_2 = \sigma_2 + i\tau_2$; egyik eredményünk a *W_s-operátoroknak*, a másik maguknak a *W_s-limeszeknek* egy *félcsoport-tulajdonságát*[82] fejezi ki.

XVII. tétel. 1. *Ha* $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, *akkor m. m. x-re, sőt* $\sigma_1 > 1$, $\sigma_2 > 1$ *mellett minden x-re fennállnak a*

$$(12.6)\qquad W_{s_1}(W_{s_2} f) = W_{s_2}(W_{s_1} f) = W_{s_1+s_2} f$$

egyenlőségek; ebben az értelemben a W_s-operátorok (bármely adott f esetén) a $\sigma > 0$ félsíkban kommutatív félcsoportot alkotnak.

2. (12. 6) *minden x-re érvényes, midőn σ_1, σ_2 és $\sigma_1 + \sigma_2$ egyaránt* $> \chi_0^*$; *így speciálisan* $\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2) > 1 - p$ *mellett, amennyiben* $f^{(p-1)}(u)$ $(p \geqq 1, fix)$ *abszolút folytonos.*

BIZONYÍTÁS. 1. *Tegyük fel, hogy* $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$.

Akkor a VI. tétel 1. fele szerint majdnem mindenütt

$$(12.7)\qquad W_{s_1} f = f * \mathfrak{Z}_{s_1}, \quad W_{s_2} f = f * \mathfrak{Z}_{s_2};$$

tehát az asszociativitás és a magfüggvény (3. 14) tulajdonságának felhasználásával nyerjük:

$$(12.8)\qquad \left\{ \begin{aligned} & W_{s_2}(W_{s_1} f) = (f * \mathfrak{Z}_{s_1}) * \mathfrak{Z}_{s_2} = f * (\mathfrak{Z}_{s_1} * \mathfrak{Z}_{s_2}) = \\ & = f * \mathfrak{Z}_{s_1+s_2} = W_{s_1+s_2} f, \end{aligned} \right.$$

[82] Vö. [19], 439—443.

továbbá, ugyanígy

$$W_{s_1}(W_{s_2}f) = W_{s_1+s_2}f, \tag{12.9}$$

egyaránt m. m. x-re.

Ha $\sigma_1 > 1$, $\sigma_2 > 1$, eredményeinknek minden x-re érvényeseknek kell lenniök, mert (vö. (12. 3)) a W_s-limeszek ez esetben nyilván folytonosak.

2. A (12. 3)-beli

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-s}\gamma_n e^{2n\pi i x} = e^{-\frac{i\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n e^{2n\pi i x}}{(2n\pi)^s} + e^{\frac{i\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{-n} e^{-2n\pi i x}}{(2n\pi)^s} \tag{12.10}$$

sor abszolút konvergens a $\sigma > \chi_0^*$ félsíkban, még hozzá egyenletesen, x-re vonatkozólag. Következőleg (12. 10) összegének FOURIER-sora, mely utóbbi x-nek folytonos függvénye; másfelől bármely rögzített x-re az összegfüggvény reguláris $\sigma > \chi_0^*$ mellett, úgy hogy szükségképpen megegyezik $W_s f$-fel (vö. (12. 3)).

Vegyünk fel a $\sigma > \chi_0^*$ félsíkban három pontot: s_1, s_2, $s_1 + s_2$ és alkalmazzuk eddigi megjegyzéseinket az $s = s_1$, $s = s_2$, $s = s_1 + s_2$ esetre, ekkor rendre $W_{s_1}f$, $W_{s_2}f$, ill. $W_{s_1+s_2}f$ FOURIER-előállítására jutunk; ha még $f(u)$ helyett $W_{s_1}f$-et írunk, akkor

$$W_{s_2}(W_{s_1}f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-s_2}(2n\pi i)^{-s_1}\gamma_n e^{2n\pi i x} = W_{s_1+s_2}f$$

$$(\sigma_1 > \chi_0^*, \sigma_2 > \chi_0^*, \sigma_1 + \sigma_2 > \chi_0^*),$$

míg (12. 9) (azonos kikötések mellett) egyszerűen a jelölések megváltoztatásával áll elő.

Ha $f^{(p-1)}(u)$ $[0,1]$-ben abszolút folytonos, akkor — mint tudjuk — $\gamma_n = o(|n|^{-p})$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$[83] s ennek folytán $\chi_0^* \leqq 1 - p$.

XVIII. tétel. 1. *Ha $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$, m. m. x-re, sőt $\sigma_1 > 1, \sigma_2 > 1$ esetén minden x-re fennáll a*

$$W_{s_1}f_1 * W_{s_2}f_2 = W_{s_1+s_2}(f_1 * f_2) \tag{12.11}$$

formula; így az összes integrálható függvények W_s-limeszei a $\sigma > 0$ félsíkban kommutatív félcsoportot alkotnak a konvolválás műveletére nézve.[84]

2. *Legyen $X_0^* = \max(\chi_0^*(f_1), \chi_0^*(f_2))$.*

(12.11) minden x-re érvényes, midőn σ_1 és $\sigma_2 > \chi_0^*$; speciálisan $\sigma_1, \sigma_2 > 1 - p$ mellett, feltéve, hogy $f^{(p-1)}(u), f^{(p-1)}(u)$ $(p \geqq 1, fix)$ abszolút folytonos.

83 Vö. pl. [18], 26 (Th. 40).

84 Egy másik interpretáció: a „W_s-limitálás" és a konvolúcióképzés sorrendje felcserélhető.

BIZONYÍTÁS. 1. Legyen σ_1 és $\sigma_2 > 0$.

A konvolúciók kommutativitását és asszociativitását, valamint ismét (3.14)-et felhasználva, írhatjuk (vö. (12.7)):

$$
\begin{aligned}
W_{s_1}f_1 * W_{s_2}f_2 &= (f_1 * \mathfrak{Z}_{s_1}) * (f_2 * \mathfrak{Z}_{s_2}) = \\
&= f_1 * (\mathfrak{Z}_{s_1} * (f_2 * \mathfrak{Z}_{s_2})) = f_1 * (f_2 * \mathfrak{Z}_{s_1+s_2}) = \\
&= (f_1 * f_2) * \mathfrak{Z}_{s_1+s_2} = W_{s_1+s_2}(f_1 * f_2)
\end{aligned}
$$

m. m. x-re; ha $\sigma_1 > 1, \sigma_2 > 1$, a W_s-limeszek folytonosak s nincs kivételes x pont a $(0, 1)$ intervallumban.

2. Jelöljük $f_1(u) \in L(0, 1)$ és $f_2(u) \in L(0, 1)$ $(0, 1)$-hez tartozó komplex FOURIER-együtthatóit γ'_n-vel ill. γ''_n-vel $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. A (12.10) sorral kapcsolatban mondottak alapján fennáll minden x-re

$$
(12.12)\qquad \begin{cases} W_{s_1}f_1 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-s_1} \gamma'_n e^{2n\pi i x} & (\sigma_1 > X_0^*), \\ W_{s_2}f_2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-s_2} \gamma''_n e^{2n\pi i x} & (\sigma_2 > X_0^*), \end{cases}
$$

a W_s-limeszek (mindenütt) folytonosak, s a jobboldali sorok FOURIER-soraik; eszerint a $W_{s_1}f_1 * W_{s_2}f_2$ folytonos függvény FOURIER-állandói $(2n\pi i)^{-(s_1+s_2)}\gamma'_n\gamma''_n$ $(n \neq 0$; vö.[47]$)$, továbbá nyilván bármely x helyen:

$$
(12.13)\qquad W_{s_1}f_1 * W_{s_2}f_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-(s_1+s_2)} \gamma'_n \gamma''_n e^{2n\pi i x},
$$

feltéve, hogy az utolsó sor konvergens. De pl. a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-\sigma_1} |\gamma'_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-\sigma_2} |\gamma''_n|$ sorok egyidejű konvergenciájából folyik, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-(\sigma_1+\sigma_2)} |\gamma'_n||\gamma''_n| < \infty$, következésképp (12.13) érvényes minden x-re, hacsak $\sigma_1 > X_0^*$, $\sigma_2 > X_0^*$.

Másfelől megállapíthatjuk, hogy a

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi)^{-s} \gamma'_n \gamma''_n e^{2n\pi i x} = e^{-\frac{i\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-s} \gamma'_n \gamma''_n e^{2n\pi i x} + e^{\frac{i\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-s} \gamma'_{-n} \gamma''_{-n} e^{-2n\pi i x}
$$

sor összege $W_s(f_1 * f_2)$ bármely adott x-re oly $s = s_1 + s_2$ mellett, melyre $\sigma_1 > X_0^*$, $\sigma_2 > X_0^*$. Ui.: 1° állításunk nyilván helyes a $\sigma > 1$ esetben (vö. (12.3)); 2° a jobboldali DIRICHLET-sorok összetartók $s = s_1 + s_2$, $\sigma > \sigma_1 + \sigma_2$ mellett; 3° a megfelelő összegek tehát s-nek reguláris függvényei a $\sigma > \sigma_1 + \sigma_2$ félsíkban, továbbá folytonosak az $s = s_1 + s_2$ pontban a $\sigma \to (\sigma_1 + \sigma_2) + 0$ határátmenetnél. Ennélfogva

$$(12.14)\qquad \begin{cases} W_{s_1+s_2}(f_1*f_2)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'(2n\pi i)^{-(s_1+s_2)}\gamma_n'\gamma_n''e^{2n\pi i x} \\ (0\leqq x\leqq 1;\ \sigma_1>X_0^*,\ \sigma_2>X_0^*), \end{cases}$$

és (12.13), (12.14) összekapcsolása (12.11)-et szolgáltatja, a tételben megadott feltételek mellett.

Végre, amennyiben $f_1^{(p-1)}(u)$ és $f_2^{(p-1)}(u)$ abszolút folytonos, akkor a $\gamma_n'=o(|n|^{-p}),\gamma_n''=o(|n|^{-p})$ becslésekből következik, hogy $X_0^*=\max(\chi_0^*(f_1),\chi_0^*(f_2))\leqq 1-p$.

4. Minthogy a W_{-1}-operátor a $\partial/\partial x$ differenciáloperátor megfelelője, (12.6) szemlátomást $f_{[s]}(x)$ (4.6) tulajdonságának erős általánosításaként is felfogható (vö. I. tétel).

13. §. $W(s)$ viselkedése $|s|\to\infty$ esetén. — Aszimptotikus és konvergens kifejtés általánosított hatványsorba

1. Mint az előzőkben láttuk, $(-1)_{[s]}=\mathfrak{Z}_s(x)=\Gamma(s)^{-1}\zeta(1-s,x)$ folytán $W(s)=f_{[s]}(x)$[85] lényegileg *általánosított zetafüggvény*nek tekinthető, melynek elmélete szoros összefüggésben van a $\sigma>1$ félsíkban közönséges DIRICHLET-sorokkal definiált $f(s,x),\tilde f(s,x)$ függvények tulajdonságaival (vö. (4.2), (4.3)). Így fokozott súlyt nyernek az $f_{[s]}(x)$ s-síkbeli *aszimptotikus viselkedésére*, valamint *értékkészletére* vonatkozó vizsgálatok.

2. Ami az előbbit illeti, nyilván elsősorban a $\tau=$ konstans, $\sigma\to\infty$, ill. $\sigma=$ konstans, $|\tau|\to\infty$ határátmenetek (tehát egy vízszintes, ill. függőleges egyenesre korlátozott s-értékek) esete érdemel figyelmet.[86]

Ezekre vonatkozik a

XIX. tétel. 1. *Bármely* $\tau=\tau_0$ *egyenesen* $\sigma\to+\infty$ *mellett* $f_{[s]}(x)\to 0$, *sőt* $=O\left((2\pi)^{-\sigma}\right)$; *másrészt minden* $\sigma=\sigma_0>1$ *egyenes mentén* $f_{[s]}(x)=O(e^{\frac{\pi}{2}|\tau|})$, *midőn* $|\tau|\to+\infty$.

Pontosabban:

$$(13.1)\qquad |f_{[s]}(x)|<\frac{12\zeta(\sigma)}{(2\pi)^{\sigma}}\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2}\int_0^1|f(t)|\,dt\qquad(\sigma>1;\ -\infty<\tau<\infty).$$

[85] $x\in(0,1)$ az alábbiakban — ha rövidség kedvéért külön nem említjük is — *rögzített*, előírt értéket jelent.

[86] Ismeretes pl. a „vertikálismenti" nagyságrend (LINDELÖF-féle μ-függvény s. í. t.) fontossága a DIRICHLET-sorok ún. konvergencia-, ill. szummáció-problémája szempontjából. (Vö. [2], [13], [17]).

2. *Tegyük fel, hogy* $f^{(p)}(u)\,(p\geqq 0, fix)$ *egy* $(x-\delta, x)\,(0<\delta\leqq 1)$ *intervallumban létezik és korlátos.*

Akkor bármely $\sigma=\sigma_0>-p$ *egyenes megadása után található oly* $K=K(\sigma_0)$ *konstans, hogy*

$$(13.2)\qquad |f_{s]}(x)|<Ke^{\frac{\pi}{2}|\tau|}|\tau|^{\varkappa(\sigma_0)}(\log|\tau|)^{\vartheta(\sigma_0)}\qquad (\sigma=\sigma_0,\ -\infty<\tau<\infty),$$

ahol

$$(13.3)\qquad \varkappa(\sigma_0)=\begin{cases}0, & ha\quad \sigma_0>1;\\ \frac{1}{2}(1-\sigma_0), & ha\quad 0\leqq\sigma_0\leqq 1;\\ \frac{1}{2}-\sigma_0, & ha\quad \sigma_0<0\end{cases}$$

és

$$(13.4)\qquad \vartheta(\sigma_0)=\begin{cases}1, & ha\ 0\leqq\sigma_0\leqq 1;\\ 0 & különben.\end{cases}$$

BIZONYÍTÁS. 1. Állításunk első része, ill. a (13.1) egyenlőtlenség közvetlenül kiolvasható a (2.9) alapképletből, ha felhasználjuk az elemi

$$(13.5)\qquad \left.\begin{matrix}|a_n(x)|\\ |b_n(x)|\end{matrix}\right\}\leqq 3\int_0^1|f(t)|\,dt,$$

$$(13.6)\qquad \left.\begin{matrix}|\sin(\xi+i\eta)|\\ |\cos(\xi+i\eta)|\end{matrix}\right\}\leqq \operatorname{ch}\eta\quad (\xi,\eta \text{ valós})$$

becsléseket (vö. (2.1), (2.8)).

Ha azzal a kikötéssel élünk, hogy $f^{(p)}(u)\,(p\geqq 0, \text{fix})$ az x helynek egy $(x-\delta, x)$ $(0<\delta\leqq 1)$ baloldali környezetében létezik és korlátos, akkor az V. tétel 1.—2. korolláriumaira támaszkodhatunk.

Eszerint írhatjuk (vö. (6.15)—(6.17)):

$$(13.7)\qquad f_{[s]}(x)=\Gamma(s)^{-1}\Big[\int_0^1 f(x-t)\,\zeta(1-s,t)\,dt-\zeta(1-s,x)\int_0^1 f(t)\,dt\Big]\quad(\sigma>0)$$

a $p=0$ esetben és — a (3.4) függvényegyenlet felhasználásával —

$$(13.8)\qquad \begin{cases} f_{[s]}(x)=\Gamma(s)^{-1}\Big[\int_0^1 f(x-t)\zeta(1-s,t+1)\,dt-\zeta(1-s,x)\int_0^1 f(t)\,dt+\\ +\int_\delta^1 f(x-t)t^{s-1}\,dt+\delta^s\sum_{k=0}^{p-1}\frac{f^{(k)}(x-\delta+0)}{s\ldots(s+k)}\delta^k+\\ +\frac{1}{s\ldots(s+p-1)}\int_0^\delta f^{(p)}(x-t)t^{s+p-1}\,dt\Big]\qquad(\sigma>-p),\end{cases}$$

ha $p\geqq 1$.

Itt az ún. PINCHERLE—MELLIN-féle aszimptotikus formula alapján[87] rögzített σ mellett

$$\Gamma(s)^{-1} \sim (2\pi)^{-\frac{1}{2}} |\tau|^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{\frac{\pi}{2}|\tau|} \qquad (|\tau| \to \infty); \tag{13.9}$$

továbbá a HURWITZ-féle zetafüggvényre vonatkozólag fennállnak a ($-\infty < \tau < \infty$, $\varepsilon > 0$ fix)

$$|\zeta(s,u)| < \begin{cases} B_1 \quad (\sigma \geqq 1+\varepsilon), \\ B_2 |\tau|^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} \log|\tau| \quad (0 \leqq \sigma \leqq 1), \\ B_3 |\tau|^{\frac{1}{2}-\sigma} (\sigma \leqq -\varepsilon) \end{cases} \tag{13.10}$$

becslések, ahol a B-k legfeljebb ε választásától függő alkalmas konstansok.[88] A (13. 10) limitációk bármely $0 < u_1 \leqq u \leqq u_2$ intervallumban egyenletesen is érvényesek.

Mivel (13. 9)-ben $\int_\delta^1 f(x-t)\, t^{s-1}\, dt$ τ-tól független korlát alatt marad, az utána következő tagok pedig rögzített σ és $|\tau| \to \infty$ esetén 0-hoz tartanak, (13. 7)—(13. 10) együttes felhasználása az igazolandó (13. 2) képletet szolgáltatja.

3. Megemlítve, hogy a XIX. tétel eredményei egy-egy (a vizsgálattal párhuzamos egyenesek által határolt) sávra is kiterjeszthetők (vö. (13. 10)), most egy kézenfekvő — tetszőleges $|s| \to \infty$ határátmenettel kapcsolatos — általánosítással foglalkozunk.

XX. tétel. 1. *Ha $f^{(p)}(u)$ ($p \geqq 0$, rögzített) egy $(x-\delta, x)$ $(0 < \delta \leqq 1)$ intervallumban létezik és korlátos* (*), *akkor $\sigma \geqq -p+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, fix), $|s| \to \infty$ mellett*

$$\begin{cases} f_{[s]}(x) = I_s(f, x, \delta) + \sum_{k=1}^{p} \Gamma(s+k)^{-1} f^{(k-1)}(x-\delta+0)\delta^{s+k-1} + \\ \qquad + O(|\Gamma(s+p)^{-1}|\delta^{\sigma+p}); \end{cases} \tag{13.11}$$

(*)-*nak bármilyen nagy p-re való teljesülése esetén fennáll az*

$$f_{[s]}(x) \sim I_s(f, x, \delta) + \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(s+k)^{-1} f^{(k-1)}(x-\delta+0)\delta^{s+k-1} \qquad (|s| \to \infty) \tag{13.12}$$

aszimptotikus sorfejtés.[89]

[87] L. pl. [27], 14—15.

[88] Vö. [56], 275—276; [24], 53—62. — (13. 10)-nek a $0 \leqq \sigma \leqq 1$ kritikus sávra vonatkozó része kissé javítható volna.

[89] Itt a POINCARÉ-féle „aszimptotikus sor"-fogalomnak az irodalomban gyakran (de többnyire hallgatólagosan) használt kiterjesztését tartjuk szem előtt. (Vö. [20], 65.—66. §.)

2. *Ha $f(u)$-nak $(x-\delta, x)$-ben $(0<\delta\leqq 1)$ összes deriváltjai bizonyos közös korlát alatt maradnak, akkor* (13.12) *közönséges sorelőállítássá élesíthető: minden s-re*

$$f_{[s]}(x)=I_s(f,x,\delta)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\Gamma(s+\nu+1)^{-1}f^{(\nu)}(x-\delta+0)\delta^{s+\nu}, \tag{13.13}$$

mégpedig az s-sík bármely korlátos, zárt tartományában egyenletesen.

Bizonyítás. 1. (13.11) tüstént felírható az V. tétel alapján, minthogy $\sigma+p\geqq\eta$ esetén

$$\left|\int_0^\delta f^{(p)}(x-t)t^{s+p-1}dt\right|\leqq\sup_{(x-\delta,x)}\left|f^{(p)}(u)\right|\cdot\frac{\delta^{\sigma+p}}{\eta}.$$

Mivel $(x-\delta, x)$-ben akárhányszor korlátosan deriválható $f(u)$ esetén az

$$\frac{f_{[s]}(x)-\left[I_s(f,x,\delta)+\sum_{k=1}^{p}\Gamma(s+k)^{-1}f^{(k-1)}(x-\delta+0)\delta^{s+k-1}\right]}{\Gamma(s+p)^{-1}f^{(p-1)}(x-\delta+0)\delta^{s+p-1}}=$$

$$=\frac{\delta}{s+p}f^{(p-1)}(x-\delta+0)^{-1}\left[f^{(p)}(x-\delta+0)+\delta^{-(s+p)}\int_0^\delta f^{(p+1)}(x-t)t^{s+p}dt\right]$$

hányados (ahol $s\neq 0,-1,\ldots$ és $f^{(p-1)}(x-\delta+0)\neq 0$) bármely rögzített $p\geqq 1$ mellett 0-hoz tart, midőn $|s|\to\infty$, a szóban forgó premissza mellett (13.11) (13.12)-vel helyettesíthető.

Tegyük fel, hogy

$$|f^{(\nu)}(u)|\leqq K \qquad (x-\delta<u<x;\ \nu=1,2,\ldots). \tag{13.14}$$

Akkor egyrészt az V. tétel 5. korolláriuma szerint írhatjuk:

$$\begin{cases} f_{[s]}(x)-\left[I_s(f,x,\delta)+\sum_{\nu=0}^{p}\Gamma(s+\nu+1)^{-1}f^{(\nu)}(x-\delta+0)\delta^{s+\nu}\right]= \\ \qquad =\Gamma(s+p+1)^{-1}\int_0^\delta f^{(p+1)}(x-t)t^{s+p}\,dt, \end{cases} \tag{13.15}$$

hacsak $\sigma>-(p+1)\ (p=1,2,\ldots)$, másrészt az ismert[90]

$$\Gamma(s+p+1)^{-1}\sim(p!)^{-1}p^{-s} \qquad (p\to\infty) \tag{13.16}$$

[90] Vö. pl. [30], (4.33).

képlet felhasználásával, elegendő nagy p-re $(\sigma+p+1>0, 0<\delta\leqq 1)$

$$(13.17)\quad \begin{cases} \left| \Gamma(s+p+1)^{-1} \int_0^\delta f^{(p+1)}(x-t)\, t^{s+p}\, dt \right| \leqq \\ \leqq \dfrac{2}{p!} p^{-\sigma} \int_0^\delta \left| f^{(p+1)}(x-t) \right| t^{\sigma+p}\, dt \leqq \dfrac{2K}{\sigma+p+1} \dfrac{p^{|\sigma|}}{p!}. \end{cases}$$

De az utolsó korlát bármely fix s mellett $p\to\infty$ határátmenetnél $\to 0$; így (vö. (13.15), (13.17)) s és egy $\varepsilon>0$ szám tetszőleges előírása után

$$(13.18)\quad \left| f_{[s]}(x) - \left[I_s(f, x, \delta) + \sum_{\nu=0}^{p}{}' \Gamma(s+\nu+1)^{-1} f^{(\nu)}(x-\delta+0)\delta^{s+\nu} \right] \right| < \varepsilon$$

$$(p \geqq P = P(s, \varepsilon)),$$

ami éppen (13.13) tartalmát fejezi ki.

Amennyiben s-et egy korlátos, zárt T tartományból választjuk, akkor (13.17)-ből kiolvashatóan a (13.18) becslés s-től független P küszöbszám mellett is fennáll, tehát eredményünk $s\in T$ mellett *egyenletesen* érvényes.

4. (13.13)-ból jelölésváltoztatással adódik (s tetszőleges, $h>0$):

$$(13.19)\quad f_{[s]}(x+h) = I_s(f, x+h, h) + \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \Gamma(s+\nu+1)^{-1} f^{(\nu)}(x+0) h^{s+\nu},$$

feltéve, hogy az $f^{(\nu)}(u)\,(\nu=1, 2, \ldots)$ sorozat $(x, x+h)$-ban *egyenletesen korlátos*; nem érdektelen kiemelnünk, hogy (13.19) $s=0, f^{(\nu)}(x+0)=f^{(\nu)}(x)$, $f(x+h-0)=f(x+h)$ esetén a klasszikus

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^{\nu}$$

képletbe megy át (vö. (6.18), (6.23)), tehát a *Taylor-sorfejtés* egy *újabb általánosításának* tekinthető.

(13.19) jellege (10.11)-étől meglehetősen eltér, viszont a heurisztikusan felírt (10.19) alatti RIEMANN-sorral szemlátomást rokonságot mutat; ha $s\neq 0, -1, \ldots,$ egyúttal (vö. (3.4))

$$(13.20)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \Gamma(s+\nu+1)^{-1} f^{(\nu)}(x+0)\, h^{s+\nu} = \Gamma(s)^{-1} h^{s} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{\nu!}{s\ldots(s+\nu)} \frac{f^{(\nu)}(x+0)}{\nu!} h^{\nu},$$

mely utóbbi egy ún. (elsőfajú) *faktoriális-sor.*[91]

[91] Vö. pl. [20], 462—463; [41], 9. fejezet.

MEGJEGYZENDŐ: a $\sum_{\nu=0}^{\infty} \Gamma(\mu+\nu+1)^{-1} f^{(\nu)}(0) w^{\mu+\nu}$ (μ valós) általánosított hatványsorral definiálta HADAMARD [11] egy $w=0$ környezetében holomorf $f(w)$ függvény μ-edrendű integrálját; a XX. tétel különben komplex z argumentum esetére is közvetlenül átvihető (vö. 10. §. 3.).

14. §. $f(s, x)$ és $\tilde{f}(s, x)$ s-síkbeli értékeiről. — Két általános tétel

1. Az a tény, hogy $f_{[s]}(x)$ általános értelmezése s-re vonatkozó analitikus folytatással történt, $W(s)=f_{[s]}(x)$ esetében alkalmazhatóvá teszi a komplex változós függvénytan számos klasszikus tételét a zérushelyekre, az egész síkon, ill. szinguláris helyek környezetében felvett értékekre vonatkozólag (WEIERSTRASS-, HADAMARD-, JENSEN-, PICARD-féle ideakör stb.).

Az ily módon adódó megállapítások felsorolását mellőzve, e fejezetben figyelmünket bizonyos, a 8. §-hoz szorosan csatlakozó kérdések tárgyalására fordítjuk: oly maximális körlemezek, ill. félsík helyzetének *pontos* és közelítő meghatározására, melyekben $(2\pi)^s f(s, x)$ és $(2\pi)^s \tilde{f}(s, x)$ egy-egy adott értéket *nem* vesz fel.

2. Legyen $G(s)$ valamely $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ pontban reguláris, nem-konstans függvény,[92] $w_0=u_0+iv_0$ pedig egy tetszőleges komplex szám, melyre $G(s_0)\neq w_0$. Akkor mindenesetre kijelölhető s_0-nak egy (s innét folyóan végtelen sok) környezete, melyben mindenütt $G(s)\neq w_0$;[93] tekintsük az összes ilyen környezetek sugarainak $D=D(s_0, w_0)$ felső határát s nevezzük $G(s)$ *s_0-hoz tartozó w_0-mentességi sugarának.* — Amennyiben $G(s)$ holomorf és nem veszi fel a w_0 értéket egy $\sigma>\eta>-\infty$ félsíkban, akkor hasonló módon tekinthetjük ama σ^* abszcisszák $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(w_0)$ alsó határát, melyekre $\sigma>\sigma^*$ mellett $G(s)\neq w_0$; $\mathfrak{B}(w_0)$-t $G(s)$ *w_0-mentességi abszcisszájának* fogjuk hívni.[94]

Rögtön látható, hogy $D(s_0, w_0)$ — amennyiben véges — nem más, mint az s_0-hoz legközelebbi (egy vagy több) w_0-helynek s_0-tól való *távolsága;* továbbá $\mathfrak{B}>-\infty$ mellett $\mathfrak{B}(w_0)$ úgy is felfogható, mint a *w_0-helyek abszcisszáinak felső határa.*[95] Eszerint bármely w_0 komplex számhoz meghatározva $\mathfrak{B}(w_0)$-t, ill. az összes szóbajövő s_0-hoz tartozó $D(s_0, w_0)$ sugarakat, nyilván

[92] Az alábbiakban — a szokásos módon — minden reguláris függvényelem jele egyszersmind a megfelelő *teljes analitikus függvény* jelölésére is szolgál.

[93] Ellenkező esetben s_0 w_0-helyek (végesben fekvő) torlódási pontja volna.

[94] Az ún. *quasi*-RIEMANN-*sejtés* tárgyalásával kapcsolatban TURÁN [54] (121. o.) analóg, de eltérő jellegű fogalmat vezet be: azon σ_w abszcisszát, melyre minden $\varepsilon>0$ mellett a $\sigma\geqq\sigma_w+\varepsilon$ félsíkban az adott függvénynek csak véges sok zérushelye van, de a $\sigma\geqq\sigma_w-\varepsilon$ félsíkban már nem.

[95] Tehát speciálisan, véges sok w_0-hely esetén $\mathfrak{B}(w_0)$ a *maximális* w_0-hely-abszcissza.

teljes áttekintést szerezhetünk arról, hogy $G(s)$ egy-egy értéket hol vesz fel — s felvesz-e egyáltalán.

3. A CAUCHY—HADAMARD-formula, ill. a 4. lemma segítségével mármost nem nehéz tetszőleges *meromorf* $G(s)$ esetében oly egzakt kifejezést kapnunk $D(s_0, w_0)$ és $\mathfrak{B}(w_0)$ számára, mely a függvény TAYLOR-együtthatóit használja fel. Ezen túlmenően, érvényes a[96]

XXI. tétel. 1. *Tegyük fel, hogy $G(s)$ nem konstans és az $s = s_0$ helyen analitikus; legyen $C_\nu = C_\nu(s_0) = G^{(\nu)}(s_0)/\nu!$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, $C_0 \neq w_0$.*

Akkor $G(s)$ meromorf és $\neq w_0$ az $|s - s_0| < R(s_0, w_0)$ körbelsőben, ahol

$$(14.1)\qquad \begin{cases} R(s_0, w_0) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \left| \sum\limits_{k=1}^{\nu} (-1)^k (C_0 - w_0)^{-k} T_{k,\nu}(s_0) \right|^{-\frac{1}{\nu}}, \\ T_{k,\nu}(s_0) = \sum\limits_{\substack{n_1+\ldots+n_k=\nu \\ n_j>0}} C_{n_1} \ldots C_{n_k}. \end{cases}$$ [97]

Ha $G(s)$ még $|s - s_0| < \varrho$ $(R(s_0, w_0) < \varrho < \infty)$ mellett is meromorf (**), akkor $G(s)$-nek legalább egy w_0-helye van az $|s - s_0| = R(s_0, w_0)$ körön.

Így (*) mellett fennáll

$$(14.2)\qquad D(s_0, w_0) \geqq R(s_0, w_0),$$

sőt egyúttal

$$(14.3)\qquad D(s_0, w_0) = R(s_0, w_0),$$

feltéve, hogy (**) is teljesül.

2. *Legyen $G(s)$ reguláris, továbbá $G(s) \neq w_0$ és $G'(s) \neq 0$ egy $\sigma > \eta > -\infty$ félsíkban.*

Akkor $U(w_0) = \sigma_0 - \inf\limits_{\sigma=\sigma_0} R(s, w_0)$ $(\sigma_0 > \eta)$ független σ_0 választásától; $G(s)$ meromorf $\sigma > U(w_0)$ mellett és fennáll

$$(14.4)\qquad \mathfrak{B}(w_0) \leqq U(w_0).$$

(14.4) *a*

$$(14.5)\qquad \mathfrak{B}(w_0) = U(w_0)$$

egyenlőséggé élesíthető, amennyiben $G(s)$ egy bővebb $\sigma > U'$ $(U' < U(w_0))$ félsíkban is meromorf.

[96] Vö. [39], Satz (1.4); *D determináns-előállítását* s ennek az HADAMARD-féle determináns-tételhez kapcsolódó alkalmazását illetően vö. még [38], 2.—4. § ($w_0 = 0$ eset).

[97] Az utolsó összegezést tehát mindazokra a (rendezett, természetes számokból álló) $(n_1, \ldots, n_k)$ értékrendszerekre terjesztendő ki, melyek kielégítik az $n_1 + \cdots + n_k = \nu$ feltételt. Mint látjuk, az R kifejezésében szereplő Σ ily módon $(C_0 - w_0)^{-1}$-nek egy ν-edfokú polinomja.

A *bizonyítást* illetően — mely $(G(s)-w_0)^{-1}$ *regularitási sugarának* és *abszcisszájának* meghatározásán és bizonyos kifejtések együtthatóinak összehasonlításán alapul — utalunk a [39] dolgozat megfelelő részére.[98] A felhasznált alapgondolat különben jelentékenyen általánosítható.[99]

4. Megmutatjuk, hogy a $D(s_0, w_0)$-ra és $\mathfrak{B}(w_0)$-ra nyert képletek jól kezelhető becslések felállítását engedik meg, melyek bizonyos értelemben (a vizsgált függvények összességére nézve) nem javíthatók.

XXII. tétel. 1. *Tegyük fel, hogy $G(s)$ kielégíti az előző tétel első felének premisszáját és legyen az s_0 pontban*

$$(14.6)\qquad |C_n| \leqq M\cdot Q^n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

ahol M és Q pozitív konstansok.[100]

Akkor fennáll a

$$(14.7)\qquad D(s_0, w_0) \geqq \frac{|C_0-w_0|}{Q(M+|C_0-w_0|)}$$

egyenlőtlenség, s léteznek oly $G(s)$ függvények, melyekre itt M, Q alkalmas választása mellett az egyenlőség jele érvényes.

2. *Ha $G(s)$-re nézve teljesülnek a XXI. tétel második felének kikötései, továbbá egy $\sigma=\sigma_0>\eta>-\infty$ egyenes minden s pontjában*

$$(14.8)\qquad |G(s)-w_0| \geqq \varrho,\quad |C_n(s)| \leqq MQ^n \qquad (n=1,2,\ldots),$$

hol ϱ, M, Q pozitív állandók, akkor

$$(14.9)\qquad \mathfrak{B}(w_0) \leqq \sigma_0 - \frac{\varrho}{Q(M+\varrho)}.$$

Bizonyítás. 1. Közvetlenül, vagy teljes indukcióval könnyen belátható, hogy az $n_1+n_2+\cdots+n_k=\nu$ diofantoszi egyenletnek — hol k és ν rögzített természetes számok —

$$(14.10)\qquad N_{k,\nu} = \binom{\nu-1}{k-1}$$

számú megoldása van.

[98] Vö. l. c. Satz 1. és Satz 4., 1.

[99] Vö. [35], 57; (4.3).

[100] A jól ismert Cauchy-féle egyenlőtlenségek (vö. (10.18)) és a hatványsorok Parseval-formulája szerint *minden*, s_0-ban reguláris $G(s)$ függvény Taylor-együtthatói a (14.6) mintára becsülhetők meg: ha $r>0$ egy s_0-körüli holomorfia-környezet sugarát jelenti akkor írhatjuk pl. $Q=r^{-1}$ és $M=M(r)=\max\limits_{|s-s_0|=r}|G(s)|$ vagy $M=\mathfrak{M}_2(r)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left[\int\limits_0^{2\pi}|G(s_0+re^{i\vartheta})|^2 d\vartheta\right]^{\frac{1}{2}}$.

Ennélfogva írhatjuk (vö. (14. 1), (14. 6)):

$$\left.\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^k(C_0-w_0)^{-k}T_{k,\nu}(s_0)\right|\leqq\\&\leqq\sum_{k=1}^{\nu}|C_0-w_0|^{-k}M^kQ^kN_{k,\nu}=\\&=MQ^{\nu}|C_0-w_0|^{-\nu}(|C_0-w_0|+M)^{\nu-1}\end{aligned}\right\}\quad(\nu=1,2,\ldots),$$

$$(14.11)\qquad\left\{\begin{aligned}R(s_0,w_0)&\geqq\varlimsup_{\nu\to\infty}M^{-\frac{1}{\nu}}Q^{-1}|C_0-w_0|(|C_0-w_0|+M)^{-1+\frac{1}{\nu}}=\\&=Q^{-1}|C_0-w_0|(M+|C_0-w_0|)^{-1};\end{aligned}\right.$$

s (14. 11)-ből (14. 2) alapján következik (14. 7).

Tekintsük továbbá a

$$G(s)=\frac{Q^*(M^*+\vartheta_0-w_0)(s-s_0)+(w_0-\vartheta_0)}{1-Q^*(s-s_0)}\quad\left(s\neq s_0+\frac{1}{Q^*}\right)$$

lineáris törtfüggvényt, ahol $M^*>0$, $Q^*>0$, $\vartheta_0>0$. Mivel példánkra

$$C_0=w_0-\vartheta_0,\ C_n=M^*(Q^*)^n\qquad(n=1,2,\ldots),$$

kézenfekvő az $M=M^*$, $Q=Q^*$ speciális választás, ami (14. 7) jobboldalát $\vartheta_0/Q^*(M^*+\vartheta_0)$-ba viszi át. — De e tört szemlátomást nem egyéb, mint a kérdéses függvény egyetlen w_0-helyének s_0-tól való távolsága, úgyhogy most

$$D(s_0,w_0)=\frac{\vartheta_0}{Q^*(M^*+\vartheta_0)}$$

érvényes, vagyis esetünkben a w_0-mentességi sugár eléri a (14. 7)-beli alsó korlátot.

2. Amennyiben egy $\sigma=\sigma_0>\eta$ egyenes mentén fennállnak a (14. 8) egyenlőtlenségek, akkor (14. 7) alapján

$$R(s,w_0)\geqq\frac{1}{Q(M\varrho^{-1}+1)}\qquad(\sigma=\sigma_0),$$

$$(14.12)\qquad U(w_0)=\sigma_0-\inf_{\sigma=\sigma_0}R(s,w_0)\leqq\sigma_0-Q^{-1}\varrho(M+\varrho)^{-1};$$

a (14. 9) egyenlőtlenség (14. 4) és (14. 12) folyománya.

5. Utolsó két tételünk alkalmazható pl. *algebrai egyenletek gyök-eloszlásának* vizsgálatára: (14. 3) és (14. 7) egyrészt pontos — a 0-tól különböző együtthatókat tartalmazó — kifejezést, másrészt egyszerű *alsó* korlátokat szolgáltat a kezdőponthoz legközelebbi (egy vagy több) zérushely abszolút értéke számára (vö. [39], Satz 3.).[101]

E helyen természetszerűleg a DIRICHLET-sorok értékkészletére vonatkozó felhasználás kerül előtérbe, ami viszont felveti a kérdést: hogyan állíthatók fel (mennél finomabb) (14. 8)-típusú becslések egy

$$(14.13)\qquad g(s)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k k^{-s}$$

összegfüggvény esetében, feltéve, hogy az $A_k (k=2,3,\ldots)$ együtthatósorozat nem csupa 0-ból áll és korlátos: $|A_k|\leqq K$.

Mindenekelőtt megállapítjuk: a (14. 13) sor $\sigma>1$ mellett abszolút és bármely $\sigma\geqq 1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ félsíkban egyenletesen konvergens, úgyhogy $g(s)$ reguláris, ha $\sigma>1$; egyúttal

$$(14.14)\qquad |g(s)|\leqq K\zeta(\sigma)\qquad (\sigma>1).$$

Másfelől fennáll a

$$(14.15)\qquad |g(s)-w_0|\geqq |A_1-w_0|-K[\zeta(\sigma)-1]$$

alsó limitáció.

Mivel $\zeta(s)$ sor-, ill. legegyszerűbb integrál-alakja segítségével könnyen belátható, hogy

$$(14.16)\qquad |\zeta(s)-1|<3\cdot 2^{-\sigma}\qquad (\sigma\geqq 2),$$

továbbá

$$(14.17)\qquad |\zeta^{(n)}(s)|=\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\log k)^n}{k^s}\right|\leqq n!\,\sigma(\sigma-1)^{-(n+1)}\qquad (n=1,2,\ldots),$$

$g(s)$ számára adódik: I. A $0<\varrho<|A_1-w_0|$ és

$$L_\varrho=\max\left(2,\quad (\log 2)^{-1}\log\frac{3K}{|A-w_0|-\varrho}\right)$$

jelölés mellett

$$(14.18)\qquad |g(s)-w_0|\geqq\varrho,\ \text{ha}\ \sigma\geqq L_\varrho;$$

II. minden pozitív egész n-re

$$(14.19)\qquad |g^{(n)}(s)|\leqq K|\zeta^{(n)}(\sigma)|\leqq Kn!\,\sigma(\sigma-1)^{-(n+1)}\qquad (\sigma>1).$$

Külön kimondásra érdemes a (14. 9)-ből ezek után folyó

5. LEMMA. *Ha a* (14. 13) *sorra* $A_1\neq w_0$, $\min\limits_{k>1}|A_k|>0$, $|A_k|\leqq K$ $(k=2,3,\ldots)$ *és* (*) *valamely* $\sigma\geqq\sigma_0$ $(\sigma_0>1)$ *félsíkban* $|g(s)-w_0|\geqq\varrho>0$[102],

[101] Mint ismeretes, az irodalomban található idevágó eredmények legtöbbje egy, vagy több gyököt magában foglaló kört (tehát a gyökök abszolút értékére nézve *felső* korlátot) ad meg. — Vö. pl. [44]; továbbá FEJÉR [8]; TURÁN [54], 108. o.

[102] A (*) kikötés (14. 21) szerint $\varrho<|A_1-w_1|$ mellett bizonyosan teljesül, ha $\sigma_0=L_\varrho$.

akkor $g(s)$ *nem veszi fel a* w_0 *értéket a*

$$\sigma > \sigma_0 - \frac{\varrho(\sigma_0-1)^2}{K_{\sigma_0}+\varrho(\sigma_0-1)} \tag{14.20}$$

félsíkban.

6. Ami mármost speciálisan a $g(s,x) = \frac{1}{2}(2\pi)^s f(s,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) k^{-s}$ és $\tilde{g}(s,x) = \frac{1}{2}(2\pi)^s \tilde{f}(s,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x) k^{-s}$ $(\sigma > 1)$ függvények esetét illeti (vö. (2.8), (4.2)—(4.3)), ezeknél a fentiekben előforduló konstansok a következő (közös) módon választhatók (vö. (13.5), (14.6), (14.19)): $K = 3\int_0^1 |f(t)|\,dt$, $M = \frac{3\sigma}{\sigma-1}\int_0^1 |f(t)|\,dt$, $Q = \frac{1}{\sigma-1}$. Így a XXI.—XXII. tétel, valamint az 5. lemma együttes felhasználásával a következő tételt nyerjük:

XXIII. tétel. I. *Legyen* $x \in (0,1)$ *adott hely és* w_0 *egy (tetszőlegesen) előírt komplex szám; tegyük fel, hogy az* $a_k(x)$ $(k=2,3,\ldots)$ *sorozatnak nem minden eleme* 0. — *Akkor*

1. $g(s,x)$ *bármely* $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ $(\sigma_0 > 1)$ *ponthoz tartozó* w_0*-mentességi sugarára és* w_0*-mentességi abszcisszájára a* (14.2), (14.4) *képletek érvényesek, ahol* $R(s, w_0)$ *jelentése a* (14.1) *alatti és* $C_n = C_n(s)$ *helyébe* $(-1)^n (n!)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) k^{-s} (\log k)^n$ *teendő.*

2. *Minden* $|s-s_0| = R(s_0, w_0)$ $(\sigma_0 > 1)$ *kör belsejében és a* $\sigma = U(w_0)$ *egyenes jobboldalán* $g(s,x)$ *meromorf; ha még az említett kör, ill. egyenes maga is* $g(s,x)$ *meromorfia-tartományához tartozik, akkor* (14.3), *ill.* (14.5) *megadja az* s_0*-beli* w_0*-mentességi sugár, ill. a* w_0*-mentességi abszcissza pontos értékét.*

3. *Ha* $g(s_0,x) \neq w_0$ $(\sigma_0 > 1)$, *akkor* $g(s,x)$ *bizonyosan meromorf s nem veszi fel a* w_0 *értéket az*

$$|s-s_0| < \frac{(\sigma_0-1)^2 |g(s_0,x)-w_0|}{3\sigma_0 \int_0^1 |f(t)|\,dt + (\sigma_0-1)|g(s_0,x)-w_0|} \tag{14.21}$$

körbelsőben; továbbá: ha (⁑) *egy teljes* $\sigma \geqq \sigma_0\,(>1)$ *félsíkban* $|g(s,x)-w_0| \geqq \varrho > 0$, *akkor* $g(s,x)$*-nek nincs* w_0*-helye a (tágabb)*

$$\sigma > \sigma_0 - \frac{\varrho(\sigma_0-1)^2}{3\sigma_0 \int_0^1 |f(t)|\,dt + \varrho(\sigma_0-1)} \tag{14.22}$$

félsíkban sem. — A ($\ast$) *feltétel mindenesetre teljesül, midőn* $a_1(x) \neq w_0$, $\varrho < |a_1(x) - w_0|$ *és*

$$(14.23) \qquad \sigma_0 = \max\left(2,\ (\log 2)^{-1} \log \frac{9\int\limits_0^1 |f(t)|\,dt}{|a_1(x) - w_0| - \varrho}\right).$$

II. *Az eddigiek érvényben maradnak, ha* $g(s, x)$ *helyett* $\tilde{g}(s, x)$*-et s megfelelően* $a_k(x)$ *helyett* $b_k(x)$*-et írunk.*

7. Végül az 5. lemmával kapcsolatban megemlítjük: $\varrho = \inf\limits_{\sigma \geqq \sigma_0} |g(s) - w_0|$ választás mellett $\varrho \to +0$ esetén (14.20) jobboldala azon ϱ_0 abszcisszák alsó határához tart, melyekre $(g(s) - w_0)^{-1}$ a $\sigma \geqq \sigma_0 (> 1)$ félsíkban holomorf és korlátos; röviden: e függvény ún. „holomorfia-korlátossági" abszcisszájához.[103] — Pl. $w_0 = 0$ és

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \qquad (\sigma > 1)$$

esetén a szóban forgó határátmenet limeszül 1-et szolgáltat, s ez most éppen megegyezik a függvény 0-*mentességi* (gyökmentességi) *abszcisszájával,* mivel — az $1 - 2^{1-s}$ tényező miatt — az $1 + \dfrac{2\nu\pi}{\log 2} i$ $(\nu = 0, \pm 1, \ldots)$ számok mindegyike zérushely.[104]

Más a helyzet magával a zetafüggvénnyel: $\zeta(s)$-nél — mint ismeretes — a $\sigma = 1$ vertikális gyökmentes, másrészt mindmáig megoldatlan a probléma, hogy a $\mathfrak{B}(0) = 1$, $\frac{1}{2} < \mathfrak{B}(0) < 1$, $\mathfrak{B}(0) = \frac{1}{2}$ lehetőségek közül melyik helytálló. — Tekintettel azonban arra, hogy $\zeta(s)$ az egész síkon meromorf, (14.5) pontosan megadja a *Riemann-féle zetafüggvény gyök-abszcisszáinak felső határát,* melyet Θ-val szokás jelölni; részletesen kiírva:

$$(14.24) \qquad \begin{cases} \Theta = \sigma_0 - \inf\limits_{\sigma = \sigma} \lim\limits_{\nu \to \infty} \left| \sum\limits_{k=1}^{\nu} (-1)^k Z_0^{-k} \sum\limits_{\substack{n_1 + \ldots + n_k = \nu \\ n_j > 0}} Z_{n_1} \ldots Z_{n_k} \right|^{-\frac{1}{\nu}} \\ Z_n = Z_n(s_0) = \zeta^{(n)}(s_0)/n!\ (n = 0, 1, 2, \ldots);\ \sigma_0 > 1. \end{cases}$$

(A belső összeg tagjai $|Z_n| \leqq \sigma_0(\sigma_0 - 1)^{-(n+1)}$ folytán (vö. (14.17)) mindenesetre igen egyszerűen megbecsülhetők és számuk [vö. (14.10)] $= \binom{\nu - 1}{k - 1}$.

103 A szóban forgó érték egyúttal $(g(s) - w_0)^{-1}$ DIRICHLET-sorának ún. egyenletes-konvergencia-abszcisszája.

104 Vegyük észre, hogy e példában (14.9) felhasználása *optimális* felső korlátra vezet.

(14.24) kissé komplikáltabb jellegű, mint az

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^s}\qquad(\sigma>1)$$

kifejtés segítségével adódó variáns:

$$(14.25)\qquad\begin{cases}\Theta=\sigma_0-\inf\limits_{\sigma=\sigma_0}\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\dfrac{H^{(\nu)}(s_0)}{\nu!}\right|^{-\frac{1}{\nu}},\\ H^{(\nu)}(s_0)=(-1)^\nu\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\mu(k)(\log k)^\nu}{k^{s_0}}\quad(\nu=0,1,\ldots);\ \sigma_0>1\end{cases}$$

(itt $\mu(k)$ a MÖBIUS-féle számelméleti függvény), mely evidenciába helyezi az összefüggést $\zeta(s)$ gyökeinek eloszlása és a törzsszámok között; viszont (14.24)-ben csupán az eredeti $\sum k^{-1}(\sigma>1)$ sor, valamint ennek deriváltjai fordulnak elő.

15. §. Záró megjegyzések

1. Az elmélet *továbbfejlesztési lehetőségeit* illetően e helyen három szempontot kívánunk megemlíteni.

Az egyik az, hogy a W_s-limesz fogalma nyilván a függvényeknek ($L(0,1)$-nél) tágabb osztályára is átvihető, ha FOURIER—LEBESGUE-sorok helyett pl. FOURIER—CAUCHY-[105] vagy FOURIER—DENJOY-sorfejtéseket használunk. Az ilyen irányú bővítés igénye különösen szembetűnő, ha arra gondolunk, hogy egyes egyszerű elemi függvények nem tartoznak az $L(0,1)$ osztályhoz. Így $\operatorname{ctg}\pi u$ nem integrálható $(0,1)$-ben, viszont írhatjuk:

$$(15.1)\qquad \operatorname{ctg}\pi x\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n\pi x\qquad(0<x<1)$$

abban az értelemben, hogy a baloldal CAUCHY-féle főértékekként képezett FOURIER-együtthatói:

$$(15.2)\qquad\begin{cases}\alpha_n=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\operatorname{ctg}\pi t\cdot\cos 2n\pi t\,dt=0\ (n=0,1,\ldots),\\ \beta_n=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\operatorname{ctg}\pi t\cdot\sin 2n\pi t\,dt=1\ (n=1,2,\ldots).\end{cases}$$

(Egyúttal látjuk, hogy a (15.1) sorból pl. $(C,1)$- vagy (A)-szummációval visszakapható a függvény.) — Amennyiben tehát a 4. §-beli definíciót α_n, β_n

[105] Vö. RÉNYI [45], TITCHMARSH [52].

(15. 2) jelentése mellett is megtartjuk, akkor (vö. (3. 17)—(3. 18))

$$
(15.3)\quad \begin{cases} \cos\frac{\pi s}{2}\cdot {}^{(A)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin 2n\pi x}{(2n\pi)^s}-\sin\frac{\pi s}{2}\cdot {}^{(A)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^s}= \\ =\cos\frac{\pi s}{2}\cdot \mathfrak{Q}_s(x)-\sin\frac{\pi s}{2}\cdot \mathfrak{P}_s(x)= \\ =\operatorname{ctg}\pi s\cdot \mathfrak{Z}_s(x)-\operatorname{cosec}\pi s\cdot \mathfrak{Z}_s(-x) \end{cases}
$$

folytán minden s-re

$$
(15.4)\qquad (\operatorname{ctg}\pi u)_{[s]}(x)=\operatorname{ctg}\pi s\cdot \mathfrak{Z}_s(x)-\operatorname{cosec}\pi s\cdot \mathfrak{Z}_s(-x)\qquad (0<x<1)
$$

($s=0, 1, 2, \ldots$ mellett a jobboldalon a megfelelő határérték értendő); innen pedig — $\operatorname{tg}\pi u=-\operatorname{ctg}\pi\left(u-\frac{1}{2}\right)$ lévén — adódik:

$$
(15.5)\qquad (\operatorname{tg}\pi u)_{[s]}(x)=-\operatorname{ctg}\pi s\cdot \mathfrak{Z}_s\left(x-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{cosec}\pi s\cdot \mathfrak{Z}_s\left(\frac{1}{2}-x\right).
$$

2. Vegyük észre, hogy — az értelmezésnél használt trigonometrikus sorokat véve alapul —

$$
(15.6)\qquad (\operatorname{ctg}\pi u)_{[s]}(x)={}^{(A)}\sum_{n=1}^{\infty}2(2n\pi)^{-s}\sin\left(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\right)
$$

konjugáltja a

$$
(15.7)\qquad \mathfrak{Z}_s(x)=(-1)_{[s]}={}^{(A)}\sum_{n=1}^{\infty}2(2n\pi)^{-s}\cos\left(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\right)
$$

magfüggvénynek; hasonlóképpen nem látszik érdektelennek a $\mathfrak{Z}_s(x, r)$ általánosított mag (vö. (5. 4))

$$
(15.8)\qquad \mathfrak{Y}_s(x, r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2r^n}{(2n\pi)^s}\sin\left(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\right)
$$

megfelelőjének s általában *konjugált Fourier-sorok* és *függvények* esetének vizsgálata.

(Mint ismeretes, a $\mathfrak{Z}_p(x, r)$, $\mathfrak{Y}_p(x, r)$ $(p=0, 1, 2, \ldots)$ függvények — melyek közül pl.

$$
(15.9)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_0(x, r)=\frac{2r\cos 2\pi x-2r^2}{1-2r\cos 2\pi x+r^2},\ \mathfrak{Z}_1(x, r)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin 2\pi x}{1-r\cos 2\pi x},\ldots \\ \mathfrak{Y}_0(x, r)=\frac{2r\sin 2\pi x}{1-2r\cos 2\pi x+r^2},\ \mathfrak{Y}_1(x, r)=\frac{1}{2\pi}\log(1-2r\cos 2\pi x+r^2),\ldots \end{cases}
$$

— gyakran előfordulnak az analízisben; megemlítjük az ún. SCHLÄFLI—LOBACSEVSZKIJ-féle függvényekkel való kapcsolatukat is, mely utóbbiak jelentős szerepet játszanak a poliéderek elméletében.)[106]

3. A *holomorf* $f(w)$ esetére vonatkozó (10. 9), (11. 1) előállításokkal kapcsolatban kínálkozik a gondolat, hogy a következő általánosítással éljünk:

Legyen a függvénytani síknak a (véges vagy végtelen) rögzített, z változó pontja, legyen $f(w)$ az $(a, z]$ egyenes-darab mentén reguláris függvény, és jelentsen $\int_a^{(z+)}$ egy olyan a-ból kiinduló s itt végződő, z-t egyszer pozitív értelemben megkerülő zárt út menti integrált, mely görbe $(a, z]$-t belsejében tartalmazza s benne van $f(w)$-nek e szakasz körüli holomorfia-tartományában. Tetszőleges komplex $\mu \neq -1, -2,$ mellett képezzük az

$$(15.10) \qquad f_a^{(\mu)}(z) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi i} \int_a^{(z+} f(w)\,(w-z)^{-(\mu+1)}\,dw$$

szorzatot, hol a hatvány értéke a $\varphi - 2\pi < \arg(w-z) \leqq \varphi$, $\varphi = \operatorname{Arg}(a-z)$[107] megszorításnak megfelelően választandó; nevezzük $f_a^{(\mu)}(z)$-t $f(w)$ ${}_aD^{\mu}$*-deriváltjának* a $w=z$ helyen, feltéve, hogy a (15. 10) integrál létezik.[108]

Mint látjuk, $f_a^{(\mu)}(z)$ $\mu = -s$, $a = -\infty + iy_0$, $z = x + iy_0$ $(0 < x < 1)$ mellett (11. 1) szerint $f_{[s]}(z)$-be megy át, amennyiben $f(w)$ $[iy_0, 1+iy_0)$ mentén holomorf, 1 szerint periodikus és $\int_0^1 f(u+iy_0)\,du = 0$; nehézség nélkül igazolható, hogy (15. 10) formálisan mind a RIEMANN—LIOUVILLE-, mind a WEYL-féle integrált magában foglalja.

A szóban forgó esetre a klasszikus differenciál- és integrálszámításnak szinte minden fontosabb tétele, ill. szabálya kiterjeszthetőnek látszik, bár többségük csak nehézségek és komplikációk árán; ennek tárgyalásával más alkalommal kívánunk foglalkozni.

4. Ami az *alkalmazásokat* illeti, itt szintén csak néhány — másutt kidolgozandó — témakör felsorolására szorítkozhatunk.

1. Legyen $g_\nu(u)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ egy függvénysorozat, melynek elemei elegendő kis $\sigma > 0$ mellett W_σ-limitálhatók valamely $u = x \in (0, 1)$ helyen.

[106] Vö. [5], [10].

[107] „Arg" a szokásos módon főarcust jelöl.

[108] Felhívjuk a figyelmet arra, hogy számos nevezetes speciális függvény, mely elemi esetben közönséges deriváltként, általában pedig komplex integrál-előállítással értelmezhető, „D^{μ}-deriváltnak fogható fel. (Pl. LEGENDRE-, BESSEL-, hipergeometrikus függvények stb.)

Azt mondjuk, hogy a $g_1(x)+g_2(x)+\cdots$ sor *W-szummálható* és *W-szummája* $G(x)$, jelben

$$^{(W)}\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)=G(x),$$

ha $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(g_\nu(u))_{[\sigma]}(x)$ $(\sigma<\delta)$ konvergens és összege $\sigma\to+0$ mellett $G(x)$-hez tart.

Annak illusztrálására, hogy ez az *összegező eljárás* az ismerteken túlmenő eredményeket is szolgáltat, megemlítjük, hogy *korlátos $f(u)$ függvény* FOURIER-*sora W-szummálható minden olyan x helyen, ahol van baloldali határértéke és W-szummája $f(x-0)$-val egyenlő.*

Valóban, esetünkben a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{-\sigma}\cos 2n\pi t$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{-\sigma}\sin 2n\pi t$ $(\sigma>0)$ sorok (0, 1)-beli „majorizált" konvergenciája miatt írhatjuk (vö. (2. 12)—(2. 13), (4. 8), (6. 16)):

$$f_{[\sigma]}(x)=\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_\sigma(t)-\mathfrak{Z}_\sigma(x)]\,dt=\alpha_0\cdot(1)_{[\sigma]}(x)+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n(\cos 2n\pi u)_{[\sigma]}(x)+\beta_n(\sin 2n\pi u)_{[\sigma]}(x)],$$

tehát (6. 18) alapján (vö. (6. 24))

$$\alpha_0+2\cdot{}^{(W)}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos 2n\pi x+\beta_n\sin 2n\pi x)=\lim_{\sigma\to+0} f_{[\sigma]}(x)=f(x-0).\text{[109]}$$

2. Mint ismeretes, HADAMARD idézett [11] dolgozatában a törtrendű integrálokat és deriváltakat *hatványsorok konvergenciakör-menti szingularitásai*nak vizsgálatánál használta fel, megmutatva, hogy szoros kapcsolat áll fenn az összegfüggvény egy-egy szinguláris pontbeli ún. „rendje" és pl. radiális határátmenethez tartozó „növekedési foka" között. (Az idevágó eredményeket továbbfejlesztette többek között BOREL és FABRY.)

Remélhető, hogy a W_s-limeszek segítségével e területen újabb adalékokat nyerhetünk.

3. Parciális, különösen bizonyos hiperbolikus *másodrendű differenciál-*

[109] A (W)-szummációval, főleg ennek *Fourier*-sorokra való alkalmazásával foglalkozik a szerzőnek több — részben már 1959-ben elkészült — megjelenés alatt levő dolgozata. Vö. pl. „Sur la sommation de la série de Fourier au moyen de l'intégration d'ordre fractionnaire", *Comptes Rendus Paris*, **251** (1960); továbbá „Application d'une nouvelle méthode de sommation aux series trigonométriques et de Dirichlet", *Acta Math. Acad. Sci, Hung.*, **11** (1960) és „Über die Dirichlet—Summation Fourierscher Reihen", *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **3—4** (1960).

egyenletek peremértékfeladatainak megoldása legcélszerűbben trigonometrikus sorok segítségével történhetik; egyúttal törtrendű integrálok alkalmazása is hasznosnak bizonyult (vö. RIESZ MARCELL [48]). — Másfelől az ún. ABEL-féle integrálegyenlet publikálása (1823) óta mindmáig egyre szaporodott az irodalomban azoknak a (mechanikai, hőtani, elektromosságtani stb. problémákból eredő) *integrál-* vagy *integrodifferenciálegyenletek*nek a száma, melyek tört rendszámú differenciálegyenletként is felfoghatók, s ennek megfelelően kerültek tárgyalásra.[110]

Az előzőkben bevezetett komplex-rendű deriváltak, integrálok révén a szóban forgó típusú *függvényegyenletek* elmélete új, közös oldalról közelíthető meg.

(Beérkezett: 1960. III. 17.)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete

110 Vö. pl. DAVIS [6]; DOETSCH [7], 157—169. — A századforduló óta különösen előtérbe kerültek az ilyen irányú alkalmazási lehetőségek a formális ún. HEAVISIDE-kalkulus elterjedése folytán.

BIZONYOS POLINOMOK IRREDUCIBILITÁSA A KÖROSZTÁSI TESTEKBEN

Írta: SERES IVÁN

DORWART, H. L. és OYSTEIN ORE [1] vizsgálták bizonyos egész együtthatójú polinomok irreducibilitását, főleg kvadratikus számtestek fölött. A Szerző [2] bebizonyította, hogy ha $F_m(z)$ az m-edik körosztási polinom és ebbe a $z = P(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$ polinomot helyettesítjük, az új $F_m(P(x))$ polinom irreducibilis a racionális számok fölött, ahol az $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ számok racionális egészek, és a $P(x) - e^{\frac{2\pi i}{m}}$ polinom irreducibilis a fenti feltételek mellett, ha $n \geqq 5$ a $\mathcal{K}_m$ test fölött. Hogy $n \leqq 4$-re a dolog hogyan áll, nem volt ismeretes. A jelen dolgozat bebizonyítja a következő

I. tételt: *Jelentsen az $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ racionális egész számokat, $F_m(z)$ az m-edik körosztási polinomot. A $G(x) = F_m(P(x)) \left(m > 2;\, P(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k) \right)$ polinom akkor és csak akkor reducibilis a racionális számtest fölött, ha $n = 3$, az $a_1 < a_2 < a_3$ három szomszédos racionális egész szám és $F_m(z) = z^4 - z^2 + 1$ a 12. körosztási polinom.*

BIZONYÍTÁS: CAPELLI tétele szerint [3] a $G(x)$ polinom akkor és csak akkor reducibilis a racionális számok fölött, ha a $\prod_{k=1}^{n} (x - a_k) - e^{\frac{2\pi i}{m}}$ polinom reducibilis az m-edik körosztási test, $\mathcal{K}_m$ fölött. ($\mathcal{K}_0$ jelentse a racionális számok testét, a rövidség kedvéért legyen $e^{\frac{2\pi i}{m}} = \zeta$. Jegyezzük meg a későbbiek miatt azt, hogy a $\prod_{k=1}^{n} (x - a_k) - e^{\frac{2\pi l i}{m}}$, $((l, m) = 1)$ polinom helyett a $\prod_{k=1}^{n} (x - a_k) - e^{\frac{2\pi i}{m}}$ polinommal foglalkozunk, ami csak egyszerűsíti a vizsgálódást. CAPELLI tétele szerint ezt szabad tennünk.)

Tegyük fel, hogy a $P(x) - \zeta$ polinom reducibilis a $\mathcal{K}_m$ fölött: $P(x) - \zeta = g(x)h(x)$, ahol a $g(x)$ és a $h(x)$ polinom főegyütthatója 1. Legyen a $g(x)$ polinom irreducibilis és fokszáma egyik legkisebb a $P(x) - \zeta$ polinom tényezői között.

Szükségünk lesz a következő segédtételekre:

1. SEGÉDTÉTEL. (L. KRONECKERnek a körosztási test egységeire vonatkozó tétele [4].) *Minden ω egység az m-edik körosztási testből, $\mathcal{K}_m$-ből így írható: $\omega=\varepsilon\eta$, ahol ε valós egység, η egységgyök, [az m-edik, esetleg a 2m-edik vagy a 4m-edik].*

2. SEGÉDTÉTEL. *Vegyen fel egy $\mathcal{K}_m$-beli egészegyütthatós polinom, $g(x)$ az $x=a_k$ és $x=a_l$ racionális egész számokon egységeket a $\mathcal{K}_m$-ből. Az 1. segédtétel szerint a két egység*

$$g(a_k)=\varepsilon_k\eta_k \quad \text{és} \quad g(a_l)=\varepsilon_l\eta_l$$

alakú, ahol ε_k és ε_l valós egységek, η_k és η_l egységgyökök.

Az esetben, ha

a) $|a_k-a_l|>2$, *az* $\eta_k=\pm\eta_l$, *ha*

b) $|a_k-a_l|=2$, *az* $\eta_k=i^\alpha\eta_l$, *ahol* $\alpha=1$ *vagy* 3.

A 2. segédtétel bizonyítása:

$$a_k-a_l|g(a_k)-g(a_l)=\varepsilon_k\eta_k-\varepsilon_l\eta_l.$$

A jobboldalt az $\varepsilon_k^{-1}\eta_l^{-1}$ egységgel szorozva,

$$a_k-a_l|\eta_k\eta_l^{-1}-\varepsilon_l\varepsilon_k^{-1}.$$

A konjugált komplexre térve át,

$$a_k-a_l|\eta_k^{-1}\eta_l-\varepsilon_l\varepsilon_k^{-1}.$$

A két utóbbi összefüggésből adódik, hogy

$$a_k-a_l|\eta_k^2\eta_l^{-2}-1. \tag{1}$$

Ez igaz, ha az osztandó helyett annak konjugáltjait írjuk, és ezért az (1)-ben az osztó és osztandónak a $\mathcal{K}_0$-ra vonatkozó normáira helyes a következő:

$$N(a_k-a_l|N(\eta_k^2\eta_l^{-2}-1).$$

(A két norma nyilván racionális egész szám.)

a) Ha $|a_k-a_l|>2$, akkor

$$|N(a_k-a_l)|>N(2)\geqq|N(\eta_k^2\eta_l^{-2}-1)|.$$

Ez csak akkor nem vezet ellenmondásra, ha

$$\eta_k=\pm\eta_l.$$

b) Ha $|a_k-a_l|=2$, akkor (2) szerint

$$|N(a_k-a_l)|=N(2)|N(\eta_k^2\eta_l^{-2}-1).$$

Az $\eta_k^2\eta_l^{-2}-1$ és minden konjugáltjának abszolút értéke $\leqq 2$ miatt

$$N(2)=|N(\eta_k^2\eta_l^{-2}-1)|.$$

Ez csak akkor következhetik be, ha az $\eta_k^2\eta_l^{-2}-1$-re, illetve annak bármely konjugáltjára fennáll a következő összefüggés:

$$|\eta_k^2\eta_l^{-2}-1|=2.$$

Ez, mivel $|\eta_k^2\eta_l^{-2}|+|-1|=2$, azt mondja, hogy az $\eta_k^2\eta_l^{-2}$ és a -1 vektor egy egyenesbe esik a GAUSS-féle koordináta rendszerben.

Ebből

(2) $$\eta_k^2\eta_l^{-2}=-1,$$

vagyis igaz a 2b segédtétel.

Az I. tétel bizonyítása:

Az n = 4 eset.

1. Legyen adva $a_1<a_2<a_3<a_4$; $a_4-a_1\geqq 4$. Ha a $\prod_{k=1}^{4}(x-a_k)-e^{\frac{2\pi i}{m}}$ polinomnak a $\mathfrak{K}_m$ fölött egyik (legkisebb fokú) tényezője a $g(x)$ polinom, akkor $g(a_k)=\varepsilon_k\eta_k$ $(k=1,2,3,4)$ egység. Ezen egységek között van legalább három, amely egy egyenesbe esik a GAUSS-féle koordináta rendszerben.

Ennek bizonyítására gondoljuk meg, hogy $a_4-a_1>2$ és a $2a$ segédtétel miatt

(3) $$\eta_4=\pm\eta_1.$$

a) Ha $a_2-a_1=1$, akkor $a_4-a_2>2$ s így a 2a segédtétel miatt

$$\eta_4=\pm\eta_2,$$

b) ha $a_2-a_1=2$, akkor $a_3-a_1>2$ és a 2a segédtétel miatt

(4) $$\eta_1=\pm\eta_3,$$

c) ha $a_2-a_1>2$, akkor a 2a segédtétel miatt

$$\eta_1=\pm\eta_2=\pm\eta_3=\pm\eta_4.$$

Mindenesetre az η_1,η_4,η_r egy egyenesbe esik, ahol $r=2$ az a) és c) esetben, és $r=3$ a b) esetben. A $g(x)$ (foka $\leqq 2$) az interpolációs formulával előállítható:

$$g(x)=\sum_{\substack{v=1\\v=r\\v=4}}\frac{R(x)g(a_v)}{R'(a_v)(x-a_v)},$$

ahol $R(x)=(x-a_1)(x-a_r)(x-a_4)$.

Az a), b), és c)-ben kapott eredményeket felhasználva,

$$g(x)=\eta_1 \sum_{\substack{v=1\\ v=r\\ v=4}} \frac{R(x)(\pm\varepsilon_v)}{R'(a_v)(x-a_v)}=\eta_1 L_1(x),$$

ahol az $L_1(x)$ valós egészegyütthatójú polinom a $\mathfrak{K}_m$ fölött. Mivel a $g(x)$ polinom főegyütthatója 1, ezért az η_1 egységgyök $=\pm 1$, tehát a $g(x)$ polinom minden együtthatója valós algebrai szám. Osszuk el a $P(x)-\zeta$ polinomot a $g(x)$ valós polinommal:

(A) $$P(x)-\zeta=Q(x)g(x)+T(x),$$

ahol a $Q(x)$ polinom a hányados és a $T(x)$ polinom a maradék. Ez nulla kell hogy legyen. Hasonlóképpen osszuk el a $P(x)$ polinomot a $g(x)$ polinommal:

(B) $$P(x)=Q_1(x)g(x)+T_1(x),$$

ahol a $Q_1(x)$ polinom a hányados, a $T_1(x)$ polinom a maradék. Ezek valós együtthatójúak.

Az (A) és (B) egyenletekből

$$T_1(x)-\zeta-T(x)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, g(x)).$$

De a $\mathrm{Grad}\,(T_1(x)-\zeta)\leqq \mathrm{Grad}\, g(x)$; $\mathrm{Grad}\,(T(x))<\mathrm{Grad}\,(g(x))$; $\mathrm{Grad}\, g(x)>0$ miatt $T_1(x)-\zeta=T(x)$.

Ez utóbbi egyenlet ellenmondást ad, ha a $T(x)\equiv 0$. Ugyanis a $T_1(x)$ valós polinom, de a $T_1(x)-\zeta$ már nem valós.

2. *Legyen* $a_4-a_1=3$; $a_1=0, a_2=1, a_3=2, a_4=3$ *és* $g(x)=x^2+Ax+B$; $h(x)=x^2+Cx+D$. (A taglalás megkönyítése végett vegyük az $a_1<a_2<a_3<a_4$ számokat minél kisebb abszolút értékű racionális egész számnak. Ez módunkban áll, mert az x változót a valós tengelyen megfelelőképpen eltoljuk.)

Érvényes a következő összefüggés:

$$g(1)-g(2)+\frac{g(3)-g(0)}{3}=0.$$

Erről a négy alapművelet győz meg bennünket.

Az 1. segédtétel szerint $\varepsilon_2\eta_2-\varepsilon_3\eta_3+\frac{\varepsilon_4\eta_4-\varepsilon_1\eta_1}{3}=0$. $a_4-a_1=3$ miatt fennáll (3) és ezért $\eta_4=\pm\eta_1$. A 2b segédtétel felhasználásával:

$$a_3-a_1=2,$$

ezért

(5) $$\eta_3=i^{\alpha_1}\eta_1.$$

Másrészt

$$a_4 - a_2 = 2,$$

ezért

$$\eta_4 = i^{\alpha} \eta_2,$$

a (3) figyelembevételével

(6) $$\eta_2 = i^{\alpha_2} \eta_1.$$

A (3), (5), (6) összefüggést felhasználva és η_1-gyel rövidítve:

(7) $$\varepsilon_2 i^{\alpha_2} - (\pm \varepsilon_3) i^{\alpha_1} + \frac{1}{3}(\pm \varepsilon_4 - \varepsilon_1) = 0.$$

A 2b segédtétel szerint α_1 és α_2 csak páratlan lehet, így (7) valós része,

$$\frac{\pm \varepsilon_4 - \varepsilon_1}{3} = 0.$$

Szorozzunk vissza az η_1-gyel és használjuk fel a (3) és a (4) összefüggéseket. Ekkor

$$\varepsilon_4 \eta_4 - \varepsilon_1 \eta_1 = g(3) - g(0) = 0;$$

vagyis $3^2 + 3A + B - B = 0$, és így

$$A = -3.$$

Hasonló az eset a $h(x)$ polinomnál. Ott $C = -3$. Így

$$x(x-1)(x-2)(x-3) - e^{\frac{2\pi i}{m}} = g(x)h(x) = (x^2 - 3x + B)(x^2 - 3x + D).$$

A műveletek elvégzése után az együtthatók összehasonlításával a

(8) $$B + D = 2 \quad \text{és a} \quad B \cdot D = -e^{\frac{2\pi i}{m}} = -\zeta$$

egyenlethez jutunk, amiből

(9) $$B = 1 \pm \sqrt{1+\zeta} \quad \text{és} \quad D = 1 \mp \sqrt{1+\zeta}.$$

B és D egész szám, a szorzatuk (8) szerint egységet ad. Az egyik egység $1 + \sqrt{1+\zeta}$ alakú. Ez KRONECKER tétele miatt nem lehetséges, mert

$$\operatorname{arc} \sqrt{1+\zeta} = \frac{2\pi}{2m} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{arc}(1 + \sqrt{1+\zeta}) < \frac{2\pi}{4m};$$

ilyen egység a $\mathcal{K}_m$-ben nincs. Ezzel az $n = 4$ eset el van intézve.

Az n = 3 eset.

Legyenek adva az $a_1 < a_2 < a_3$ racionális egész számok. A

$$\prod_{k=1}^{3}(x-a_k)-e^{\frac{2\pi i}{m}}=P(x)-\zeta$$

polinom legyen két egész együtthatós polinom szorzatával, $g(x)h(x)$-szel egyenlő (a $\mathfrak{K}_m$ fölött). [A jelölés hasonlít az $n=4$ esetben tárgyaltakéhoz.]

Legyen a $g(x)$ polinom elsőfokú

$$g(x)=x+A; \quad h(x)=x^2+Bx+C.$$

1. $g(x)$-et tekintve, az $a_3-a_1>2$ egyenlőtlenség nem lehetséges. Ugyanis az 1. segédtétel szerint

$$g(a_1)=\varepsilon_1\eta_4, \quad g(a_2)=\varepsilon_2\eta_2, \quad g(a_3)=\varepsilon_3\eta_3.$$

A 2a segédtétel szerint, $a_3-a_1>2$ miatt

$$\eta_3=\pm\,\eta_1.$$

Az interpolációs formula az $x=a_1$ és $x=a_3$-ra a $g(x)$ polinomot $\eta_1 L_3(x)$ alakban adja meg, ahol az $L_3(x)$ polinom valós. Ilyen osztója a $P(x)-\zeta$ polinomnak nincs. (L. az $n=4$ esetet.)

2. Legyen $a_3-a_1=2$.

Legyen $a_1=-1$, $a_2=0$, $a_3=1$; $g(-1)=\varepsilon_1\eta_1$, $g(1)=\varepsilon_3\eta$. Ez esetben a 2b segédtétel szerint

$$\eta_3=i^{\alpha}\eta_1,$$

továbbá

$$g(-1)=-1+A; \quad g(1)=1+A.$$

A fenti egyenletekből

$$(10)\qquad \left.\begin{aligned} A&=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3 i^{\alpha}}{2}\eta_1, \\ -\eta_1^{-1}&=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3 i^{\alpha}}{2} \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletben szereplő tört kifejezés és $-\eta^{-1}$ egymáshoz konjugált komplex számok.

A 2b segédtétel szerint α páratlan, tehát (10)-ből

$$A=-\eta_1^2 \quad \text{és így} \quad g(x)=x-\eta_1^2.$$

A

$$P(x)-\zeta=(x+1)x(x-1)-e^{\frac{2\pi i}{m}}=(x-\eta_1^2)(x^2+Bx+C).$$

A műveletek elvégzése után együttható összehasonlítással kapjuk a

$$(11)\qquad \left.\begin{aligned} -\eta_1^2+B&=0\\ -B\eta_1+C&=-1\\ -C\eta_1^2\quad &=-e^{\frac{2\pi i}{m}} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert, amiből a B és a C eliminálásával a

$$(12)\qquad -\eta_1^6+\eta_1^2+e^{\frac{2\pi i}{m}}=0$$

egyenletet. Ebből azt olvashatjuk le, hogy a $-\eta_1^6, \eta_1^2, e^{\frac{2\pi i}{m}}$ egységnyi hosszúságú vektorok egymással $\pm\frac{2\pi}{3}$ szöget zárnak be,

$$(13)\qquad \eta_1^2=e^{\frac{2\pi i}{m}}e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}.$$

Ennek köbreemelésével nyerjük:

$$(14)\qquad -\eta_1^6=-e^{\frac{6\pi i}{m}}$$

(13) és (14) eredményeit a (12) egyenletbe helyettesítve:

$$-e^{\frac{6\pi i}{m}}+e^{\frac{2\pi i}{m}}e^{\frac{2\pi i}{3}}+e^{\frac{2\pi i}{m}}=0;\quad e^{\frac{2\pi i}{m}}\neq 0,$$

ezért osszuk el vele az utóbbi egyenletet:

$$e^{\frac{4\pi i}{m}}=1+e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}=\begin{cases} 1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{2\pi i}{6}}, & \text{illetve}\\ 1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{10\pi i}{6}}. \end{cases}$$

Vagyis $e^{\frac{2\pi i}{m}}=\pm e^{\frac{2\pi i}{12}}$, illetve $e^{\frac{2\pi i}{m}}=\pm e^{\frac{10\pi i}{12}}$. Ezek a számok mind primitív *12-edik* egységgyökök. E miatt $m=12$.

Vegyük ezek közül egyelőre az $e^{\frac{2\pi i}{12}}$ egységgyököt és helyettesítsük azt — a $g(x)$ megszerkesztése miatt — a (13) egyenletbe. Ekkor $\eta_1^2=e^{\frac{10\pi i}{12}}$ (illetve $\eta_1^2=e^{-\frac{6\pi i}{12}}=-i$) $g(x)=x-e^{\frac{10\pi i}{12}}$ (illetve $g(x)=x+i$; ez utóbbi, mint arról egyszerű osztással meggyőződhetünk, nem osztója a $P(x)-\zeta=$ $=(x+1)\,x(x-1)-e^{\frac{2\pi i}{12}}$ polinomnak.) Azt kaptuk tehát, hogy $g(x)=x-e^{\frac{10\pi i}{12}}$. A (11) egyenletrendszerből $\eta_1^2=e^{\frac{10\pi i}{12}}$ segítésével nyerjük a B és a C koefficienseket és a $h(x)=x^2+e^{\frac{10\pi i}{12}}x+e^{\frac{16\pi i}{12}}$ polinomot.

Végül is $g(x)\cdot h(x)=\left(x-e^{\frac{10\pi i}{12}}\right)\left(x^2+e^{\frac{10\pi i}{12}}x+e^{\frac{16\pi i}{12}}\right)=x^3-x-e^{\frac{2\pi i}{12}}=$ $=P(x)-\zeta$. Minthogy a $P(x)-\zeta=x^3-x-e^{\frac{2\pi i}{12}}$ reducibilis a $\mathcal{K}_m$ fölött, azért CAPELLI tétele miatt a $\mathcal{K}_0$ fölött az $F_{12}(P(x))=P^4(x)-P^2(x)+1$ polinom is reducibilis, vagyis $F_{12}(P(x))=x^{12}-4x^{10}+6x^8-5x^6+3x^4-x^2+1$, [Ez utóbbi polinom található meg H. L. DORWART és OYSTEIN ORE említett dolgozatában.] $F_{12}(P(x))=(x^4-x^2+1)(x^8-3x^6+2x^4+1)=\operatorname{Norm} g(x)\operatorname{Norm} h(x)$.

Általánosabb megoldást kapunk, ha x helyébe $x+a$-t írunk, ahol a racionális egész szám.

GALOIS tételével a $\mathcal{K}_{12}$ fölött még más irreducibilis polinomot is találunk, ha az $\left(e^{\frac{2\pi i}{12}}:e^{\frac{10\pi i}{12}}\right)$, vagy az $\left(e^{\frac{2\pi i}{12}}:e^{\frac{14\pi i}{12}}\right)$, végül az $\left(e^{\frac{2\pi i}{12}}:e^{\frac{22\pi i}{12}}\right)$ szubsztitituciót alkalmazzuk. Így kapjuk a következő, $\mathcal{K}_{12}[x]$-ben reducibilis polinomokat

$$x^3-x-e^{\frac{10\pi i}{12}}=\left(x-e^{\frac{2\pi i}{12}}\right)\left(x^2+e^{\frac{2\pi i}{12}}x+e^{\frac{8\pi i}{12}}\right),$$

$$x^3-x-e^{\frac{14\pi i}{12}}=\left(x-e^{\frac{22\pi i}{12}}\right)\left(x^2+e^{\frac{22\pi i}{12}}x+e^{\frac{16\pi i}{12}}\right),$$

$$x^3-x-e^{\frac{22\pi i}{12}}=\left(x-e^{\frac{14\pi i}{12}}\right)\left(x^2+e^{\frac{14\pi i}{12}}x+e^{\frac{8\pi i}{12}}\right).$$

Általánosabb megoldást kapunk, ha x helyébe $x+b$-t helyettesítünk, ahol b racionális egész szám.

Az $n=2$ eset.

Ha az $(x-a_1)(x-a_2)-e^{\frac{2\pi i}{m}}$ felbomlik a $\mathcal{K}_m$ fölött, akkor két elsőfokú faktor szorzatára bomolhat fel:

(15) $$g(x)=x+A;\quad h(x)=x+B.$$

Az 1. segédtétel szerint

$$g(a_1)=\varepsilon_1\eta_1,\quad g(a_2)=\varepsilon_2\eta_2.$$

1. Ha $a_2-a_1>2$, akkor a 2a segédtétel szerint $\eta_1=\pm\eta_2$ és ez, mint sokszor láttuk, ellenmondásra vezet az interpolációs formula segítségével.

2. Legyen $a_2-a_1=2$ és $a_1=-1$, $a_2=1$, ekkor a 2b segédtétel szerint $\eta_2=i^\alpha\eta_1$, ahol az α páratlan.

$$g(a_1)=-1+A=\varepsilon_1\eta_1,$$
$$g(a_2)=1+A=\varepsilon_2\eta_2=\varepsilon_2 i^\alpha.$$

Ezen egyenletrendszerből:

$$A=\frac{\varepsilon_1+i^\alpha\varepsilon_2}{2}\eta_1,\qquad -\eta_1^{-1}=\frac{\varepsilon_1-i^\alpha\varepsilon_2}{2}.$$

Ez utóbbi konjugált komplex az előző tört-kifejezéshez, tehát

$$A = -\eta_1^2, \quad \text{és (15) szerint} \quad g(x) = x - \eta_1^2.$$

Hasonlóképpen

$$B = -\eta_3^2, \quad \text{ahol } \eta_3 \text{ egységgyök és (15) szerint} \quad \bar{h}(x) = x - \eta_3^2; \quad \text{ebből}$$

$$(x-a_1)(x-a_2) - e^{\frac{2\pi i}{m}} = x^2 - 1 - e^{\frac{2\pi i}{m}} = x^2 - (\eta_1^2 + \eta_3^2)x + \eta_1^2\eta_3^2.$$

Az együtthatók összehasonlításával:

$$\eta_1^2 + \eta_3^2 = 0,$$

$$\eta_1^2\eta_3^2 = -1 - e^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

Ezekből

$$\eta_1 = \sqrt[4]{1 + e^{\frac{2\pi i}{m}}},$$

de

$$\operatorname{arc} \eta_1 = \frac{2\pi}{8m} + s\frac{2\pi}{4} = \frac{2\pi(1+2ms)}{8m},$$

ahol

$$s = 0, \quad \text{vagy} \quad 1, \quad \text{vagy} \quad 2, \quad \text{vagy} \quad 3.$$

A $g(a_1)$ nem lehet egység. Ugyanis az 1. segédtétel miatt a hozzátartozó η szög a $\frac{2\pi}{4m}$-nek egész számú többszöröse és nem a $\frac{2\pi}{8m}$-nek páratlan számú többszöröse.

3. $a_2 - a_1 = 1$.

Legyen $a_1 = -1$, $a_2 = 0$; $P - \zeta = x^2 + x - e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Ez utóbbi polinomot gyöktényezőire bontva, az

$$\left(x + \frac{1+\sqrt{1+4e^{\frac{2\pi i}{m}}}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{1+4e^{\frac{2\pi i}{m}}}}{2}\right) \tag{16}$$

szorzatot kapjuk.

Miután az $x^2 + x - e^{\frac{2\pi i}{m}}$-et a $\mathcal{K}_m$ fölött reducibilisnek tesszük fel, legyen (16) szerint a $g(x)$ polinom az első, a $h(x)$ polinom a második gyöktényezője, az $x^2 + x - e^{\frac{2\pi i}{m}}$ polinomnak. A $g(x)$ és a $h(x)$ polinom konstans tagjai egységek a $\mathcal{K}_m$-ben.

Az 1. segédtétel miatt pl.

$$(17)\qquad \frac{1\cdot+\sqrt{1+4e^{\frac{2\pi i}{m}}}}{2}=\varepsilon\eta.$$

Állítjuk, hogy

$$\operatorname{arc}\eta=\frac{2\pi}{4m}.$$

Ugyanis $\operatorname{arc}\left(1+4e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)<\frac{2\pi}{m}$, mert ha 4 helyett egy nagy pozitív K számot írnánk, az $1+Ke^{\frac{2\pi i}{m}}$ közel párhuzamos lenne az $e^{\frac{2\pi i}{m}}$-mel. Ezt az egyszerű rajz is mutatja, tehát

$$\operatorname{arc}\sqrt{1+4e^{\frac{2\pi i}{m}}}<\frac{2\pi}{2m}.$$

Az $\operatorname{arc}\frac{1+\sqrt{1+4e^{\frac{2\pi i}{m}}}}{2}$-ről is csak azt mondhatjuk, hogy $<\frac{2\pi}{2m}$. De ekkor az 1. segédtétel szerint $\operatorname{arc}\eta=\frac{2\pi}{4m}$ lehet csupán. A (17)-ből $\varepsilon\eta=\varepsilon e^{\frac{2\pi i}{4m}}$ és így $g(x)=x+\varepsilon\eta^{\frac{2\pi i}{4m}}$.

A $h(x)$ polinom konstans tagja így írható:

$$1-\frac{1+\sqrt{1+4e^{\frac{2\pi i}{m}}}}{2}=1-\varepsilon e^{\frac{2\pi i}{4m}}.$$

A másik polinom:

$$h(x)=x+1-\varepsilon e^{\frac{2\pi i}{4m}}.$$

Az $(x-a_1)(x-a_2)-\zeta=x^2+x-e^{\frac{2\pi i}{m}}$ polinom és a $g(x)h(x)=\left(x+\varepsilon e^{\frac{2\pi i}{4m}}\right)\cdot\left(x+1-\varepsilon e^{\frac{2\pi i}{4m}}\right)$ polinom konstans tagjait összehasonlítva,

$$\varepsilon^2e^{\frac{2\pi i}{m}}-\varepsilon e^{\frac{2\pi i}{4m}}+e^{\frac{2\pi i}{m}}=0.$$

Végül az $\varepsilon^2-\varepsilon e^{-\frac{2\pi i}{4m}}+e^{\frac{2\pi i}{2m}}=0$ egyenlethez jutottunk. Ebből

$$\varepsilon=\frac{e^{-\frac{2\pi i}{4m}}\pm\sqrt{e^{-\frac{4\pi i}{4m}}-4e^{\frac{4\pi i}{4m}}}}{2}.$$

(Ez valós szám!) Ez csak úgy lehet, ha $e^{-\frac{2\pi i}{4m}}$-nek a konjugált komplexe

$$e^{\frac{2\pi i}{m}} = \pm\sqrt{e^{-\frac{4\pi i}{4m}} \cdot 4e^{\frac{4\pi i}{4m}}}$$

gyökkifejezéssel. Mindkét oldalt négyzetre emelve,

$$e^{\frac{4\pi i}{4m}} = e^{-\frac{4\pi i}{4m}} - 4e^{\frac{4\pi i}{4m}}.$$

Ez nem lehetséges, mert így a $2i \sin\frac{\pi}{m} = 4e^{\frac{4\pi i}{4m}}$ egyenlethez jutunk. (A baloldalon tiszta-képzetes szám van. A jobboldalon levő szám csak akkor lehet tiszta-képzetes szám, ha $m=2$, ekkor azonban a következő helytelen egyenlőséget kapjuk: $2i\sin\frac{\pi}{2} = 4i$.)

Az $n=1$ eset.

Ezt nem kell vizsgálni, mert az $F_m(x)$ polinom irreducibilis a $\mathcal{K}_0$ fölött, az $F_m(x+a)$ polinom is irreducibilis a $\mathcal{K}_0$ fölött, feltéve, hogy az a racionális egész szám.

Az eddigi eredményekből nyertük a

II. tételt: *Az m-edik körosztási polinom, $F_m(z)$ a $\mathcal{K}_m$ körosztási test fölött lineáris tényezőkre bomlik. Helyettesítsük egy ilyen tényezőnél $z - e^{\frac{2k\pi i}{m}}$ ($(k,m)=1$)-nél a z helyébe a $z = P(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$ polinomot, ahol az a_k ($k=1,2,\ldots,n$) racionális egészek. Ezek a polinomok majdnem mind irreducibilisek a $\mathcal{K}_m$ fölött. Kivétel: ha az $F_m(z)$ a 12. körosztási polinom valamelyik gyöktényezője és $a_2 = a_1+1, a_3 = a_1+2$ (három egymásután következő racionális egész szám).*

IRODALOM

[1] Dorwart, H. L.—Oystein Ore: Criteria for the irreducibility of polynomials. *Annals of Math.* II. s., **34**, (1933), 81—94.
[2] Seres, I.: Lösung und Verallgemeinerung eines Schur'schen Irreduzibilitätsproblems für Polynome. *Acta Math. Hung.*, **7**, (1956), 151—156.
[3] Tschebotaröw—Schwerdtfeger: *Grundzüge der Galois'schen Theorie, Groningen—Djakarta* (1950), 288.
[4] L. Kronecker's Werke: *Über komplexe Einheiten,* Berlin (1895), 109—118.

(Beérkezett: 1959. IV. 12.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

NEMLINEÁRIS SPINOR MODELL SCHWINGER-FÉLE EGYENLETEIRŐL

Írta: PÓCSIK GYÖRGY

A közlemény célja egy HEISENBERG típusú egyenlettel és szokásos kvantálással definiált modell GREEN-függvényeire funkcionál differenciálegyenleteket találni. Ezen egyenletek generátora, az egyrészecske-propagátor egyenlete — szemben a kvantumelektrodinamika és PS(PS)-elmélet elsőrendű egyenleteivel — másodrendű; ez a nemlinearitás hatását tükrözi. Megoldásával kapcsolatban jelen közleményben csak néhány megjegyzésre szorítkozunk.

I.

A kvantumtérelmélet elemeiből ismeretes, hogy a fizikai GREEN-függvények centrális jelentőségűek, ismeretükben a rendszerről nyerhető összes információ meghatározható. Ennek következtében igen lényeges olyan zárt egyenleteket találni, melyekből a fizikai GREEN-függvények meghatározhatók. Ilyen elsőrendű, csatolt (funkcionál) differenciálegyenleteket a kvantumelektrodinamikára és a mezon-fermion PS-kölcsönhatásra először J. SCHWINGER (1951) talált ([1], Ch. XVIII.). A SCHWINGER-egyenletek integrálása (lásd pl. S. F. EDWARDS és R. E. PEIERLS klasszikus munkája [2]) a GREEN-függvények ún. folytonos-integrál reprezentációjára vezet. Ezt a nemperturbációs reprezentációt használva sok esetben fontos következtetéseket vonhatunk le a propagátorokra vonatkozóan (analitikus tulajdonságok, renormálás stb.).

A szerző egy előző dolgozatában [3] mezonok és fermionok derivált csatolását is tartalmazó THIRRING-modell renormálási viszonyait vizsgálva, a funkcionál-integrál formalizmus segítségével meghatározta a derivált csatolásból származó többrészecske propagátorokat. Nyitva maradt azonban az öncsatolt spinor-tér nemperturbációs tárgyalásának kérdése. Az itt felvetett probléma kissé általánosabb: keressük az öncsatolt spinor-tér fizikai GREEN-függvényeit azzal, hogy a kvantálás a szokásos, a téregyenletben megjelenő tömeg $m \geqq 0$, és a tér természetesen négydimenziós. Egy ilyen csatolás DYSON-féle értelemben biztos renormálhatatlan ([1], Ch. XV.), kivéve a THIRRING-modell esetét (az egy térdimenzió miatt). Ennélfogva a kérdést perturbációszámítástól mentesen kell tárgyalni. Problémánk azért is érdekes, mert az összes perturbációs közelítésben renormálhatatlan direkt négyfermion kölcsönhatás a fentihez hasonló szerkezetű.

A továbbiakban első lépésként egyenleteket keresünk a fizikai GREEN-függvényekre. Be lehet látni, hogy az egyrészecske-propagátorra talált egyenletből a többrészecske-propagátorok egyenletei már könnyen származtathatók, ezért a legegyszerűbb fizikai GREEN-függvény SCHWINGER-egyenletét fogjuk csak levezetni. Meggondolásainkban a SCHWINGER által bevezetett külső forrás technikát használjuk. Itt jegyezzük meg, hogy a dolgozatban néhány egyenlet bizonyításánál feltételezzük az S-mátrix csatolási állandó szerinti sorbafejthetőségét. Mármost tudjuk, hogy ez jelenleg szigorúan nem áll. Megnyugtató és érdekes azonban az a tény, hogy az említett egyenletek, és így végeredményünk is a formálisan kifejtett S-mátrixot nem használva, csupán a kölcsönhatási- és HEISENBERG-reprezentáció létezéséből is származtatható [4].

II.

Mint említettük, a külső forrás technikát használjuk. E módszer lényege az, hogy a kölcsönhatási HAMILTON-operátorba matematikai segédmennyiségeket, az ún. $\eta(x), \overline{\eta}(x)$ külső spinor-forrásokat vezetjük be, melyekről feltesszük, hogy minden fermionváltozóval antikommutálnak. Így az S-mátrix és a GREEN-függvények is $\eta, \overline{\eta}$ funkcionáljai lesznek; a számítás utolsó lépésében az $\eta, \overline{\eta} \to 0$ határátmenetet vesszük.

A következő kölcsönhatási LAGRANGE-függvényből indulunk ki:

$$L(x) = -H(x) = g\overline{\varphi}_\alpha(x)\overline{\varphi}_\beta(x)\varphi_\beta(x)\varphi_\alpha(x) + \overline{\eta}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x) + \overline{\varphi}_\alpha(x)\eta_\alpha(x), \tag{1}$$

ahol a $\varphi(x)$ szabad-tér eleget tesz az

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\varphi(x) = 0 \qquad \begin{array}{l} g^{00} = -g^{ii} = 1 \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \\ \overline{\varphi} = \varphi^+\gamma^0 \\ \mu = 0, \ldots, 3 \end{array} \tag{2}$$

DIRAC-egyenletnek, φ a

$$\{\varphi_\sigma(x), \overline{\varphi}_\varrho(y)\} = -iS_{\sigma\varrho}(x-y) \tag{3}$$

szerint van kvantálva. Az S^c szabad-részecske GREEN-függvény, mint ismeretes, eleget tesz az

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)_{\nu\sigma} S^c_{\sigma\varrho}(x-y) = -\delta_{\nu\varrho}\delta(x-y) \tag{4}$$

egyenletnek és $\varphi_\sigma(x)$, $\overline{\varphi}_\varrho(y)$ párosításával hozható kapcsolatba

$$i\overbrace{\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}_\varrho}(y) = S^c_{\sigma\varrho}(x-y). \tag{5}$$

Szükségünk lesz a WICK-algebra alaptételének arra az általánosítására ([5], 34.2 §), mely $(n+1)$ lineáris operátor, $A, B_1, \ldots, B_n$ kronologikus szorzatának vákuum-várhatóértékére vonatkozik; a szokásos jelölésekkel:

$$\langle O|T(AB_1\ldots B_n)|O\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} \langle O|T(\overbrace{AB_1\ldots B_i}\ldots B_n)|O\rangle, \tag{6}$$

ahol a $\sum$ kiterjesztendő az összes lehetséges $\widehat{AB_i}$ párosításra. E tétel a WICK-féle tétel alapján azonnal belátható, mindkét oldalon az $A, B_1, \ldots, B_n$ összes lehetséges komplett párosításainak összege jelenik meg.

Tekintettel arra, hogy az egyrészecske-propagátort éppen az általánosított WICK-tétel alapján akarjuk átalakítani, szükséges egy lineáris (A) és egy nemlineáris $(L(x), S)$ operátor párosítását definiálni. Később be fogjuk látni, hogy

1. az A és $L = O_1 \ldots O_j$ (O_j lineáris) operátorok párosítását az

$$\widehat{AL} = \sum_{1\leq i\leq j} \overbrace{AO_1\ldots O_i}\ldots O_j \tag{7}$$

relációval célszerű definiálni; pl.

$$\begin{aligned}\overbrace{\varphi_\sigma(x)L}(z) &= g\,\overbrace{\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}_\alpha}(z)\overline{\varphi}_\beta(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z) - g\,\overbrace{\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}_\beta}(z)\cdot\\ &\overline{\varphi}_\alpha(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z) + \overbrace{\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}_\alpha}(z)\,\eta_\alpha(z),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\overbrace{\overline{\varphi}_\varrho(y)L}(z) &= g\,\overbrace{\overline{\varphi}_\varrho(y)\varphi_\beta}(z)\overline{\varphi}_\alpha(z)\overline{\varphi}_\beta(z)\varphi_\alpha(z) - g\,\overbrace{\overline{\varphi}_\varrho(y)\varphi_\alpha}(z)\cdot\\ &\overline{\varphi}_\alpha(z)\overline{\varphi}_\beta(z)\varphi_\beta(z) - \overbrace{\overline{\varphi}_\varrho(y)\varphi_\alpha}(z)\,\overline{\eta}_\alpha(z);\end{aligned} \tag{9}$$

2. ha S-re elfogadjuk a perturbációszámításos

$$S = T\exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty} L(x)dx\right) \tag{10}$$

alakot, akkor $\widehat{AS}$ természetes definíciója

$$\widehat{AS} = i\int_{-\infty}^{\infty} dz\, T(\widehat{AL}(z)\exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty} L(x)dx\right)) = i\int_{-\infty}^{\infty} dz\, T(\widehat{AL}(z)S). \tag{11}$$

Ezen előkészületek után alakítsuk át az egyrészecske-propagátorral szoros kapcsolatban álló

$$g_{\sigma\varrho}(x,y) = i\langle O|T(\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle \tag{12}$$

mennyiséget (g az összes vizsgálhatatlan vákuum-átmeneteket is tartalmazza).

(6), (5), (11), (8) alapján

$$g_{\sigma\varrho}(x,y)=i\langle O|T(\widehat{\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}_\varrho(y)}S)|O\rangle+i\langle O|T(\widehat{\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}_\varrho(y)}S)|O\rangle= \tag{13}$$

$$=S^c_{\sigma\varrho}(x-y)\langle O|S|O\rangle+i\int_{-\infty}^{\infty}dz\{gS^c_{\sigma\alpha}(x-z)\langle O|T(\overline{\varphi}_\beta(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle-$$

$$-gS^{c\,\prime}_{\sigma\beta}(x-z)\langle O|T(\overline{\varphi}_\alpha(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle+$$

$$+S^c_{\sigma\alpha}(x-z)\langle O|T(\eta_\alpha(z)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle\}.$$

Alkalmazva az $\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m\right)_{\nu\sigma}$ operátort, (4) miatt

$$\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m\right)_{\nu\sigma}g_{\sigma\varrho}(x,y)=-\delta_{\nu\varrho}\delta(x-y)\langle O|S|O\rangle- \tag{14}$$

$$-2ig\langle O|T(\overline{\varphi}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\varphi_\nu(x)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle-i\eta_\nu(x)\langle O|T(\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle.$$

(14) egyenletből már könnyű eljutni a $G_{\sigma\varrho}(x,y)=g_{\sigma\varrho}(x,y)\langle O|S|O\rangle^{-1}$ egyrészecske-propagátor SCHWINGER-egyenletéhez.

Következő feladatunk (14)-ben a nemlinearitás miatt fellépő kifejezést $g_{\nu\varrho}$ variációs deriváltjaival kifejezni. (10) és (1) alapján

$$\frac{\delta S}{\delta\eta_\alpha(z)}=iT(\overline{\varphi}_\alpha(z)S),\qquad \frac{\delta S}{\delta\overline{\eta}_\alpha(z)}=iT(\varphi_\alpha(z)S), \tag{15}$$

ahol $\frac{\delta}{\delta\eta}$ $\left(\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\right)$ jobb (bal) deriváltat jelöl. (15) perturbációszámítás nélkül is igazolható. (15)-ből

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\beta(y)}=i\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}T(\overline{\varphi}_\beta(y)S)=-iT\left(\overline{\varphi}_\beta(y)\frac{\delta S}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\right)= \tag{16}$$

$$=T(\overline{\varphi}_\beta(y)\varphi_\alpha(x)S).$$

Most már látjuk, hogy

$$\frac{\delta^2 g_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}=i\langle O|T(\overline{\varphi}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\varphi_\nu(x)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle. \tag{17}$$

(17)-et (14)-be téve, kapjuk az

$$\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m\right)_{\nu\sigma}g_{\sigma\varrho}(x,y)=-\delta_{\nu\varrho}\delta(x-y)\langle O|S|O\rangle-2g\frac{\delta^2 g_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}- \tag{18}$$

$$-i\eta_\nu(x)\langle O|T(\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle$$

egyenletet. Tegyünk ebbe $g_{\sigma\varrho}$ helyett $G_{\sigma\varrho}\langle O|S|O\rangle$-t, ahol a G fizikai GREEN-függvény az összes sugárzási korrekciót tartalmazza, de nem tartalmazza a nemösszefüggő FEYNMAN-diagrammokat. Ezáltal (18) a komplett GREEN-függvényt tartalmazó formába írható. Mivel

$$\frac{\delta g_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\eta_\alpha(x)}=\frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\eta_\alpha(x)}\langle O|S|O\rangle+G_{\nu\varrho}(x,y)\frac{\delta\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)},\tag{19}$$

vetkezik, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 g_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}&=\frac{\delta^2 G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}\langle O|S|O\rangle-\frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\eta_\alpha(x)}\cdot\frac{\delta\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}+\\&+\frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\cdot\frac{\delta\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)}+G_{\nu\varrho}(x,y)\frac{\delta^2\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)},\end{aligned}\tag{20}$$

vagyis (18) az

$$\begin{aligned}\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m\right)_{\nu\sigma}G_{\sigma\varrho}(x,y)&=-\delta_{\nu\varrho}\delta(x-y)-i\eta_\nu(x)\frac{\langle O|T(\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle}{\langle O|S|O\rangle}-\\&-2g\left(\frac{\delta^2 G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}+\frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\,\frac{\delta\ln\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)}+\right.\\&\left.+\frac{\delta\ln\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\cdot\frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\eta_\alpha(x)}+\frac{G_{\nu\varrho}(x,y)}{\langle O|S|O\rangle}\,\frac{\delta^2\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}\right)\end{aligned}\tag{21}$$

ormát ölti. Egyszerűbb alakba írni (21)-et, vezessük be a

$$\begin{aligned}\langle\varphi_\alpha(x)\rangle&\equiv\frac{\langle O|T(\varphi_\alpha(x)S)|O\rangle}{\langle O|S|O\rangle}=\frac{1}{i}\,\frac{\delta\ln\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\\\langle\overline{\varphi}_\alpha(x)\rangle&\equiv\frac{\langle O|T(\overline{\varphi}_\alpha(x)S)|O\rangle}{\langle O|S|O\rangle}=\frac{1}{i}\,\frac{\delta\ln\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)}\\\langle\overline{\varphi}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\rangle&\equiv\frac{\langle O|T(\overline{\varphi}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)S)|O\rangle}{\langle O|S|O\rangle}=\\&=iSpG(x,x)=\frac{1}{\langle O|S|O\rangle}\,\frac{\delta^2\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}\end{aligned}\tag{22}$$

átlagokat. (22)-vel (21) helyett

$$\begin{aligned}&\left\{i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m+2g\left(\frac{\delta^2}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}+i\langle\varphi_\alpha(x)\rangle\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)}+i\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)}\langle\overline{\varphi}_\alpha(x)\rangle+\right.\right.\\&\left.\left.+iSpG(x,x)\right)\right\}_{\nu\sigma}G_{\sigma\varrho}(x,y)=-\delta(x-y)\delta_{\nu\varrho}-i\eta_\nu(x)\langle\overline{\varphi}_\varrho(y)\rangle\end{aligned}\tag{23}$$

írható, vagy rövidebben

$$\left\{ i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m + 2g\left\langle \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} + i\varphi(x) \right)\left(\frac{\delta}{\delta \eta(x)} + i\bar{\varphi}(x) \right) \right\rangle \right\} G(x,y) = \tag{24}$$
$$= -\delta(x-y) - i\eta(x)\cdot\langle\bar{\varphi}(y)\rangle,$$

ahol $\langle\ \rangle$ csak téroperátorokra értendő. Kitűzött feladatunkat ezzel megoldottuk. Az egyrészecske-propagátor SCHWINGER-egyenletének (24) alakja hasonlít a β-bomlásra (sztatikus határesetben) R. ARNOWITT és S. DESER által felírt egyenlethez [6].

A (23) egyenletet megoldva, az egyrészecske GREEN-függvényt a $G = G(\eta, \bar{\eta}, \langle\varphi\rangle, \langle\bar{\varphi}\rangle, g, x, y)$ alakban kapjuk meg. Fordítva, könnyű látni, hogy $Sp\,G(x,x)$ meghatározza a benne szereplő átlagokat. Pl. $\langle\varphi_\sigma(x)\rangle$-t tekintve, a (13), (14) alatti gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$\langle\varphi_\sigma(x)\rangle = \frac{i}{\langle O|S|O\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} dz \langle O|T(\widehat{\varphi_\sigma(x) L}(z)S)|O\rangle = \frac{2g}{\langle O|S|O\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, S^c_{\sigma\alpha}(x-z)\cdot$$
$$\cdot\langle O|\,T(\bar{\varphi}_\beta(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z)S)|O\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dz\, S^c_{\sigma\alpha}(x-z)\eta_\alpha(z) = \tag{25}$$
$$= \frac{2g}{\langle O|S|O\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, S^c_{\sigma\alpha}(x-z)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(z)} Spg(x,x) + \int_{-\infty}^{\infty} dz\, S^c_{\sigma\alpha}(x-z)\eta_\alpha(z),$$

és

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)_{\varrho\sigma}\langle\varphi_\sigma(x)\rangle = -\frac{2g}{\langle O|S|O\rangle}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\varrho(x)} Spg(x,x) - \eta_\varrho(x). \tag{26}$$

Innen pedig látható az állítás:

$$\left\{ i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m + 2ig\,Sp\,G(x,x)\right\}_{\varrho\sigma}\langle\varphi_\sigma(x)\rangle = -\eta_\varrho(x) - 2g\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\varrho(x)} Sp\,G(x,x). \tag{27}$$

A (27) egyenlet és annak $\langle\bar{\varphi}\rangle$-ra felírt megfelelője, szemben pl. a kvantumelektrodinamikával, felesleges az elméletben. A különbség oka egyszerűen abban rejlik, hogy a kvantumelektrodinamikában az elektromágneses tér átlagára felírt egyenletnek (ami (27) analogonja) van mondanivalója: éppen a foton GREEN-függvényére vezet. Öncsatolt spinor térnél $\eta, \bar{\eta} \to 0$-ra $\langle\varphi\rangle, \langle\bar{\varphi}\rangle \to 0$ következik be, ennek következtében (23)-ban az átlagok adottnak vehetők, mert a fizikai S'_F GREEN-függvényben úgysem fognak szerepelni: $S'_F(x,y) = G(0,0,0,0,g,x,y)$.

IRODALOM

[1] UMEZAWA, H.: *Quantum Field Theory*, North—Holland Publ. Co., Amsterdam, 1956.
[2] EDWARDS, S. F.—PEIERLS, R. E.: Field equations in functional form, Proc. Roy. Soc. (A) **24** (1954), 224.
[3] PÓCSIK, G.: Meson-fermion pv-interaction in the Thirring model, II., *Acta Phys. Hung.*, sajtó alatt.
[4] PÓCSIK, G.: Schwinger's equation for one-body propagator of a selfcoupled spinor field, *Acta Phys. Hung.*, sajtó alatt.
[5] BOGOLIUBOV, N. N.—SHIRKOV, D. V.: *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Inters. Publ., Inc., New York, 1959.
[6] ARNOWITT, R.—DESER, S.: Renormalization of derivative coupling theories, Phys. Rev., **100** (1955), 349.

(Beérkezett: 1960. IV. 20)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézete

KÉTVÁLTOZÓS EMPIRIKUS ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK ELTÉRÉSÉRŐL

Írta: VINCZE ISTVÁN

Bevezetés

1. Legyen a ξ valószínűségi változó folytonos eloszlásfüggvénye $F(x)$ és legyenek a ξ-re vonatkozó független megfigyelések eredményei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. E minta empirikus eloszlásfüggvénye

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\xi_i < x} 1,$$

vagyis $F_n(x)$ az x-nél kisebb mintaelemek relatív gyakorisága a mintában. Az elméleti és a tapasztalati eloszlásfüggvények abszolút eltérése maximumának, mint valószínűségi változónak eloszlását KOLMOGOROV 1933-ban publikált nevezetes eredménye világítja meg, mely szerint

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\sqrt{n} \sup_{(x)} |F_n(x) - F(x)| < y) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2y^2}, \; y > 0.$$

A határeloszlás tehát nem függ az $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvény speciális alakjától. KOLMOGOROV e tétele rendkívül sokirányú vizsgálatot indított meg, amely vizsgálatok igen nagy jelentőséggel bírnak a sztochasztikus folyamatok elméletében és a matematikai statisztikában mind elméleti kérdések, mind gyakorlati alkalmazások szempontjából. SZMIRNOV meghatározta a maximális — egyoldali — eltérés határeloszlását, melyre a

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\sqrt{n} \sup_{(x)} (F_n(x) - F(x)) < y) = 1 - e^{-2y^2}, \; y > 0$$

adódott.

Újabban véges n-re is kiszámították a maximális eltérés és az abszolút eltérés pontos eloszlását (BLACKMAN [1]), ami szintén független $F(x)$ alakjától, továbbá ismeretes (SCHMID [9]) a KOLMOGOROV-féle eloszlás megfelelője olyan eloszlásfüggvényre, amelynek véges sok szakadási helye van. Ez esetben a határeloszlás már függ az $F(x)$ eloszlásfüggvénytől, vagyis nem eloszlásmentes.

2. Mindezek a vizsgálatok és az eredmények számos további általánosítása egyetlen változó elméleti és empirikus eloszlásának eltérésére vonatkoznak, de a kétváltozós eset megfelelő problémái alig szerepelnek az irodalomban. Így nem ismeretes a

$$\Delta_N^+ = \sup_{(x,y)}(F_N(x, y) - F(x, y))$$

és

$$\Delta_N = \sup_{(x,y)} |F_N(x, y) - F(x, y)|$$

maximális egyoldali, ill. abszolút eltérésének eloszlása vagy határeloszlása sem, ahol itt most $F(x, y) = \mathbf{P}(\xi < x, \eta < y)$ a (ξ, η) valószínűségi változó-pár elméleti eloszlásfüggvénye, míg $F_N(x, y)$ a (ξ, η)-ra vonatkozó N elemű minta, (ξ_i, η_i) $i = 1, 2, \ldots N$ empirikus eloszlásfüggvénye:

$$F_N(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\xi_i < x \\ \eta_i < y}} 1,$$

vagyis a $\xi < x$, $\eta < y$ síknegyedbe eső mintaelemek relatív gyakorisága. Ha ξ és η nem függetlenek, akkor az eloszlás — eltérően az egyváltozós esettől — függeni fog $F(x, y)$ alakjától. Ezen eltérésekre vonatkozólag KIEFER és WOLFOWITZ [5] a következő eredményt érték el:

Léteznek olyan c_0 és c_1 állandók, hogy minden N-re és $F(x, y)$-ra a a következő relációk állanak:

$$G_N^+(r) = \mathbf{P}(\sqrt{N}\Delta_N^+ < r) > 1 - c_0 e^{-c_1 r^2}$$

és

$$G_N(r) = \mathbf{P}(\sqrt{N}\Delta_N < r) > 1 - c_0 e^{-c_1 r^2}.$$

Ennek az eredménynek érdekességeként, szerzők éppen azt emelik ki, hogy az eloszlásfüggvényeket olyan $r \to \infty$-el 1-hez tartó korlát fölé szorítják, amely N-től és $F(x, y)$-tól független, holott a $\lim\limits_{N\to\infty} G_N^+(r)$ és $\lim\limits_{N\to\infty} G_N(r)$ függvények, melyek létezését szerzők ugyancsak bebizonyítják, már függeni fognak $F(x, y)$ alakjától. Szerzők tételünket (ξ, η) pár helyett tetszőleges $(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})$ vektorváltozóra bizonyítják.

3. Hasonló a helyzet a kétmintás esetre vonatkozó vizsgálatokkal.

Ha a ξ és ξ' változók folytonos eloszlásfüggvényei $F(x)$, ill. $G(x)$ és a ξ-re vonatkozó $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ minta empirikus eloszlásfüggvénye $F_n(x)$, a ξ'-re vonatkozó $(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_m')$ eloszlásfüggvénye $G_m(x)$, akkor az $F(x) \equiv G(x)$ esetben a

$$D_{n,m}^+ = \max_{(x)} (F_n(x) - G_m(x))$$

és a

$$D_{n,m} = \max_{(x)} |F_n(x) - G_m(x)|$$

változókra — $\sqrt{\frac{mn}{m+n}}$ normálással és $\frac{m}{n}\to c>0$ feltételezéssel — SZMIRNOV tételei szerint az 1. pontban szereplő (2), ill. (1) határeloszlások adódnak.

A $D_{n,m}^{+}$ és $D_{n,m}$ valószínűségi változók pontos eloszlása csak $m=n$ (GNEDENKO—KOROLJUK [2]) és $m=kn$ (BLACKMAN [1]) esetben ismeretesek. Más esetben az eloszlás igen bonyolult és legfeljebb módszer ismeretes a meghatározásukra (OZOLSZ [7]), vagy speciális pozíciókban való közelítő meghatározásukra (HODGES [3]). Aszimptotikus formulát KOROLJUK [6] adott.

Ezek az eloszlások annak eldöntése szempontjából jelentősek, hogy két minta azonos eloszlásból származik-e. Arra az esetre, ha n és m keveset különböznek egymástól (pontosabban $m>n$ és $m-n=O(\sqrt{m+n})$) szerző REIMANN JÓZSEFfel írt cikkében [8] a következő statisztikák vizsgálatát javasolja:

$$B_{n,m}^{+}=\max_{(x)}\left(nF_n(x)-mG_m(x)\right),$$

$$B_{n,m}=\max_{(x)}\left|nF_n(x)-mG_m(x)+\frac{m-n}{2}\right|-\frac{m-n}{2},$$

amely változók pontos eloszlására eléggé egyszerű formulák adódnak. (A $B_{n,m}^{+}$ statisztika az alábbi, kétváltozós esetre vonatkozó tételünkben fog szerepet játszani.)

4. Tekintsük most a folytonos $F(x,y)$, ill. $G(x,y)$ eloszlásfüggvényekkel bíró (ξ,η), ill. (ξ',η') valószínűségi változópárokat. Legyenek a (ξ,η)-ra, ill. (ξ',η')-re vonatkozó független mérési eredmények (ξ_i,η_i), ill. (ξ_i',η_i'), mindkét esetben $i=1,2,\dots N$. Jelöljék a megfelelő empirikus eloszlásfüggvényeket $F_N(x,y)$ és $G_N(x,y)$. Az egyváltozós esetnek megfelelően a

$$D_{N,N}^{+}=\max_{(x,y)}\left(F_N(x,y)-G_N(x,y)\right)$$

és

$$D_{N,N}=\max_{(x,y)}|F_N(x,y)-G_N(x,y)|$$

eltérések eloszlásának ismerete bírna érdekességgel, az $F(x,y)\equiv G(x,y)$ esetben, azonban — mint a megfelelő empirikus és elméleti eloszlások maximális eltérésének esetében, azaz az egymintás esetben — itt sem ismeretesek eredmények.

Jelen dolgozatunkban csupán az egyik változóra vonatkozó maximális eltéréssel foglalkozunk, vagyis a

$$D_{N,N}^{+}(y)=\max_{(x)}\left(F_N(x,y)-G_N(x,y)\right)$$

és a

$$D_{N,N}(y)=\max_{(x)}|F_N(x,y)-G_N(x,y))$$

eltérésekkel kapcsolatos eloszlásokkal. Tekintettel a két változó azonos szerepére, eredményeink a megfelelően definiált $D_{N,N}^{+}(x)$ és $D_{N,N}(x)$ eltérésekre is vonatkoznak.

Most használt jelöléseink felhasználásával a következő tételt fogalmazzuk meg, amit az 1. §-ban bizonyítunk be.

1. TÉTEL. *Annak valószínűsége, hogy az $F(x,y)\equiv G(x,y)$ feltevés mellett az $F(\infty,y)=H_2(y)$ peremeloszlás-törvény szerint véletlen választott valamely $\eta=y$-ra nézve a $D_{N,N}^{+}(y)$ maximális eltérés a $\frac{k}{N}$ értéket ne haladja meg:*

$$P_{N,N}^{(K)}=\mathbf{M}_{\eta}\left[\mathbf{P}\left(D_{N,N}^{+}(y)<\frac{k}{N}\right)\right]= \tag{3}$$

$$=\frac{1}{(2N+1)\binom{2N}{N}}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=\overline{0,n-k}}^{N}\binom{2N-n-m}{N-n}\left[\binom{n+m}{n}-\binom{n+m}{n-k}\right],$$

ahol $\overline{0,n-k}=\max(0,n-k)$ és $k=0,1,2,\ldots N$.

A $D_{N,N}(y)$ abszolút eltérésre vonatkozó megfelelő valószínűséget $P_{N,N}^{|K|}$-val jelölve, ennek értékét a következő kifejezés adja:

$$P_{N,N}^{|K|}=\frac{1}{(2N+1)\binom{2N}{N}}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=n-k}^{n+k}\binom{2N-n-m}{N-n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j\binom{m+n}{n+jk}, \tag{4}$$

ahol a második összegezési jelnél m értéke az alsó határnál a 0 alá, a felső határnál N fölé nem mehet.

Tételünk egy kombinatorikus értelmezését a bizonyítás 5. pontjában adjuk.

Módszerünkkel az $F(x,y)\equiv G(x,y)=H_1(x)H_2(y)$ független esetben hasonló tétel adható meg a

$$\left\{D_{N,N}^{+}(x)<\frac{k}{N},\, D_{N,N}^{+}(y)<\frac{k'}{N}\right\}\qquad (k,k'=0,1,2,\ldots N)$$

együttes eseményekre, amire később kívánunk visszatérni.

A 2. §-ban bebizonyítjuk a (3), ill. (4) valószínűségekre vonatkozó következő határeloszlástételt:

2. TÉTEL. *Ha $N\to\infty$ és $\frac{k}{\sqrt{2N}}\to r$, akkor*

$$\lim_{N\to\infty}P_{N,N}^{(k)}=\int_0^1\Phi\left(\frac{r}{\sqrt{z(1-z)}}\right)dz-e^{-2r^2}\int_0^1\Phi\left(\frac{2z-1}{\sqrt{z(1-z)}}\,r\right)dz, \tag{5}$$

$$(6) \qquad \lim_{N\to\infty} P_{N,N}^{|K|} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2r^2} \int_0^1 \left[\Phi\left(\frac{1-2j(1-z)}{\sqrt{z(1-z)}} r \right) - \Phi\left(\frac{-1-2j(1-z)}{\sqrt{z(1-z)}} r \right) \right] dz,$$

ahol mindkét esetben $r>0$ és $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$

1. §. Az eloszlástétel bizonyítása

1. A bizonyításhoz néhány lemmát használunk fel.

Tekintsük az n számú $+1$-ből és m számú -1-ből álló véletlen sorozatot: $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_{n+m}$, amelynél a lehető $\binom{n+m}{n}$ számú lehetséges sorrend mindegyike egyenlően valószínű és legyen $S_i = \vartheta_1 + \cdots + \vartheta_i$ $(i=1,2,\ldots,n+m)$. Ekkor a következő reláció érvényes: ha $n<m$, akkor

$$(1.1) \qquad P_{n,m}^{(k)} = \mathbf{P}(\max_{(i)} S_i < k) = 1 - \frac{\binom{n+m}{n-k}}{\binom{n+m}{n}}, \qquad k=0,1,2,\ldots n;$$

ha $n>m$, akkor $k=0,1,2,\ldots n-m-1$-re $P_{n,m}^{(k)}=0$, míg $k=n-m$, $n-m+1,\ldots,n$-re $P_{n,m}^{(k)}$ értéke az (1. 1) formulában adott kifejezéssel egyezik.

A bizonyítás céljából tekintsük a számegyenes egész értékű pontjain történő bolyongást, melynek egy véletlen útja az $S_0=0$-ból indulva az $S_1, S_2, \ldots$ pontokon keresztül a $S_{n+m}=n-m$-ig halad. Minden sorozatnak egy út felel meg, és minden útnak egy sorozat, kölcsönösen egyértelműen. Azon utak számát határozzuk meg, amelyek a k $(k>0)$ magasságot elérik vagy meghaladják. Ha ezeknek az utaknak a k magasságot először elérő pontjuk utáni részét a k pontra tükrözzük, akkor az ugyancsak a 0-ból induló, de az $n+m$ lépésben a $2k-n+m$ pontba jutó utakhoz jutunk oly módon, hogy ez a megfeleltetés egyértelmű. Ilyen út $m+k$ lépést tartalmaz pozitív, s $n-k$ lépést negatív irányban. Ily módon a k-t elérő utak száma $\binom{n+m}{n-k}$ s a k-t el nem érő utak száma $\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n-k}$, amiből (1. 1) formulánk következik. Ha $n>m$, akkor $S_{n+m}=n-m>0$ lévén, a $k<n-m$ nem lehet S_i-re maximum.

2. Az előző pontban használt jelölésekkel a következő reláció érvényes:

$$P_{n,m}^{|k|} = \mathbf{P}(\max_{(i)} |S_i| < k) = \frac{1}{\binom{n+m}{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{n+m}{n+jk}, \tag{1.2}$$

ha $|n-m| < k < \max(n, m)$; $k < |n-m|$-re $P_{n,m}^{|k|} = 0$.

E formula speciális esete ELLIS következő formulájának (lásd pl. [4]): Történjék a bolyongás a $(0, s)$ pontok között (s egész) és induljon i-ből $(0 < i < s)$, érkezzék M lépés után j-be. Ekkor azon utak száma, amelyek a 0 és az s pontok egyikét sem érik el,

$$f(s, M, i, j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\binom{M}{\frac{1}{2}(M-i+j)+\gamma s} - \binom{M}{\frac{1}{2}(M+i+j)+\gamma s} \right].$$

Az idézett helyen adott formulából $p = q = \frac{1}{2}$ helyettesítéssel, és 2^M-el — vagyis az ott figyelembe vett összes utak számával — való szorzással kapjuk fenti kifejezésünket, ha még áttérünk használt jelöléseinkre.

Esetünkben az (s, M, i, j) mennyiségeknek a $(2k, n+m, k, k+n-m)$ számnégyes felel meg s ebből már adódik (1. 2).

3. Tekintsük a (ξ, η) változó párra vonatkozó (ξ_i, η_i) $i = 1, 2, \ldots N$ mintaelemeket, hasonlóképpen a (ξ_i', η_i') $i = 1, 2, \ldots N$ a (ξ', η') párra vonatkozóakat. Jelölje ν_y azon (ξ_i, η_i)-k számát, amelyek η_i koordinátája az y értéket nem éri el és μ_y azon (ξ_i', η_i')-k számát, amelyekre $\eta_i' < y$. Ekkor annak valószínűsége, hogy $\nu_y = n$ és $\mu_y = m$ legyen $(n, m = 0, 1, 2, \ldots N)$,

$$\mathbf{P}(\nu_y = n, \mu_y = m) = \binom{N}{n}\binom{N}{m} [H_2(y)]^{n+m} [1 - H_2(y)]^{2N-n-m}, \tag{1.3}$$

ahol az $F(\infty, y) = H_2(y)$ jelölést használtuk. Annak valószínűsége, hogy ez az esemény *valamely* — a $H_2(y)$ eloszlástörvény szerint véletlenül választott — η-ra bekövetkezzék, a teljes valószínűség tétele szerint

$$\begin{aligned} P_{n,m} &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\nu_y = n, \mu_y = m)\, dH_2(y) = \binom{N}{n}\binom{N}{m} \int_0^1 t^{n+m} (1-t)^{2N-n-m} dt = \\ &= \frac{1}{2N+1} \frac{\binom{m+n}{n}\binom{2N-n-m}{N-n}}{\binom{2N}{N}}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ez a valószínűség a következőképpen értelmezhető: Legyen egy urnában N számú piros és N számú fehér golyó; húzzunk M számú golyót oly módon, hogy a $M=0,1,2,\ldots,2N$ számú golyó húzásának mindegyike egyenlően valószínű. Ekkor (1.4) annak valószínűségét adja, hogy $M=n+m$ legyen a húzás eredménye, ahol n a húzott piros, m a fehér golyók száma. Ennek megfelelően a

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} P_{n,m}=1$$

reláció kell álljon, ami — hipergeometrikus eloszlások keverékéről lévén szó — egyszerűen adódik.

4. Most bebizonyítjuk a következő relációt:

$$\mathbf{P}\left(\max_{(x)} D_{N,N}^{+}(y)<\frac{k}{N}\,\middle|\,\nu_y=n,\ \mu_y=m\right)=P_{n,m}^{(k)}, \tag{1.5}$$

ahol $P_{n,m}^{(k)}$-t a jelen paragrafus (1.1) formulája adja. A

$$\{ND_{N,N}^{+}(y)=N\max_{(x)}(F_N(x,y)-G_N(x,y))<k\}$$

esemény azt jelenti, hogy az $\eta=y$ magasságú egyenes minden x pontjára a $(\xi<x,\eta<y)$ síknegyedbe az első mintából eső pontok száma legfeljebb $k-1$-el haladja meg az ugyanott fekvő második mintából származó pontok számát. Ehhez azonban elég ezen érintett pontok ξ_i, ill. ξ_i' koordinátáinak elhelyezkedését vizsgálni, amely $\eta_i<y$, ill. $\eta_i'<y$ feltételeknek eleget tevő változók legyenek:

$$\xi_{i_1},\xi_{i_2},\ldots,\xi_{i_\nu}, \quad \text{ill.} \quad \xi_{j_1}',\xi_{j_2}',\ldots,\xi_{j_\mu}', \tag{1.6}$$

ahol $\nu=\nu_y$ és $\mu=\mu_y$.

Ezek azonban azonos eloszlású független valószínűségi változók, s két mintának tekintve ezeket $F_\nu(x)$, ill. $G_\mu(x)$ eloszlásfüggvényekkel — az $\eta<y$ feltétel mellett — az

$$N(F_N(x,y)-G_N(x,y))=\nu F_\nu(x)-\mu G_\mu(x)$$

összefüggés áll. Azonban — adott ν és μ mellett — a

$$\{\max_{(x)}(\nu F_\nu(x)-\mu G_\mu(x))<k\}$$

esemény valószínűsége egyszerűen visszavezethető a jelen paragrafus 1. pontjában adott (1.1) formulára $(n=\nu, m=\mu)$. Ugyanis adott x-re a $\nu F_\nu(x)-$ $-\mu G_\mu(x)$ megadja, hogy mennyivel haladja meg az x-nél kisebb ξ-k száma a ξ'-k számát az (1.6) sorozatban. Független valószínűségi változókról lévén szó, ezen ξ-k és ξ'-k minden sorrendje egyenlően valószínű, s ha az egyesített sorozatot nagyság szerint rendezve I-vel jelöljük, és bevezetjük a

$$\vartheta_i=\begin{cases}+1, & \text{ha } I\text{-ben az } i\text{-edik elem valamely } \xi,\\ -1, & \text{ha } I\text{-ben az } i\text{-edik elem valamely } \xi',\end{cases}$$

akkor $\nu F_\nu(x) - \mu G_\mu(x)$, ha x a $-\infty$-től a $+\infty$-ig növekszik, éppen az $S_0, S_1, \dots S_{n+m}$ különböző értékeket veszi fel. Tehát

$$\max_{(x)} (\nu F_\nu(x) - \mu G_\mu(x)) = \max_{(i)} S_i,$$

amiből (1. 5)-ben adott állításunk következik.

5. Most rátérünk 1. tételünk bizonyítására. Nyilvánvaló, hogy

$$P\left(D_{N,N}^+(y) < \frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=n-k,0}^{N} P\left(D_{N,N}^+ < \frac{k}{N} \middle| \nu_y = n, \mu_y = m\right) P(\nu_y = n, \mu_y = m),$$

ahol az (1. 1) formulára vonatkozó megszorítások indokolják az összegezési határokat; itt az összegben szereplő első valószínűségek (1. 5)-ben, a második valószínűségek (1. 3)-ban vannak megadva. Ha most annak valószínűségét keressük, hogy valamely — $H_2(y)$ mérték szerint véletlenül választott — $\eta = y$-ra teljesüljön a $\{D_{N,N}^+(y) < k\}$ esemény, az összetett valószínűségi tétel szerint a

$$P_{N,N}^{(k)} = M_\eta \left[P\left(D_{N,N}^+(\eta) < \frac{k}{N}\right)\right]$$

valószínűségre jutunk, ami (1. 4) miatt 1. tételünk 3. formulájához vezet.

A (3) formulából leolvasható annak következő kombinatorikus értelmezése: Tekintsük az N számú $+1$-ből és N számú -1-ből álló $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_{2N})$ véletlen sorozatot, ahol minden sorrend egyenlően valószínű. Válasszunk ki véletlenszerűen λ számú ϑ-t: $\vartheta_{i_1}, \vartheta_{i_2}, \dots, \vartheta_{i_\lambda}$, $(i_1 < i_2 < \dots < i_\lambda)$ oly módon, hogy bármely számú kiválasztása egyenlően valószínű:

$$P(\lambda = l) = \frac{1}{2N+1}, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \dots 2N.$$

Ekkor a következő reláció érvényes:

$$P(\max_{0 \leq j \leq \lambda} (\vartheta_{i_1} + \vartheta_{i_2}, + \dots + \vartheta_{i_j}) < k) = P_{N,N}^{(k)}$$

A $P_{N,N}^{|k|}$ valószínűségekre vonatkozó állítás bizonyítása — a megfelelő változtatásokkal — teljesen azonos módon történik. Ugyancsak érvényes a formula itt megadott kombinatorikus értelmezésének megfelelője. Megjegyezzük, hogy tételünk kombinatorikus értelmezése egyben alternatív bizonyításnak is tekinthető.*

* Sarkadi Károly megjegyzése.

2. §. A határeloszlástétel bizonyítása

1. Vezessük be a

$$P_{N,N}^{(k)} = \frac{1}{(2N+1)\binom{2N}{N}} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0,\, n-k}^{N} \binom{2N-n-m}{N-n} \left[\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n-k}\right]$$

formulába az indexek következő transzformációját:

$$m+n=t, \quad m=\frac{t+s}{2},$$

$$m-n=s, \quad n=\frac{t-s}{2}.$$

Ekkor a következő alakhoz jutunk:

$$\begin{aligned} P_{N,N}^{(k)} &= \frac{1}{(2N+1)\binom{2N}{N}} \sum_{s=-k}^{-1} \sideset{}{^*}\sum_{t=-s}^{2N+s} \binom{2N-t}{N-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}} \left[\binom{t}{\frac{t-s}{2}} - \binom{t}{\frac{t-s}{2}-k}\right] + \\ (2.1) \qquad &+ \frac{1}{(2N+1)\binom{2N}{N}} \sum_{s=0}^{N} \sideset{}{^*}\sum_{t=s}^{2N-s} \binom{2N-t}{N-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}} \left[\binom{t}{\frac{t-s}{2}} - \binom{t}{\frac{t-s}{2}-k}\right], \end{aligned}$$

ahol a Σ^* csupán a $t=-s, -s+2, \ldots$, ill. $t=s, s+2, \ldots$ indexekre vonatkozó összegezést jelent.

2. Legyen most $k \sim r\sqrt{2N}$, $t \sim 2Nz$, $s \sim u\sqrt{2N}$. Ekkor

$$k \sim \frac{r}{\sqrt{z}}\sqrt{t}, \quad \frac{s}{2}+k \sim \left(r+\frac{u}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{t}, \quad \frac{s}{2} \sim \frac{u}{2\sqrt{1-z}}\sqrt{2N-t}$$

és így az ismert

$$\frac{\binom{2M}{M-l}}{\binom{2M}{M}} \to e^{-2v^2}, \quad \text{ha} \quad M \to \infty \quad \text{és} \quad l \sim v\sqrt{2M},$$

valamint

$$\binom{2M}{M} \sim \frac{2^{2M+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2M\pi}}$$

relációk felhasználásával a következőket írhatjuk fel:

$$\frac{\binom{2N-t}{N-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}}}{\binom{2N-t}{N-\frac{t}{2}}} \to e^{-\frac{u^2}{2(1-z)}}, \tag{2. 2}$$

$$\frac{\binom{t}{\frac{t}{2}-\frac{s}{2}}}{\binom{t}{\frac{t}{2}}} \to e^{-\frac{u^2}{2z}}, \tag{2. 3}$$

$$\frac{\binom{t}{\frac{t}{2}-\frac{s}{2}-k}}{\binom{t}{\frac{t}{2}}} \to e^{-\frac{2}{z}\left(r+\frac{u}{2}\right)^2}, \tag{2. 4}$$

$$\frac{1}{2N+1}\,\frac{\binom{2N-t}{N-\frac{t}{2}}\binom{t}{\frac{t}{2}}}{\binom{2N}{N}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z(1-z)}}\,\frac{2}{(2N)^{3/2}}. \tag{2. 5}$$

Ekkor (2. 2), (2. 3) és (2. 5)-ből

$$\frac{1}{(2N+1)\binom{2N}{N}}\binom{2N-t}{N-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}}\binom{t}{\frac{t-s}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z(1-z)}}\,e^{-\frac{u^2}{2z(1-z)}}\cdot\frac{2}{(2N)^{3/2}},$$

továbbá (2. 2), (2. 4) és (2. 5)-ből

$$\frac{1}{(2N+1)\binom{2N}{N}}\binom{2N-t}{N-\frac{t}{2}}\binom{t}{\frac{t-s}{2}-k} \sim \frac{e^{-2r^2}}{\sqrt{2\pi z(1-z)}}\,e^{-\frac{[u-2r(1-z)]^2}{2z(1-z)}}\cdot\frac{2}{(2N)^{3/2}}.$$

Figyelembe véve a $\Delta u = \frac{1}{\sqrt{2N}}$, $\Delta z = \frac{1}{N} (\Delta t = 2(!))$ relációkat, továbbá u és z-re vonatkozólag a (2. 1) összegezésből adódó határokat — aminek eredményeként a két összeget határértékben összevonhatjuk — a $P_{N,N}^{(k)}$ fenti kifejezése határértékben a következő kétszeres integrálba megy át:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_{-r}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} e^{-\frac{u^2}{2z(1-z)}} dz\,du - \tag{2.6}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2r^2} \int_0^1 \int_{-r}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} e^{-\frac{[u+2r(1-z)]^2}{2z(1-z)}} dz\,du.$$

Figyelembe véve az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-a}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv = \Phi(a)$$

összefüggést, (2. 6) integrálunk egyszerű transzformációval a 2. tételben adott (5) alakra hozható, amivel határeloszlástételünk egyoldali esetét bebizonyítottuk.

Az abszolút eltérésre vonatkozólag a (2. 2), (2. 4) és (2. 5) relációkat kell alkalmazni, de k helyett jk-t írva, minden rögzített j-re. Íly módon, ha az összegezés sorrendjét felcseréljük a j-re vonatkozó összeg általános tagja határértékben (2. 6)-nak megfelelően, és a határok figyelembevételével

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_{-r}^{+r} \frac{e^{-2j^2r^2}}{\sqrt{z(1-z)}} e^{-\frac{[u-2jr(1-z)]^2}{2z(1-z)}} dz\,du,$$

ahonnan (2. 7) figyelembevételével a 2. tétel (6) formuláját nyerjük.

IRODALOM

[1] Blackman, J.: Correction to "An extension of the Kolmogorov distribution". *Ann. of Math. Statistics* **29** (1958), 318—324.

[2] Гнеденко, Б. В.—Королюк, В. С.: О максималном расхождении двух эмпирических распределений. Доклады Академии Наук СССР **80** (1951), 525—528.

[3] Hodges, J. L.: The significance probability of the Smirnov two-sample test. *Arkiv för Matematik* **3** (1958), 469 486.

[4] Jordan K.: *Fejezetek a klasszikus valószinűségszámításból.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956. id. hely: 408. o.

[5] KIEFER, J.—WOLFOWITZ, J.: On the deviations of the empiric distribution function of vector chance variables. *Transactions of the Amer. Math. Soc.* **87** (1958), 173—186.

[6] Королюк, В. С.: Асимптотический анализ распределений максималных уклонений в схеме Бернулли. Теория вероятнотей и ее применения. **4** (1959), 369—397.

[7] Озолс, В.: О векторандах и непараметрическом критерии согласия для двух конечных выборок. *Latvijas PSR Zinatnu Akademijas Vestis* **8** (1956), 153—158.

[8] REIMANN, J.—VINCZE, I.: On the comparision of two samples with slightly different sizes. *A MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* (sajtó alatt).

[9] SCHMID, P.: On the Kolmogorov and Smirnov limit theorems for discontinuous functions. *Ann. Math. Statistics* **29** (1958), 1011—1027.

(Beérkezett: 1960. V. 27.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A SZIMPLEX MÓDSZER KVADRATIKUS PROGRAMOZÁS ESETÉRE*

Írta: PHILIP WOLFE

1. Bevezetés

Ebben a cikkben „kvadratikus programozáson" több, lineáris egyenlőtlenségek által kifejezett megszorításoknak alávetett valós változó azon értékének a meghatározását értjük, amelyek egy kvadratikus függvény értékét extremálissá teszik. Azonkívül, hogy egy lépést jelent ama bonyolult nemlineáris programozási feladatok megoldása felé, melyek közgazdasági modelleknél gyakran fellépnek, egy kvadratikus programozásnál használható számolási eljárás számos, önmagában is érdekes problémánál is alkalmazható. Ilyenek:

Regresszió. Észlelési adatoknak legkisebb négyzetek elve alapján való illesztése egy függvényhez, azon feltétel mellett, hogy bizonyos paraméterekről a priori ismeretes, hogy adott egyenlőtlenségi megszorításoknak tesznek eleget (pl. nem-negatívak).

Efficiens termelés. A nyereség maximalizálása lineáris termelési függvények és lineárisan változó határköltségek feltételezése mellett.

„Aktatáska"-probléma. Meghatározni valószínűségi változóknak egy olyan kombinációját, melynek várható értéke adott szám és szórásnégyzete minimális.

Konvex programozás. Egy általános konvex függvény minimumának meghatározása lineáris megszorítások mellett, kvadratikus approximáció segítségével.

A probléma változói alkossanak egy n-dimenziós $x=(x_1, \ldots, x_n)$ vektort (a $'$ jel transzponálást jelent; x-et oszlopvektornak tekintjük, azaz egy n-szer 1-es matrixnak). Legyen A egy m-szer n-es matrix és b egy m-szer 1-es; ekkor a feladat lineáris megszorításait

$$x \geqq 0, \quad Ax=b \tag{1}$$

alakba írhatjuk, azaz

$$x_j \geqq 0 \ (j=1, \ldots, n), \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i=1, \ldots, m).$$

* Econometrica, 27, 3 (July 1959) 382—398.

Emlékeztetünk arra, hogy lineáris egyenlőség és egyenlőtlenség-megszorítások bármely kombinációja is (1) alakban írható, ha addicionális változókat vezetünk be.

Legyen p egy 1-szer n-es matrix és C egy n-szer n-es szimmetrikus matrix. Az ún. objektív függvényt, azt a (részben) kvadratikus függvényt, melynek szélsőértékét keressük, az (1) mégszorítások mellett,

$$f(\lambda, x) = \lambda p x + \frac{1}{2} x' C x \tag{2}$$

vagy

$$f(\lambda, x) = \lambda \sum_j p_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} x_j C_{jk} x_k$$

alakban fogjuk írni, ahol az egyetlen paraméter, λ, amely nem-negatív és valós, alkalmasan megválasztható. Feladatunk mármost a következőképpen fogalmazható meg:

A $\lambda \geqq 0$-ra vonatkozó kvadratikus probléma:

(3) Minimalizálandó $\quad f(\lambda, x) = \lambda p x + \frac{1}{2} x' C x,$

az $x \geqq 0$, $Ax = b$ mellékfeltétel mellett.

Az objektív függvény C-kvadratikus részére egy lényeges megszorítást kell tennünk, hogy biztosítsuk a számolási eljárás sikerét: az f függvény legyen konvex, azaz C legyen pozitív szemidefinit. Ez a feltétel — mely a kutatás mai állásánál nyilvánvalóan lényeges minden nemlineáris programozási szkémánál — biztosítja, hogy a problémánál fellépő bármely *lokális* minimum egyben a keresett *globális* megoldás is. Algebrailag C pozitív szemidefinit volta azt jelenti, hogy

$$x' C x \geqq 0 \qquad \text{minden } x\text{-re.} \tag{4}$$

Közgazdasági problémáknál az előbbi feltétel azt jelenti, hogy minden tevékenységre nem növekvő hozadékot (nonincreasing returns to scale) tulajdonítanak, mivel az x programról az $x + \Delta x$ programra való átmenetkor a határköltség-változás

$$\frac{d}{dt} f(\lambda, x + t\Delta x) = p\Delta x + x C \Delta x + t \Delta x' C \Delta x,$$

amely t-nek nem csökkenő függvénye lesz. A továbbiakban ezt mi is feltesszük. Ennek a tulajdonságnak a kvadratikus programozásban való szerepéről részletesebb felvilágosítás a [4] dolgozatban található.

Több javaslat hangzott el az utolsó két évben kvadratikus programozási problémák numerikus megoldására; azokat, amelyek nagysebességű digitális számológépi számolásra alkalmasnak látszanak, az irodalomjegyzékben [1]—[6] alatt soroljuk fel. BARANKIN és DORFMAN [1] mutatott rá először a kvadratikus probléma lineáris megfogalmazására; jelen dolgozat alapgondolata tőlük származik. 2. fejezetünket megváltoztatott jelöléssel [1] 1. és 3. fejezetéből vettük.

Módszerünk az előbb említett módszerektől elsősorban abban különbözik, hogy a lineáris programozáshoz szabott módszernek csupán számítási skémáját alkalmazza; következőleg egy számológépnél egy lineáris programozás kódját egyszerűen lehet egy kvadratikus programozáshoz kellő kóddá alakítani; az IBM 704 SHARE-lineáris programozási kódjában e célból csupán 11 utasítást kell módosítani.

Az alábbiakban módszerünket két változatban: egy **„rövidítettben"** és egy **„hosszúban"** tárgyaljuk. A „hosszú" változat számítási menete hasonlít a „rövidéhez", azonban arra törekszik, hogy egyrészt a (3) kvadratikus problémát *valamennyi* $\lambda \geqq 0$-ra megoldja, másrészt pedig a „rövid" változat használatakor szereplő bizonyos megszorításokat is elkerüljön. Az alábbi táblázat tartalmazza a két eljárás használhatóságának feltételeit. A szimplex módszer szükséges bázisváltoztatásai számának becslése tapasztalati szám és a 6. fejezetben ismertetetthez hasonló kísérleteken alapszik.

(3) **megoldása**	**„rövid" változattal**	**„hosszú" változattal**
Feltételek	Vagy $\lambda = 0$, vagy C pozitív definit	C pozitív szemidefinit
Megoldást kapunk	rögzített λ értékre	valamennyi $\lambda \geqq 0$ értékre
Ekvivalens lineáris program terjedelme	$m+n$ egyenletig $m+3n$ változóval	$m+n$ egyenletig, $m+3n+1$ változóval
A megoldáshoz szükséges bázisváltoztatások számának becslése	$2(m+n)$	$4(m+n)$

2. Előzetes megjegyzések

Mivel a kvadratikus probléma megoldása részben minden $\lambda \geqq 0$-ra érdekel bennünket, definiáljuk $\lambda \geqq 0$-ra az

$$F(\lambda) = \operatorname{Min} \left\{ \lambda p x + \frac{1}{2} x' C x : x \geqq 0,\ A x = b \right\}$$

kifejezést. Egész csomó információt kaphatunk $F(\lambda)$-ra vonatkozóan anélkül, hogy értékét kiszámítanánk. Mindvégig feltételezzük persze, hogy léteznek

„lehetséges" x-ek, azaz olyan $x \geqq 0$ értékek, melyekre $Ax = b$. Mindazonáltal kaphatnánk $F(\lambda) = -\infty$-t valamely (s így valamennyi) $\lambda > 0$-ra.

Először is C pozitív szemidefinit voltának egyik fontos következménye az

1. LEMMA. *$x'Cx = 0$-ból következik $Cx = 0$.*

BIZONYÍTÁS: Bármely n-dimenziós y vektorra és bármely t számra $0 \leqq (y+tx)'C(y+tx) = y'Cy + 2ty'Cx$, ahonnan $y'Cx = 0$; $Cx = 0$ ebből azonnal következik.

Ebből következik a

2. LEMMA. *Bármely $\lambda \geqq 0$-ra az összes olyan „lehetséges" x-ek „megoldáshalmaza", melyekre $f(\lambda, x) = F(\lambda)$, egy lineáris sokaságnak a mellékfeltételek halmazával való közös része és px $\lambda > 0$-ra konstans ezen a halmazon.*

BIZONYÍTÁS. Legyenek x és y olyan „lehetséges" pontok, melyekre $f(\lambda, x) = f(\lambda, y) = F(\lambda)$. Legyen $w = y - x$; bármely $0 \leqq t \leqq 1$-re az $x + tw$ pont a mellékfeltételek halmazához tartozik; mivel f konvex és $f(\lambda, x+tw)$ minimális $t = 0$-ra és $t = 1$-re, $f(\lambda, x+tw) = f(\lambda, x)$ minden $0 \leqq t \leqq 1$ értékre, vagyis $\lambda p(x+tw) + \frac{1}{2}(x+tw)'C(x+tw) = \lambda px + \frac{1}{2}x'Cx$, amely $(\lambda pw + x'Cw)t + \frac{1}{2}w'Cwt^2 = 0$-ra egyszerűsödik $[0 \leqq t \leqq 1]$. Így $w'Cw = 0$, ahonnan az 1. lemma következtében

$$\left.\begin{matrix} cw = 0 \\ pw = 0. \end{matrix}\right\} \quad \text{és ebből} \tag{5}$$

Megfordítva világos, hogy ha $f(\lambda, x) = F(\lambda)$, ha w eleget tesz (5)-nek és ha $x + tw$ „lehetséges" megoldás, akkor $f(\lambda, x+tw) = F(\lambda)$, úgy, hogy adott λ-ra a teljes megoldáshalmaz a mellékfeltételek halmazának az $\{x+tw\}$ lineáris sokasággal való közös része. Végül az (5) egyenletből: $px = py$ bármely két megoldásra.

Ha mármost valamely $\lambda > 0$-ra egy olyan „lehetséges" x_λ megoldást választunk, melyre $f(\lambda, x_\lambda) = F(\lambda)$, akkor a 2. Lemma következtében px_λ értéke független x_λ megválasztásától.

1. TÉTEL. *$\lambda \geqq 0$-ra $F(\lambda)$ egy konkáv függvény; px_λ monoton nemnövekvő; és x_λ egy y megoldása a*

$$\operatorname{Min}\{y'Cy : y \geqq 0, \quad Ay = b, \quad py \leqq px_\lambda\}$$

problémának.

BIZONYÍTÁS: Mivel $f(\lambda, x)$ lineáris λ-ban, $F(\lambda)$ infimuma egy lineáris függvény-családnak és így konkáv.

px_λ trendje egy példa egy elég általános tényre. Válasszunk valamilyen λ és μ értéket. Mivel x_λ minimalizálja $f(\lambda, x)$-et,

$$\lambda p x_\lambda + \frac{1}{2} x'_\lambda C x_\lambda \leqq \lambda p x_\mu + \frac{1}{2} x'_\mu C x_\mu ;$$

és mivel x_μ minimalizálja $f(\mu, x)$-et,

$$\mu p x_\mu + \frac{1}{2} x'_\mu C x_\mu \leqq \mu p x_\lambda + \frac{1}{2} x'_\lambda C x_\lambda .$$

Összeadva az egyenlőtlenségeket és rendezve, azt kapjuk, hogy

$$(\mu - \lambda) p x_\mu \leqq (\mu - \lambda) p x_\lambda ,$$

ebből következik, hogy $\mu > \lambda$-ra $px_\mu \leqq px_\lambda$.

Végül, mivel x_λ minimalizálja $\lambda px + \frac{1}{2} x'Cx$-et, minden olyan y, melyre $y'Cy < x'_\lambda C x_\lambda$, a $py > px_\lambda$ összefüggést szolgáltatja, amely az utóbbi állítást bizonyítja.

A következő tétel x_λ-nak egy olyan jellemzését adja, amely lehetővé teszi annak kiszámítását. $f(\lambda, x)$ ezen minimalizálási feltételének csupán az elégségességére van szükségünk, mivel a szükségessége már következni fog, ha megállapítottuk, hogy a következő fejezet számítási szkémájának eredményei eleget tesznek ennek a feltételnek, ha a minimum létezik.

2. TÉTEL. *Ha* $x \geqq 0$, $Ax = b$ *és léteznek olyan* $v \geqq 0$ ($n \times 1$-es) és u ($m \times 1$-es) *matrixok, hogy*

(6) $$v'x = 0$$

és

(7) $$Cx - v + A'u + \lambda p' = 0,$$

akkor x *a*

$$\mathrm{Min} \left\{ \lambda px + \frac{1}{2} x'Cx : x \geqq 0, \quad Ax = b \right\}$$

problémának megoldása.

BIZONYÍTÁS: Legyen adva egy $y \geqq 0$, melyre $Ay = b$. Kimutatjuk, hogy $f(\lambda, y) \geqq f(\lambda, x)$. C pozitív szemidefinit voltából következik, hogy

$$(y - x)'C(y - x) \geqq 0,$$

ahonnan

$$y'Cy + x'Cx \geqq 2x'Cy,$$

vagy

$$y'Cy - x'Cx \geqq 2x'C(y - x)$$

és így

$$f(\lambda, y)-f(\lambda, x)=\lambda p(y-x)+\frac{1}{2}y'Cy-\frac{1}{2}x'Cx \geqq (\lambda p+x'C)\ (y-x).$$

Minthogy (7)-ből

$\lambda p+x'C=v'-u'A,\quad f(\lambda, y)-f(\lambda, x) \geqq v'y-v'x-u'Ay=v'y-0-u'b+u'b$

((6) és a „lehetségesség" következtében) $=v'y \geqq 0$ (mivel $v, y \geqq 0$).

A (6) és (7) feltételek — melyek speciálisan inkább szükségesek, mint elégségesek — lényegében KUHN és TUCKER „nyeregpont"-tételének feltételeivel azonosak [9]. Jelen formájában az eredmény BARANKIN és DORFMAN-nak ([1], 3. fejezet) tulajdonítható. Valóban, arra a feltételre oly módon juthatunk, hogy $f(\lambda, x)$-et egy differenciálható konvex függvénnyel helyettesítjük, a (7)-beli $Cx+\lambda p'$-t pedig gradiensével.

A kvadratikus probléma említésre méltó jellegzetessége $f(\lambda, x)$ gradiensének linearitása, amely a KUHN-TUCKER feltételek nem-lineáris jellegét a (6) $v'x=0$ relációra korlátozza, amelynek az alábbi

(8) $\qquad v_j>0$-ból következik $x_j=0 \qquad (j=1,\ldots, n)$

kombinatorikus kifejezés is lehetséges.

Hogy felderíthessük a (8) megszorításoknak a (7) lineáris relációkkal való kapcsolatát és láthassuk, hogyan lehet azokat numerikusan kezelni, szükséges röviden áttekinteni a lineáris programozásnál szereplő szimplex módszer [7] főbb jellegzetességeit:

Ott a cx lineáris formát kívánjuk minimalizálni a $Dx=e,\ x \geqq 0$ (D $p \times q$, C $1 \times q$, e $p \times 1$-es matrix) megszorítások mellett. Feltesszük, hogy a probléma *„lehetséges"*, azaz létezik olyan x, mely a megszorításoknak eleget tesz. Könnyen kimutatható, lineáris függőség alapján, hogy létezik egy olyan „lehetséges" x, amelynek legfeljebb p pozitív komponense van. Egy „lehetséges" x el nem tűnő komponenseinek megfelelő, D-ből kiválasztott p oszlopból álló összességet *bázis*nak nevezünk, magát az x-et pedig *bázismegoldás*nak. A szimplex módszernél mindig ilyen bázisokkal dolgozunk; ha adva van egy ilyen bázis, kimutatható:

1. vagy az, hogy a hozzátartozó bázismegoldás a lineáris forma minimális értékét szolgáltatja,

2. vagy az, hogy található egy olyan másik bázis, mely az előzőtől csupán egy oszlopban különbözik és az ehhez tartozó bázismegoldás a lineáris formának kisebb értéket ad,

3. vagy az, hogy egy újabb oszlopvektorral bővíthető a bázis oly módon, hogy található az ezen $p+1$ oszlopvektorhoz tartozó „lehetséges" x-eknek egy olyan sorozata, amelyekre $cx \to -\infty$. Ily módon egy bázis-sorozat

generálható, amely a problémának egy véges vagy végtelen megoldására vezet. Célszerű a probléma megszorításaiban egy „nem-degenerálódási" feltevést bevezetni: azt, hogy bármely „lehetséges" x vektornak legalább p pozitív komponense van. Ez a feltevés bármely bázis oszlopvektorainak lineáris függetlenségét eredményezi. Kimutatták [7], hogy minden megszorítás-halmaz úgy kezelhető, mintha nem-degenerálódó volna. A továbbiakban ezekre az eredményekre fogunk támaszkodni és egy pár helyen, ha szükséges, feltételezzük a nem-degenerálódást.

Visszatérve a kvadratikus problémára, azok a feltételek, hogy egy n-dimenziós x vektor $\lambda \geqq 0$-ra a kvadratikus probléma megoldását adja,

$$\begin{aligned} &Ax = b \\ &Cx - v + A'u + p'\lambda = 0 \\ &x \geqq 0, \quad v \geqq 0 \end{aligned}$$

alakban írhatók (ha $v'x = 0$-tól pillanatnyilag eltekintünk), vagy koefficiensekre szétválasztott formában

$$\begin{array}{cccc|l} x\geqq 0 & v\geqq 0 & u & \lambda & \\ \hline A & 0 & 0 & 0 & = b \\ C & -I & A' & p' & = 0 \end{array} \tag{9}$$

alakban, amely $m+n$ egyenletből áll $2n$ nemnegatív változóval és m megszorítás nélküli változóval (λ-t nem tekintjük változónak). A továbbiakban ezen egyenletrendszernek bázismegoldásaival fogunk foglalkozni. Megjegyezzük, feltettük, hogy a megszorítás nélküli u változóhoz tartozó m oszlop valamennyi bázisba be van véve (ez a technikai fogás teszi szükségtelenné u-nak a célból való algebrai eliminálását, hogy a rendszert standard alakra hozzuk); ez azt eredményezi, hogy bármely bázismegoldásban csak az n pozitív változó szerepel x és v-ben.

Tegyük fel egyelőre, hogy a 2. tétel ellenkezője igaz; ha ekkor a kvadratikus problémának van egy megoldása, akkor létezik olyan x, v, u, mely (6) és (7)-nek eleget tesz. Azonban (6)-ból az következik, hogy a $2n$ x és v-ből legalább n komponens eltűnik; és ebből következik BARANKIN és DORFMAN [1] ama fontos eredménye, hogy [9]-nek valamely bázismegoldása a kvadratikus problémának is egy megoldása.

Mivel a szimplex módszer számításmenete alkalmas bázismegoldások meghatározására, ennek megfelelően BARANKIN és DORFMAN javasolták a módszernek oly módon való alkalmazását, hogy (9)-nek egy tetszőleges bázismegoldásából kiindulva $v'x$-et zérusra redukáljuk. A [4] dolgozat ad egy olyan módszert, mely ennek eleget tesz — de az sokkal bonyolultabb és valószínűleg lassúbb is, mint a jelen algoritmus.

Másrészről MARKOVITZ javasolt egy módszert [6] az „aktatáska"-problémára (ez a kvadratikus probléma minden $\lambda \geqq 0$-ra való megoldásával ekvivalens), amely a (9)-nél enyhébb megszorításokkal kezdődik és amely, bár a (8) alatti $v'x = 0$ feltételt kihasználja, a változókat változtatni tudja mindaddig, míg (9)-et nem nyeri. Az itt ismertetett módszer kihasználja ezt a szellemes ötletet és a [6]-ban javasolt módszertől csupán abban különbözik, hogy a lineáris programozási alakhoz tartja magát.

3. A számítás menete

Az alábbiakban megadjuk $\lambda px + \frac{1}{2} x'Cx$ $x \geqq 0$, $Ax = b$ mellékfeltételek melletti minimalizálásának számítási algoritmusait. Először a „rövid" változatot adjuk meg, rögzített λ értékre, melynek konvergenciájához az szükséges, hogy vagy $\lambda = 0$, vagy C pozitív definit legyen; utána a „hosszú" változatot adjuk meg, mely a kvadratikus problémát „paraméteresen", minden $\lambda \geqq 0$-ra megoldja és amely C pozitív definit voltát nem kívánja meg, azonban két „rövid változat" típusú rekurziót alkalmaz.

„Rövid" változat

Legyenek z^1, z^2 és w n-, n-, illetve m-komponensű vektorok. Az eljárást a

$$Ax + w = b, \tag{10}$$

$$Cx - v + A'u + z^1 - z^2 = -\lambda p', \tag{11}$$

$$x, v, z^1, z^2, w \geqq 0 \tag{12}$$

összefüggés-halmazzal kezdjük, mely (9)-nek egy gyengítése.

Kezdés. Mivel $b \geqq 0$, a rendszernek egy kiindulási bázisát képezhetjük a z^1, z^2 és w együtthatóiból. Használjuk fel a szimplex módszert, hogy

$$\sum_i w_i \tag{13}$$

értékét zérusra redukáljuk, miközben v és u-t zérusnak rögzítjük. Hagyjuk el w-t és z^1 és z^2 fel nem használt komponenseit; jelöljük a megmaradó n komponenst Z-vel, azok együtthatóit pedig E-vel. Ezzel most a

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ cx - v + A'u + EZ &= -\lambda p' \\ x, v, Z &\geqq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

rendszer egy megoldását kaptuk.

Rekurzió. Ha már adva egy bázis és egy bázismegoldás, mely eleget tesz a (14), a (8) alatti $v'x=0$ és a $\sum_{k=1}^{n} Z_k > 0$ feltételeknek, hajtsunk végre egy bázisváltoztatást a

(15) $$\sum_{k=1}^{n} Z_k$$

lineáris alak alább szereplő, (16) *mellékfeltétel* melletti minimalizálására szolgáló szimplex módszer menetében.

(16) $k=1,\ldots,n$-re: ha x_k szerepel a bázisban, nem engedjük meg v_k-t; ha v_k szerepel a bázisban, nem engedjük meg x_k-t.

Befejezés. Ha a (15) alak pozitív, ismételjük meg a rekurziós lépést. A (15) kifejezés legfeljebb $\binom{3n}{n}$ iteráció után eltűnik; ez $Z=0$ értéket eredményez. A befejező bázismegoldás x része a kvadratikus programozási probléma egy megoldása λ-ra.

„Hosszú" változat

Kezdés. Ha a „rövid" változat számítását $\lambda=0$-ra végrehajtottuk, adjunk hozzá p'-t a „rövid" változat adataihoz; így a

(17) $$Ax = b$$

(18) $$Cx - v + A'u + up' + EZ = 0$$

rendszert kapjuk és adott egy kezdeti megoldásunk is: $u=0$, $Z=0$ és $v'x=0$.

Rekurzió. Ha már adva van egy bázis és egy olyan bázismegoldás, mely eleget tesz (17), (18), $v'x=0$-nak és $Z=0$, hajtsunk végre egy bázisváltoztatást (ha lehetséges) ama szimplex eljárásban, amely a

(19) $$-\mu$$

lineáris alak minimalizálására szolgál a (16) mellékfeltétel és a következő feltétel mellett:

(20) „nem engedünk meg Z_j-t a bázisban".

Befejezés. Ha nem lehet a rekurzió bázisváltoztatását végrehajtani, akkor $\mu=0$, $F(\lambda)=-\infty$ minden $\lambda>0$-ra és a „lehetséges" x-eknek egy olyan halmaza található (vö. 5. pont), melyre $f(\lambda, x)\to\infty$ minden $\lambda>0$-ra.

Ellenkező esetben a rekurzió a véges $0=\mu^0<\mu^1<\cdots<\mu^K$ sorozatot és a hozzájuk tartozó bázismegoldások x részének $x^0, x^1, \ldots, x^K$ sorozatát szolgáltatja; az eljárás legfeljebb $\binom{2n}{n}$ iteráció után az x^∞ vektorral végződik oly módon, hogy $\mu^k \leqq \lambda \leqq \mu^{k+1}$-re a kvadratikus feladat λ-ra szóló megoldása

$$x = \frac{\mu^{k+1}-\lambda}{\mu^{k+1}-\mu^k} x^k + \frac{\lambda-\mu^k}{\mu^{k+1}-\mu^k} x^{k+1}; \tag{21}$$

$\lambda \geqq \mu^K$-ra a megoldás

$$x = x^K + (\lambda - \mu^K) x^\infty. \tag{22}$$

MEGJEGYZÉS. E. M. L. BEALE a fenti „rövid" változat egy elegáns módosítását közölte, amely lehetővé teszi az eljárásnak az alkalmazását akkor is, ha a kvadratikus alak csupán pozitív szemidefinit, a pozitív definit helyett. Lényegében abból áll ez, hogy kiszámítjuk C egy „virtuális perturbációjának" hatását, ami abból áll, hogy C_{jj}-t tetszőleges kis δ-ra $C_{jj}+\delta^j$-vel $j=1,\dots,n$ helyettesítjük és így az algoritmus úgy használható, mintha pozitív definit alakkal lenne dolgunk.

4. Példa

Mind a „rövid", mind a „hosszú" változattal lefolytatott számításhoz példát adandó, meg fogjuk oldani a következő problémát:

$$\text{Min} \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\lambda(x_1-2x_3)$$

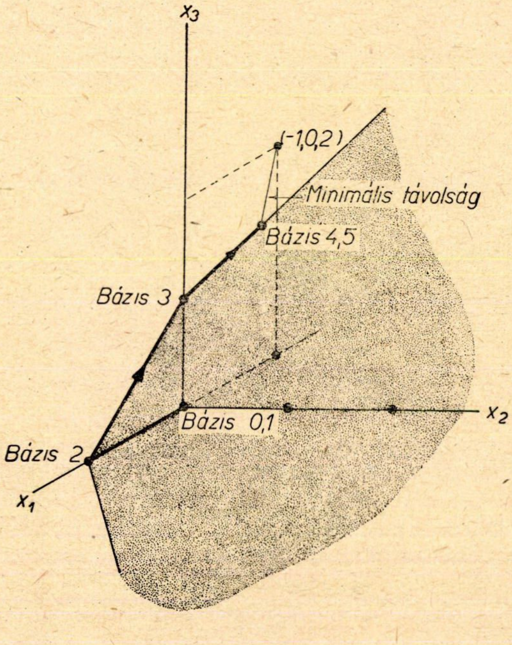
az $x_1, x_2, x_3 \geqq 0$, $x_1-x_2+x_3=1$ korlátozások mellett.

Az objektív függvény

$$f(\lambda, x) = $$
$$= \frac{1}{2}[(x_1+\lambda)^2+x_2^2+(x_3-2\lambda)^2]-\frac{5}{2}\lambda^2$$

alakban írható és így bármely λ-ra az x megoldás a megszorítások halmazának a $(-\lambda, 0, 2\lambda)$ ponthoz legközelebbi pontja lesz. Ezt illusztrálja $\lambda=1$-re az 1. ábra és tetszőleges $\lambda \geqq 0$-ra a 2. ábra. Példánk esetén

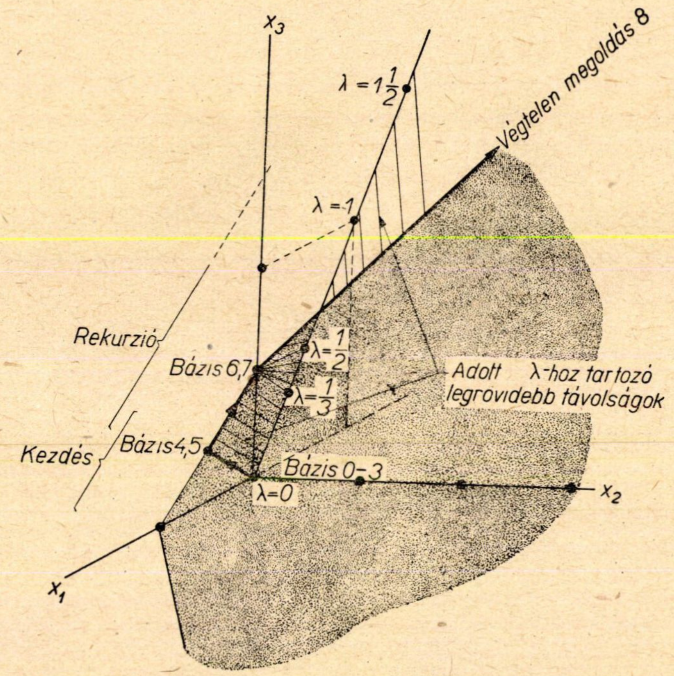
$$A = [1 \quad -1 \quad 1],$$
$$b = [1],$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$p = [1 \quad 0 \quad -2].$$



1. ábra

Mivel C pozitív definit, a „rövid” változat adja a probléma megoldását „tetszőleges λ-ra”. $\lambda = 1$-et véve a (10, 11) képletek a „rövid” változat alábbi kezdeti táblázatát adják:

x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_1^2	z_2^2	z_3^2	w		
1	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	=	1
1	0	0	−1	0	0	1	1	0	0	−1	0	0	0	=	−1
0	1	0	0	−1	0	−1	0	1	0	0	−1	0	0	=	0
0	0	1	0	0	−1	1	0	0	1	0	0	−1	0	=	2



2. *ábra*

Bár a probléma tekintélyes degenerálódást tartalmaz, ΣZ_k minimalizálása simán végrehajtható. Alább megadjuk a változók értékeit az egyes, egymás utáni lépésekre (csupán a bázisváltozók értékei vannak megadva). Először az u változót vezetjük be, mivel az valamennyi bázisban szerepel. Mivel az megszorításnak nincs alávetve, a rendszerből eliminálhattuk is volna; mi azonban benne hagytuk.

Bázis	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_1^2	z_2^2	z_3^2	w	Σz	
0									0	2	1			1		kezdeti
1							2		2		3			1		
2	1						2		2		4				6	
3			1				1		1		2				3	
4		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{2}$				$\frac{3}{2}$	
5		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$			$\frac{1}{2}$								0	

Az x által (1, 0, 0)-ból (0, 0, 1)-be, majd $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$-be megtett utat az 1. ábrába berajzoltuk.

A „hosszú" változatnál a probléma kezdeti táblázata a következő:

x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	μ	z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_1^2	z_2^2	z_3^2	w	
1	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$=1$
1	0	0	—1	0	0	1	1	1	0	0	—1	0	0	0	$=0$
0	1	0	0	—1	0	—1	0	0	1	0	0	—1	0	0	$=0$
0	0	1	0	0	—1	1	—2	0	0	1	0	0	—1	0	$=0$

Az értékek sorozata a következő:

Bázis	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	μ	z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_1^2	z_2^2	z_3^2	w	
0									0	0	0				1	„rövid" változat
1							0			0	0				1	
2	0						0				0				1	
3	0		0				0								1	
4	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$			
5	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$									
6			1		$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$								
7			1	$\frac{1}{2}$			0	$\frac{1}{2}$								
8		t	$1+t$	$\frac{1}{2}+2t$			t	$\frac{1}{2}+t$								

$x^\infty = (0, 1, 1)$

Ezeknek a megoldásoknak az x részét a 2. ábrában felrajzoltuk.

Például, a feladat megoldása $\lambda=\frac{1}{4}$-re (21)-ből adódik az 5. és 6. bázisokhoz tartozó megoldások közötti interpolációként. Az eredmény:

$$x=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}{0-\frac{1}{3}}x^2+\frac{0-\frac{1}{4}}{0-\frac{1}{4}}x^3=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x^3=\left(\frac{1}{8},0,\frac{7}{8}\right).$$

A $\lambda=1$-re szóló megoldás itt a 8. bázisból közvetlenül nyerhető (vö. (22) képlet) $t=\frac{1}{2}$ helyettesítéssel; $\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ érték adódik, amely azonos a „rövid" változat eredményével.

5. Bizonyítások

E fejezet célja a 3. fejezetben tárgyalt rekurziók végződéseivel kapcsolatos megállapítások bizonyítása.

Az eljárás elkezdése ($v=0$) és a bázisba belépő x és v megválasztásának (16) mellékfeltétele eleve biztosítják azt, hogy a rekurziók minden egyes lépésénél $v'x=0$ legyen. Meg kell még vizsgálnunk, mi történik akkor, ha valamelyik rekurziónál nem lehet tovább folytatni az előírt minimalizálási eljárást a megadott mellékfeltételek mellett. Az alábbi tétel megadja, hogy mi szükséges ezeknek a feltételeknek az elemzéséhez.

3. TÉTEL. *Legyen A, b, c ugyanaz, mint az* 1. *fejezetben; legyen a Q matrix $n\times n'$-es, a q $1\times n'$-es, és a g $n\times 1$-es. Legyen adva olyan $x\geqq 0$, $v\geqq 0$, melyekre $v'x=0$. Jelöljük x_x-szel x azon komponenseit, amelyek pozitívak és v_x-szel a megfelelő v komponenseket (megjegyezzük, hogy $v_x=0$); jelöljük v_v-vel v pozitív komponenseit és x_v-vel a megfelelő x komponenseket (megjegyezzük, hogy $x_v=0$).*

Ha a

$$qw \tag{23}$$

lineáris forma a

$$\begin{aligned} v_x&=0,\\ x_v&=0 \end{aligned} \tag{24}$$

és

$$\begin{aligned} Ax\qquad\qquad\quad &=b,\\ Cx-Iv+A'u+Qw&=g \end{aligned} \tag{25}$$

lineáris megszorítások mellett minimális, akkor létezik olyan r, melyre $rC=0$, $Ar'=0$ és $qw=rg$.

BIZONYÍTÁS. (Megjegyezzük, hogy (24) pontosan a (18) bázist korlátozó mellékfeltétel lineáris kifejezése.) A bizonyítás azon x, v, u és w mennyiségek részletes struktúrájától függ, melyek qw minimumát szolgáltatják. Már megkülönböztettük az x és v vektorokban az egymásnak megfelelő $x_x > 0$, $v_x = 0$ és az $x_v = 0$, $v_v > 0$ részeket. Maradnak még a megfelelő x_δ, v_δ részek, amelyeknek, bár nem pozitívek, a megszorítások következtében nem *kell* eltűnniük. Alább (26)-ban a (25) megszorítások matrixát particionáljuk x és v előbbi particionálásának megfelelően, előbb függőlegesen, majd vízszintesen, a természetesen kínálkozó módon (mint ahogy $-I$-t particionáljuk diagonális matrixokra).

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|l}
 & x_x > 0 & x_\delta \geqq 0 & x_v = 0 & v_x = 0 & v_\delta \geqq 0 & v_v > 0 & u & w \geqq 0 & \\
\hline
s & A_x & A_\delta & A_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = b \\
\hline
r_x & C_{xx} & C'_{x\delta} & C'_{xv} & -I_x & 0 & 0 & A'_x & & = g_x \\
r_\delta & C_{x\delta} & C_{\delta\delta} & C'_{\delta v} & 0 & -I_\delta & 0 & A'_\delta & Q & = g_\delta \\
r_v & C_{xv} & C_{\delta v} & C_{vv} & 0 & 0 & -I_v & A'_v & & = g_v \\
\hline
 & \| & \rotatebox{-90}{$\leqq$} & & & \rotatebox{-90}{$\leqq$} & \| & \| & \rotatebox{-90}{$\leqq$} & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q &
\end{array}
\tag{26}
$$

A tétel feltételei szerint a változók táblázat fölötti értékei minimalizálják azt a lineáris alakot, melynek együtthatói a táblázatban szerepelnek. Az $x_v = 0$ és $v_x = 0$-hoz tartozó oszlopok figyelmen kívül hagyhatók, mivel kikötöttük, hogy ezek a változók eltűnnek.

A táblázattól balra problémánk *duális* lineáris programozási feladata változói állanak [8]. A duális probléma lineáris alakjának együtthatói a táblázat jobb szélén állanak; a duális probléma megszorításait a matrixon függőlegesen olvashatjuk le, konstans együtthatói pedig a táblázat alján állanak. A duális változókra nincs előjelkorlátozás, mivel azok egyenlet-megszorításoknak vannak alávetve. A fenti matrix alatt megadott összefüggéseket kielégítő ezen változók egzisztenciája a lineáris programozás dualitás-tételének következménye [8], akárcsak a két objektív függvény egyenlő volta. Megjegyezzük, hogy ha egy változóról kiderül, hogy nem-zérus (mint pl. az x_x-belieknél) vagy nincs rá megszorítás (mint pl. u-belieknél) a megfelelő duális összefüggés egy egyenlőség.

Részletezve, ezek az összefüggések a következők:

$$
(27)\quad
\begin{array}{lll}
(a) & sA_x + r_x C_{xx} + r_\delta C_{x\delta} + r_v C_{xv} & = 0 \\
(b) & sA_\delta + r_x C'_{x\delta} + r_\delta C_{\delta\delta} + r_v C_{\delta v} & \leqq 0 \\
(c) & -r_\delta I_\delta & \leqq 0 \\
(d) & -r_v I_v & = 0 \\
(e) & r_x A'_x + r_\delta A'_\delta + r_v A'_v & = 0 \\
(f) & [r_x r_\delta r_v] Q & \leqq q \\
\text{és} & & \\
(g) & qw = sb + rg, &
\end{array}
$$

amely azt fejezi ki, hogy az objektív függvények egyenlőek.

A (d) és (c) összefüggésekből mindjárt adódik, hogy $r_v = 0$ és $r_\delta \geqq 0$. Az r_v-t tartalmazó tagokat elhagyva és (a)-t r'_x-szel, (b)-t pedig r'_δ-val szorozva meg jobbról, az

$$sA_x r'_x + r_x C_{xx} r'_x + r_\delta C_{x\delta} r'_x = 0,$$
$$sA_\delta r'_\delta + r_x C'_{x\delta} r'_\delta + r_\delta C_{\delta\delta} r'_\delta \leqq 0$$

összefüggésekre jutunk, melyek összeadva,

$$s[A_x r'_x + A_\delta r'_\delta] + [r_x r_\delta] \begin{pmatrix} C_{xx} & C_{x\delta} \\ C'_{x\delta} & C_{\delta\delta} \end{pmatrix} [r_x r_\delta]' \leqq 0$$

alakban írhatók. Azonban (e) következtében ebben az összefüggésben az első tag eltűnik; a második tag C matrixa egy pozitív szemidefinit matrix főalmatrixa, tehát maga is pozitív szemidefinit, így a második tag valójában zérus; az 1. Lemmából következik, hogy

$$\begin{pmatrix} C_{xx} & C_{x\delta} \\ C'_{x\delta} & C_{\delta\delta} \end{pmatrix} (r_x r_\delta)' = 0,$$

vagy

$$(28)\quad \begin{aligned} C_{xx} r'_x + C_{x\delta} r'_\delta &= 0, \\ C'_{x\delta} r'_x + C_{\delta\delta} r'_\delta &= 0. \end{aligned}$$

Az (a) egyenletből rögtön kapjuk, hogy

$$sA_x = 0,$$

amiből következik, hogy

$$sb = s[A_x x_x + A_\delta x_\delta + A_v x_v] = sA_x x_x = 0$$

és a (g) összefüggésből, (28) és (27e) figyelembevételével és az $r = [r_x r_\delta r_v]$ jelölés bevezetésével következik a tétel állítása.

Ezt a tételt felhasználhatjuk a „rövid" változat számításánál a

$$(29)\quad Q = E, \quad q = (1, \ldots, 1) \quad \text{és} \quad g = -\lambda p'$$

helyettesítések után. Ha ΣZ_k minimalizálása során, ennek értékét nem lehet tovább csökkenteni a bázismegszorítások figyelembevétele mellett, akkor a 3. tétel feltételei teljesülnek és fennáll a

$$\Sigma Z_k = qw = rg = -\lambda rp'$$

összefüggés, $rC = 0$ mellett. Azaz, vagy abban az esetben, amikor C pozitív definit (ekkor szükségszerűen $r = 0$), vagy abban az esetben, amikor $\lambda = 0$, $\Sigma Z_k = 0$; ezzel a 2. tétel feltételének eleget tettünk és a végső x a kvadratikus probléma megoldása lesz.

Z-nek zérusra való redukálása után, megtartjuk ezt az eredményt a „hosszú'' változat számára és $-\lambda$ értékét kezdjük el minimalizálni. A 3. tétel itt

$$Q = p', \quad q = -1, \quad g = 0 \tag{30}$$

helyettesítéssel alkalmazható. Ha a „hosszú'' változat rekurziója véges $-\lambda$-minimummal végződik, a 3. tétel feltételének eleget tettünk és azt kapjuk, hogy

$$-\lambda = qw = rg = 0;$$

$-\lambda$ valójában nem csökkent. Így tehát két eset lehetséges: (1) nem alkalmazható oly lépés, amely $-\lambda$-t csökkentené, és (2) $-\lambda$ $-\infty$-re csökkenthető.

(1) *eset*: Itt fel kell használnunk a rendszerünk (26) megszorításaira elérhető nemdegenerálódást, mely azt állítja, hogy bármely megoldásban $m+n$ változó pozitív. Mivel $\lambda = 0$, ezek közül m az u-hoz tartozik és a megmaradt n pedig az $x_\varkappa$ és v_ν-khez; az x_δ és v_δ-ák halmaza üres. Mivel $Ar' = 0$, $Cr' = 0$ és $(27f)$-ből $pr' \leqq -1$, azt kapjuk, hogy tetszőleges t-re

$$\begin{aligned} &A(x+tr') = b \\ &C(x+tr') - v + A'u = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

A nemdegenerálódásból következik, hogy $r \geqq 0$; mert egyébként valamely $t \geqq 0$-ra létezne olyan $x+tr'$, mely eleget tesz (25)-nek és eggyel több komponense tűnik el, mint x-nek. Így $x+tr'$ „lehetséges'' megoldás minden $t \geqq 0$-ra és

$$f(\lambda, x+tr') = \lambda px + \frac{1}{2} x'Cx + \lambda pr't.$$

Mivel $pr' \leqq -1$, $f(\lambda, x+tr') \to -\infty$, ha $t \to \infty$, tetszőleges $\lambda > 0$-ra és a keresett minimum $-\infty$.

(2) *eset*: λ értékei nincsenek korlátozva. Mivel csak véges számú bázissal rendelkezünk, az (x^i, v^i, u^i, μ^i), $i = 1, \ldots, g$ bázismegoldásoknak létezik egy véges sorozata és végül egy olyan $(x^{g+1}, v^{g+1}, u^{g+1})$, hogy $(x^g + tx^{g+1}$, $v^g + tv^{g+1}$, $u^g + tu^{g+1}$, $\mu^g + t)$ megoldás minden $t \geqq 0$-ra. A (16) bázismegszo-

rításból következnek a

$$(32)\qquad 0 = v^i x^i = v^i x^{i+1} = v^{i+1} x^i = v^{i+1} x^{i+1}, \quad \mu^i < \mu^{i+1} (i = 1, \ldots, g)$$

összefüggések. Ha mármost adva van, hogy $\mu^i \leqq \lambda \leqq \mu^{i+1}$, az

$$x = \frac{\mu^{i+1} - \lambda}{\mu^{i+1} - \mu^i} x^i + \frac{\lambda - \mu^i}{\mu^{i+1} - \mu^i} x^{i+1}$$

pont, mely x_i és x^{i+1}-nek egy konvex kombinációja, „lehetséges" megoldás; könnyen ellenőrizhető, hogy ha v-t, ill. u-t v^i, v^{i+1}, ill. u^i, u^{i+1} ugyanilyen kombinációival tesszük egyenlővé, a keletkező értékhármas a 3. tételt kielégíti és így x a kívánt minimumot szolgáltatja. Ha másrészt $\lambda \geqq \mu^g$ az $x^g + (\lambda - \mu^g) x^{g+1}$, $v^g + (\lambda - \mu^g) v^{g+1}$, $u^g + (\lambda - \mu^g) u^{g+1}$ értékhármas eleget tesz a 3. tételnek és így $x^g + (\lambda - \mu^g) x^{g+1}$ adja a minimumot.

6. Számítások

Bár a fenti eljárást csupán az $Ax = b$, $x \geqq 0$ alakú megszorításokra mutattuk be, arra a tényre hagyatkozva, hogy az összes lineáris egyenlőtlenség-megszorítások ilyen alakban írhatók, a gyakorlati számításoknál van több oly fogás, mely más típusú megszorítások mellett a probléma nagyságrendje csökkentésére szolgálhat. Az alábbiakban hatékonyságuk bizonyítása nélkül ismertetjük ezeket; bizonyításunk szorosan követi az 5. fejezetbeli bizonyítások menetét. A kitűzött probléma megszorításai legyenek a következők:

$$(33)\qquad \begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \phantom{{}+ y_2} &= b_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + y_2 &= b_2 \\ A_{31} x_1 + A_{32} x_2 - y_3 &= b_3 \\ x_1, y_2, y_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

(A (33) második és harmadik sora a $\leqq$ és $\geqq$ megszorítások szokásos megfogalmazásai.) A lineáris megszorítások új rendszere (amely a 3. fejezetbeli (9)-nek felel meg) a következő lesz:

$$(34)\qquad \begin{array}{cc|cc|c|cccc|c} x_1 \geqq 0 & x_2 & y_2 \geqq 0 & y_3 \geqq 0 & v_1 \geqq 0 & u_1 & u_2 \geqq 0 & u_3 \geqq 0 & \lambda & \\ \hline A_{11} & A_{12} & & & & & & & & = b_1 \\ A_{21} & A_{22} & I & & & & & & & = b_2 \\ A_{31} & A_{32} & & -I & & & & & & = b_3 \\ \hline & & & & -I & A'_{11} & A'_{21} & A'_{31} & p'_1 & = 0 \\ & C & & & & A'_{12} & A'_{22} & A_{32} & p'_2 & = 0 \\ \hline \end{array}$$

Az algoritmus az előzőkhöz hasonlóan folyik le, de a 3. fejezet (16) szabályának következő erősebb változata figyelembevételével:

Ha $(x_1)_k$ szerepel a bázisban, nem engedjük meg $(v_1)_k$-t és megfordítva;
(35) ha $(y_2)_k$ „ „ „ „ „ „ $(w_2)_k$-t „ „
ha $(y_3)_k$ „ „ „ „ „ „ $(u_3)_k$-t „ „ .

Látható, hogy ebben a megfogalmazásban a kitűzött probléma egyenleteinek száma a problémában szereplő nem-gyenge változók számával növekedett csak. Nyilvánvaló egy további redukciós lehetőség: mivel x_2 és u_1 változók megszorítatlanok, algebrailag kiküszöbölhetők az egyenletrendszerből azonos számú egyenlettel együtt, amelyekben együtthatóik zérustól különböznek (ez a redukció a (9) u változójával is végrehajtható lett volna). A kiküszöbölés után erre az általánosított problémára az x_1, y_2 és y_3 összes komponenseinek számával egyenlő egyenletünk marad, épp ugyanannyi, mint az x komponenseinek száma az egyszerű problémánál, vagyis n, ami bármely esetben egyenlő az eredeti probléma egyenlőtlenség-megszorításainak számával is. (Ez szokatlannak tűnnék, ha például a kitűzött problémánál nem volnának egyenlőtlenség-megszorítások; ekkor azonban a megszorítás nélküli változók kiküszöbölési műveletei — és ez *valamennyi* változóra vonatkozik — pontosan megegyeznének az x-re és u-ra való megoldás műveleteivel, a klasszikus LAGRANGE-féle multiplikátoros módszerben.)

Bár a kiküszöbölést egyszerű véghezvinni, számításainkban mégse tettük, mert nem előnyös olyan problémáknál, melyek matrixában több zérus elem szerepel, erősen csökkenteni a nem-zérus elemek számát; és éppen ez utóbbi szám az, amelyik tekintélyes mértékben meghatározza a szimplex módszer bonyolult változatainak számítási sebességét. Erre kell figyelemmel lennünk, ha ilyen jellegű eljárások relatív efficienciáját becsüljük meg; ennél az eljárásnál az adatok zömeként a C elemei (egyszeresen) és az A elemei (kétszeresen) szerepelnek. Az alább leírt terjedelmes problémánál ezeknek az adatoknak a száma számszerint 1660 volna, bár az így keletkező lineáris programozási problémának 204 egyenlete van 714 változóval.

Az IBM 704 számológép SHARE lineáris programozási kódját revideálták a célból, hogy kvadratikus programozási problémák is megoldhatók legyenek. Ez a kód egyaránt használható az előzőkben ismertetett „rövid" vagy „hosszú" változatnál, vagy pedig egy másik változatnál is, amelyben a kvadratikus alak elhagyásával kapható lineáris problémát oldjuk meg előbb, majd ezután keressük a megoldásokat minden $\lambda \geqq 0$-ra. A kódot igen sokféle probléma megoldásában alkalmazták, melyek közül a legterjedelmesebb egy stratégiailag fontos anyag szétosztása volt; e problémában 90 megszorítás mellett

192 változó szerepelt, melyek közül 78 „gyenge" változó volt. E probléma „hosszú" változattal való teljes megoldásához 359 szimplex módszerbeli bázisváltoztatás volt szükséges, melyek 230 percig tartottak.

Irodalom

Az [1]—[6] dolgozatok a nemlineáris problémák számolási eljárásaival foglalkoznak.

[1] BARANKIN, E. W.—DORFMAN, R.: On Quadratic Programming, *University of California Publications in Statistics*, **2** (1958), 285—318.

[2] BEALE, E. M. L.: On Minimizing A Convex Function Subject To Linear Inequalities, *Journal of the Royal Statistical Society* (Ser. B.) **17** (1955), 173—177.

[3] DANTZIG, G. B.: Section 1 of "Recent Advances in Linear Programming", *Management Science* **2** (January 1956), 131—144.

[4] FRANK, M.—WOLFE, P.: An Algorithm for Quadratic Programming, *Naval Research Logistics Quarterly* **3** (March—June 1956), 95—110.

[5] HILDRETH, C.: A Quadratic Programming Procedure, *Naval Research Logistics Quarterly* **4** (March 1957), 79—85.

[6] MARKOWITZ, H.: The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints, *Naval Research Logistics Quarterly* **3** (March—June 1956), 111—133.

[7] DANTZIG, G. B.—ORDEN, A.—WOLFE, P.: The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Constraints, *Pacific Journal of Mathematics* **5** (1955), 183—195.

[8] GOLDMAN, A. J.—TUCKER, A. W.: *Theory of Linear Programming*, Linear Inequalities and Related Systems (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.) (1956), 53—97.

[9] KUHN, H. W.—TUCKER, A. W.: Nonlinear Programming, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (1951), 481—492.

Fordította: Székely Gábor
A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Farkas Miklós kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1959. október 16-án rendezte meg a *Tudományos Minősítő Bizottság* FARKAS MIKLÓS *„Affin összefüggő terek direkt tárgyalása”* című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. A kandidátusi értekezés opponensei: VARGA OTTÓ, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja és SOÓS GYULA kandidátus voltak. A bíráló bizottság tagjai: elnök: KÁRTESZI FERENC, a matematikai tudományok kandidátusa, titkár: MOÓR ARTHUR, a matematikai tudományok kandidátusa, tagok: BOGNÁR MÁTYÁS, GALLAI TIBOR és MOLNÁR JÓZSEF, a matematikai tudományok kandidátusai.

Az elnök megnyitó szavai után a bíráló bizottság titkára ismertette FARKAS MIKLÓS eddigi tudományos munkásságát, amely a *Riemann* geometria és a *Gauss—Bonnet* tétel köréből merítette tárgyát, ezután pedig a jelölt ismertette dolgozatának téziseit.

Főképpen a 30-as években alakult ki a differenciálgeometriában a differenciálgeometriai terek vizsgálatának ún. direkt módszere, amely ezen terek elméletét a lokális koordinátarendszer bevezetése nélkül vizsgálja. A direkt módszerek jelentősége abban van, hogy egyrészt jobb betekintést tesznek lehetővé az egyes differenciálgeometriai terek geometriai tulajdonságaiba, másrészt a jelölt által használt módszer feleslegessé teszi a koordinátákkal való tárgyalásmódnál szükséges invariancia-vizsgálatokat.

A jelölt disszertációja az affinösszefüggő tér geometriájának felépítését adja direkt módszerrel. Egy alapul választott L topologikus térben értelmezi egy P pont vektorait azon feltétel segítségével, hogy a tekintett L tér topologikusan leképezhető egy A affin térre, vagy annak egy összefüggő nyílt részhalmazára. A vektorok segítségével értelmezhetővé válnak az L tér P pontjának p-edrendű tenzorai is, mint a P pontbeli vektoroknak a $(p—1)$-edrendű tenzorokra való homogén lineáris leképezései. Az elsőrendű tenzor a P-beli vektorokat ismét a P-beli vektorokra képezi le.

Az L tér affinösszefüggésének definíciója egy másodrendű homogén lineáris γ operátor segítségével történik, amely az L tér két P-beli vektorához az A tér egy vektorát rendeli hozzá. A γ operátor segítségével bevezethető az L-térben vektorok parallel eltolása, ennek alapján pedig az L affinösszefüggő tér geodetikus (autoparallel) görbéjének fogalma. Az infinitezimális parallelogrammák segítségével, illetve egy vektornak egy zárt görbe mentén való parallel eltolásával kapjuk a tér torzió és görbületi tenzorát. Ezután kritériumot ad az affinösszefüggő terek projektív leképezhetőségére, értve ezalatt egy L és egy L^* tér oly kölcsönös és egyértelmű leképezését, amelynél geodetikus vonal ismét geodetikus vonalba megy át.

Végül, az utolsó paragrafusban meghatározza FARKAS MIKLÓS, hogyan lehet az általa adott direkt tárgyalási mód segítségével a koordinátás tárgyalásmódot kiépíteni. Egyúttal az is megmutatkozik, hogy az általa adott tenzorfogalom a p-szer kovariáns és 1-szer kontravariáns tenzornak felel meg. Megjegyezzük, hogy a torziótenzor és a görbületi tenzor éppen ilyen típusú tenzor, tehát a tér két alaptenzorának bevezetéséhez bővebb tenzorfogalom nem is szükséges.

A disszertáció téziseinek elhangzása után az opponensek olvasták fel bírálatukat a jelölt disszertációjáról.

Mindkét opponensi bírálat rámutatott arra, hogy a dolgozat a differenciálgeometriának időszerű és fontos kérdéseit érinti. VARGA OTTÓ opponensi bírálatában rámutatott arra, hogy ezek a vizsgálatok lényegileg lokális jellegűek, mert a dolgozat nem egy általános differenciálható sokasággal foglalkozik, hanem vizsgálatai mindig egy környezetre szorítkoznak. A dolgozat módszere éppen a lokális vizsgálatok számára alkalmas, globális tárgyalásra azonban nem terjeszthető ki. A dolgozat tárgyalásmódja egy affin segédtér felhasználása révén szoros kapcsolatban áll a klasszikus tárgyalásmódban a normálkoordináták felhasználásával, és a dolgozat megjelenésénél fontos volna a dolgozatban adott tárgyalásmód összefüggését a normálkoordináták módszerével megadni.

SOÓS GYULA is hangsúlyozza opponensi bírálatában, hogy a disszertáció vizsgálatai a „nagybani" problémák vizsgálatára nem látszanak alkalmasnak, mert a kiépített affinösszefüggő struktúra egy n-dimenziós affin térrel homeomorf topológikus téren van értelmezve. Kétségtelen viszont, hogy ezáltal sok fogalom értelmezése a topológikus térben leegyszerűsödik és könnyebbé válik. Szükségesnek tartja az invariáns differenciál kiterjesztését tenzorokra is, valamint a Bianchi-identitások levezetését. A disszertáció külön érdemeként emeli ki a szemléletességre való törekvést és az elmélet kiépítésének teljes szabatosságát.

FARKAS MIKLÓS az opponensi véleményekre adott válaszában rámutatott arra, hogy a differenciálgeometriai terek geometriájának direkt módszerrel való globális tárgyalásához szükséges volna előbb a Lie-csoportok elméletének koordináta mentes alapokra helyezése. Tenzorok párhuzamos eltolásának, illetve az abszolút deriválásnak tenzorokra való kiterjesztését a dolgozat valóban nem tartalmazza, mert vizsgálataihoz erre nem volt szükség. Ez a hiányosság azonban könnyen pótolható, amit a jelölt el is végez. Ennek segítségével most már a *Bianchi* identitások is levezethetőkké válnak.

A bíráló bizottság ezután határozathozatalra vonult vissza. A bizottság a megejtett szavazás után *egyhangúan javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* FARKAS MIKLÓS*t nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.* A határozatában megállapította, hogy FARKAS MIKLÓS az affinösszefüggő terek elméletének egy új, „direkt" tárgyalását nyújtja. Dolgozatában egy n-dimenziós affin térrel homeomorf terekre szorítkozik. Munkájának érdeme, hogy kevés eszközt használ és az eddig ismerteknél egyszerűbb tárgyalást ad. Figyelemre méltó a görbületi és torzió-mennyiségek újszerű előállítása. Dolgozata gondos munka eredménye, fogalmazása világos.

Moór Arthur
a matematikai tudományok kandidátusa

Almár Iván kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1959. november 5-én tartotta ALMÁR IVÁN: „*A gamma Orionis* B2 *óriáscsillag légkörének kvantitatív elemzése*" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. A disszertáció opponensei MARX GYÖRGY, a fizikai tudományok doktora és DEZSŐ LORÁND, a fizikai tudományok kandidátusa voltak. A bíráló bizottság elnöke KÓNYA ALBERT, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja volt. Az elnök megnyitó beszéde után a bizottság titkára ismertette a jelölt eddigi tudományos munkásságát, majd ALMÁR IVÁN ismertette értekezése téziseit.

Az értekezés első részében a jelölt a kvantitatív spektrálanalízis jelentőségét fejtette ki a világ anyagi egységének megismerése szempontjából. A kozmikus anyag kémiai összetétele alapjában véve azonos, a világ anyagi egységét azonban mégsem mutatják közvetlenül, mert az egyes csillagok különböző fejlődésbeni állapotának megfelelően összetételükben kisebb eltéréseket mutatnak. A kvantitatív spektrálanalízis ezért a csillagok fejlődéséhez, a kozmogóniához nyújt tapasztalati alapot.

Ezután ismertette a kvantitatív spektrálanalízis lényegét. A csillagszínképekben észlelhető FRAUNHOFER-féle vonalak keletkezésének elméletét, a vonalkontúrokat kialakító mechanizmusok elméletét foglalta össze. Az elmélet a növekedési görbe konstruálásához vezet, amely összefüggést ad a vonalak (ekvivalens) szélessége és az őket létrehozó atomok számának megfelelő oszcillátorerősséggel vett szorzata között. A növekedési görbében a vonalprofilt kialakító mechanizmusok jellemzői mint paraméterek szerepelnek. Minthogy a növekedési görbék a csillagszínkép vonalaiból empirikus úton is meghatározhatók, a teoretikus görbe és az empirikus görbe összehasonlításából a paraméterek meghatározhatók lesznek. E paraméterek közül legfontosabbak: az elemek gyakorisága, a (termikus) DOPPLER-effektus és a mikroturbulencia átlagsebessége.

A disszertáció második része az észlelési anyag feldolgozását, az eredményeket és azok értékelését tartalmazza.

A spektroszkópiai felvételeket a jelölt a *Szovjetunió Tudományos Akadémiájának* krimi *Asztrofizikai Obszervatóriumából* kapta, amelyeket az Obszervatórium 122 cm-es reflektorával készítettek (diszperzió a $H\gamma$-nál 23,4 A/mm). Az f-értékeket a jelölt az irodalomból vette.

A megfelelően összeválogatott vonalakból meghatározta a H és He elemek gyakoriságát, az elektronsűrűséget, a mikroturbulencia sebességét (2,08 km/sec), a BOLTZMANN-féle formulában szereplő gerjesztési hőmérsékletet ($T = 18\,700°$), a SAHA-formula felhasználásával az ionizációs hőmérsékletet ($T = 19\,200°$) stb.

Eredményeit végül összehasonlítja néhány β Canis Maioris típusú változócsillag hasonló úton kapott irodalmi adataival. Arra az eredményre jut, hogy a H/He és a H/O viszony a β CMa csillagoknál jelentékenyen nagyobb, mint a γ Ori vagy a hozzá hasonló, tehát a HR diagrammon a β CMa közelében elhelyezkedő nem-változó B csillagokban. Ez a körülmény a β CMa csillagok anomális jellegére mutat, és amennyiben a későbbi vizsgálatokban megerősítést nyer, azok fejlődési elméletéhez fontos adatot nyújt.

Opponensi véleményében MARX GYÖRGY örömét fejezte ki, hogy a jelölt az asztrofizikának olyan részén végez tudományos munkát, amelyet KONKOLY-THEGE és HARKÁNYI óta senki sem folytatott. Ezután a vizsgálat korszerűségére mutatott rá, majd néhány észrevételt tett, s végül a disszertáció elfogadását javasolta.

DEZSŐ LORÁND opponensi véleményében aggályát fejezte ki, hogy a jelölt rendelkezésére bocsátott spektrumfelvételek diszperziója elegendő-e az analízis elvégzéséhez, irodalmi adatokra hivatkozva legalább 10 Å/mm diszperziót tartana szükségesnek. (DETRE LÁSZLÓ levelezőtag, aspiráns vezető előzetes felszólalásában közölte, hogy tudomása szerint Európában több helyen végeznek ilyen kis diszperzióval is eredményes munkát, s ezért nem ért egyet DEZSŐ LORÁND megjegyzésével.)

DEZSŐ LORÁND véleményének további részében a jelölt kutatási készségére mutatott rá és a disszertáció elfogadását javasolta.

ALMÁR IVÁN válaszában köszönetet mondott az opponenseknek disszertációja megítéléséért, és utána MARX GYÖRGY megjegyzéseire, valamint kérdéseire válaszolt. Többek között kifejtette, hogy a kozmikus sugárzás primér részei lényegében ugyanolyan elemgyakoriságot mutatnak, mint a csillaglégkörök, a kvantitatív spektrálanalízis fejlődésében azonban a kozmikus sugárzás nem játszott lényeges szerepet, s emiatt maradt ki a bevezetésben a kozmikus anyag különböző analíziseinek összefoglalásából. Utána ALLER és BURBIDGE cikkei nyomán részletezte azokat az interpretációkat, amelyekből a fiatal B2 csillagok nagyobb nehéz-elem tartalma magyarázható.

DEZSŐ LORÁNDnak adott válaszában kifejtette, hogy nagy diszperzióra akkor van szükség, ha a turbulens sebesség nagy és ennek meghatározása az elsődleges cél. A γ Ori turbulens sebessége azonban igen csekély és ezért végezhető eredményes munka kisebb diszperzió esetén is. Az opponens további megjegyzéseire a jelölt közölte, hogy a γ Ori helyét a HR-diagrammon nemcsak KOPILOV-klasszifikáció alapján határozta meg, hanem MKK rendszerbeli adatokkal is, és mindkét esetben a β CMa-ág közelében helyezkedik el.

Miután az opponensek a jelölt válaszát kielégítőnek találták a bizottság határozathozatalra vonult vissza. Az ülés újramegnyitása után az elnök felolvasta a határozat szövegét, amely szerint a bíráló bizottság megállapította, hogy ALMÁR IVÁN disszertációja az asztrofizika egyik legfontosabb és igen időszerű kérdéséhez kapcsolódik. *Egyhangúan javasolta a* TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁGNAK, *hogy* ALMÁR IVÁN*t nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.*

Csada Imre
a fizikai tudományok kandidátusa

Kósa András kandidátusi értekezésének vitája

1959. október 30-án rendezte meg a *Tudományos Minősítő Bizottság* KÓSA ANDRÁS „*A variációszámítás magasabbrendű diszkontinuus problémáira vonatkozó szükséges feltételek*” című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját. A bíráló bizottság elnöke VARGA OTTÓ, akadémiai levelező tag, az értekezés két opponense pedig TANDORI KÁROLY, a matematikai tudományok doktora, ill. RAPCSÁK ANDRÁS, a matematikai tudományok kandidátusa volt.

Az elnök megnyitója és a jelölt eddigi munkásságának ismertetése után CSÁSZÁR ÁKOS aspiránsvezető megemlítette a disszertáció megírásának körülményeit, kiemelve a szerző rátermettsége mellett azt a komoly segítséget, melyet témaválasztás szempontjából KÓSÁnak a Szovjetunióban tett tanulmányútja jelentett. Ezután a jelölt előadta értekezésének téziseit.

A disszertáció a klasszikus *Euler—Lagrange*-féle variáció-probléma ún. magasabbrendű változatára vonatkozik: egy „megengedett” függvényosztályból meghatározandók azok az $y(x)$ függvények, amelyekre egy adott, kétszer folytonosan differenciálható f integrandusszal képezett

$$I[y]=\int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})dx$$

operáció szélsőértéket ér el — feltéve, hogy a probléma egyáltalán megoldható. A tárgyalás nehézségének foka, ill. maga a megoldhatóság szorosan összefügg az említett függvényosztály választásával; a legklasszikusabb premisszák (tekintettel az integrandusz alkatára, valamint a szükséges feltételként adódó *Euler—Poisson*-féle differenciálegyenletre) $y(x)$ $2n$-szeri, ill. n-szeri *folytonos deriválhatósága*. Míg az $n=1$ esetben sok és beható vizsgálat tárgya volt az ún. *diszkontinuus probléma* is (melynél (a, b)-ben szakaszonként sima, tehát véges számú „törésponttal” rendelkező függvények jönnek tekintetbe), az általános eset idevágó irodalma nem nagy és oly kikötéssel él, hogy $y(x)$-nek csak az *utolsó*, n-edik deriváltjában léphet fel szakadás.

KÓSA mármost a legegyszerűbb diszkontinuus problémának egy erősebb kiterjesztésével foglalkozik: a megengedett függvényekről folytonosságon és a határfeltételeken kívül csupán annyit tételez fel, hogy *minden* deriváltjuk, az n-edikig bezárólag, (a, b)-ben szakaszonként folytonos és a kivételes pontokban valamennyinek létezik a jobb- és baloldali határértéke. A megengedett függvényosztály e bővítése természetes és indokolt, mert (mint a szerző mindjárt a bevezetésben megmutatja) sok egyszerű függvényoperáció csak a szóban forgó típusú $y(x)$ függvények körében vesz fel szélsőértéket. A kapott szükséges feltételek — határfeltételekkel összekapcsolt differenciálegyenlet, ill. ilyenekből álló rendszer, valamint alkalmas egyenlőtlenségek — részint a relatív gyenge, részint a relatív erős minimum esetére vonatkoznak és az $n=1$ esetben jól ismert *Euler—Lagrange*-egyenlet, *Legendre*- és *Weierstrass*-féle előjel-feltétel, továbbá az ún. *Weierstrass—Erdmann*-féle töréspont-feltételek pontos megfelelői, ill. a mondott jellegű feltételek segítségével kifejezhetők. Az utolsó fejezetben az eredmények lényegileg változatlan formában átvihetőknek bizonyulnak több (skalár) alapfüggvénytől, ill. egy vektorfüggvénytől függő operációkra is. — Így a szerző végső konklúziójaként kimondhatja: az eddig az $n = 1$ esetre ismert szükséges kritériumok tulajdonképpen nem e speciális esetnek, hanem általában a dolgozatban vizsgált típusú diszkontinuus problémáknak jellemző feltételei.

A felolvasott két opponensi vélemény egyaránt megállapította, hogy a disszertáció fontos témakörből vette tárgyát, lényeges eredményeket tartalmaz és mind a problémafelvetés indokolt voltát, mind a nyert feltételek alkalmazhatóságát számos jól választott példával igazolja; az értekezés megírása is gondos, stílusa világos, csupán néhány apró pontatlanság és az irodalomjegyzék szűkös volta kifogásolható RAPCSÁK ANDRÁS bírálata rámutatott még a variációszámítás területén néhány évtizeddel ezelőtt elért magyar eredményekre (HAAR, GERGELY, SZŰCS, SÓLYI) s részben ezekhez kapcsolódva, további problémákat vetett fel.

Mindkét opponens a dolgozatnak kandidátusi disszertációként való elfogadását javasolta.

A jelölt rövid válaszát követően — melyben köszönetet mondott a bírálatokért és utalt a továbbfejlesztés irányában legújabban elért részeredményeire — a bíráló bizottság tagjai közül ACZÉL JÁNOS szólt hozzá az elhangzottakhoz. Az eredmények érdekességének illusztrálására kiemelte azt a körülményt, hogy a szakadásos függvények tekintetbe vétele az extremálisokra nézve a töréspontokon kívüli feltételeket is von maga után; bíráló megjegyzéseket tett az egyik tétel bizonyításával és egy-egy félreérthető kifejezésmóddal kapcsolatban, melyek azonban — hangsúlyozta — a dolgozat értékét nem érintik.

Miután a jelenlevők KÓSÁnak az utolsó észrevételekhez fűzött magyarázatát kielégítőnek találták, a bíráló bizottság határozathozatalra vonult vissza. — A vita végén ismertetett határozat leszögezte: „A jelölt értekezésében a variációszámításnak egy problémáját új, a kérdés természetéhez a szokásosnál jobban igazodó módszerekkel oldja meg. Örvendetes, hogy ezen a jelentős hazai hagyományokkal is rendelkező területen a kutatás nálunk újból megindult." A dolgozat eredményei érdekesek és bizonyos tekintetben meglepők; kiemelendő, hogy a nyert feltételek az extremálisok konkrét meghatározására is alkalmasak. Mindezek alapján a bizottság *egyhangúlag javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* KÓSA ANDRÁS*t nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.*

Mikolás Miklós
a matematikai tudományok kandidátusa

KÖNYVISMERTETÉS

W. Heitler: A sugárzás kvantumelmélete

(Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959)

A *fizikai* szempontból teljesen kielégítő elméleti fizikai diszciplínáink közül a kvantumelektrodinamika az, amely az anyagi valóság törvényszerűségeinek megismerésében eddig a legmélyebbre hatolt. Ez a körülmény két tekintetben is kivételes helyzetet biztosít neki a fizikai elméletek között. Egyrészről, alapegyenletei határesetként magukban foglalják az elméleti fizika korábban kialakult nagy fejezeteit, így a klasszikus elektrodinamikát, a (relativisztikus és nemrelativisztikus) kvantummechanikát és klasszikus mechanikát. Másrészről, az ez idő szerint a fejlődés csúcsán álló kvantumelektrodinamikától jelentős ösztönzés és útmutatás várható az elmélet további előrehaladásához. Jól ismeretes a kvantumelektrodinamika (az első elmélet, mely részecskék keletkezéséről és eltűnéséről ad számot) megtermékenyítő szerepe a terebélyessé növekedett modern elméleti kutatási ágak, a leptonfizika (FERMI, 1932) és a mezonfizika (YUKAWA, 1935) születésénél, és általában, az anyag térelméletének kialakulásánál. — A kvantumelektrodinamika nagy elvi fontossága mellett igen jelentősek az elmélet széles területre kiterjedő alkalmazásai is. Az atomspektroszkópus, a radiológus, a magfizikus és az elemirész-fizika művelője kutatómunkájában egyaránt rá van utalva a kvantumelektrodinamikai ismeretekre, összefüggésekre.

Magyar nyelven most jelent meg első ízben könyv a kvantumelektrodinamikáról. A fenti megjegyzések mutatják, milyen jelentős esemény ez. Az Akadémia III. Osztályának bölcs választása Heitler könyvére esett. Ezzel a magyar olvasók könyvespolcára olyan szerző műve kerül, aki maga is döntő részt vállalt a kvantumelektrodinamika kiépítéséből, s aki ugyanakkor nagyszerű didaktikai készséggel, logikailag töretlen ívben vezeti el olvasóját az elmélet elvi alapvetésétől a matematikai problémákon keresztül a konkrét fizikai jelenségekre való alkalmazásig.

Az *I. fejezet* a klasszikus sugárzáselmélet áttekintését adja. Foglalkozik a térenergia és térimpulzus megmaradási tételével és *Lorentz*-transzformációjával, a klasszikus sajátenergia-problémával, a ponttöltés elektromágneses terével és annak visszahatásával, a fénykibocsátás, szórás és elnyelés klasszikus elméletével. Ezután a tér parciális hullámok szuperpozíciójaként való előállítását és a téregyenletek kanonikus alakját adja meg, amely azután a térkvantálás alapjául szolgál.

A kvantumelektrodinamika felépítésének bemutatása a *II. fejezetben* veszi kezdetét a tiszta sugárzási tér kvantálásával. Itt találjuk meg a formalizmusban alapvető szerepet játszó invariáns szinguráris függvények tárgyalását, a térerősségek felcserélési törvényeiből a mérhetőségre vonatkozóan adódó következmények taglalását, végül, a longitudinális és skaláris tér kvantálásának kapcsán, bemutatást nyernek a Lorentz-feltétel folyományaképpen felvetődő problémák és azok megoldása az indefinit metrika bevezetésével.

A *III. fejezet* először összefoglalja az elektron relativisztikus állapotegyenletére vonatkozó ismereteket, majd a szabad elektrontér kvantálását ismerteti, végül az elektrontér és a sugárzási tér kölcsönhatását leíró egyenletrendszer megfogalmazását adja.

A *IV. fejezetben* ezen alapvető egyenletrendszer megoldási módszerei kerülnek ismertetésre. A *Dirac*-féle, „elemi" perturbációszámítás bemutatását a szerző által kidolgozott, „általános" perturbációszámítás tárgyalása követi, amely itt lát először napvilágot. A fejezetet záró §-ban a csillapodási jelenségek elméletét találjuk meg, amely — részben — ugyancsak a szerző eredeti munkáira épül fel.

A hátralevő fejezeteket az elmélet eddigiekben kiépített apparátusának a konkrét fizikai jelenségekre való alkalmazása, valamint az elméleti eredményeknek a megfigyelésekkel való összehasonlítása foglalja el. Az *V. fejezetben* a legfontosabb sugárzási folyamatoknak a perturbációszámítás legalacsonyabb, el nem tűnő közelítésében kidolgozott elméletét találjuk meg. Így bemutatásra kerül az emisszió és abszorpció, a diszperzió, a fotoeffektus, a *Raman*- és a *Compton*-jelenség, a *Møller*-szórás, a fékezési sugárzás, a párkeltés és a szétsugárzás elmélete. Említés esik a sokszoros folyamatokról is, közöttük elsősorban a kísérletileg kimutatott kettős *Compton*-szórásról. A perturbációszámítás keretein bizonyos értelemben túlmegy a természetes vonalszélesség és a rezonancia-fluoreszcencia tárgyalása.

A *VI. fejezet* a sugárzási korrekciók elméletét mutatja be. A fejezet egyik részében az elmélet divergens, a megfigyelés számára hozzáférhetetlen következményeinek tárgyalását adja. Az elektromágneses tömeg és a vákuumból kiporalizált járulékos töltés meghatározását találjuk itt; ezek a divergens kifejezések — a renormálás alapgondolatának megfelelően — a „csupasz" elektron tömegével, ill. töltésével összeolvasztva a fizikai elektron tömegének, ill. töltésének részévé válnak. A fejezet másik részében, a sugárzási térrel való kölcsönhatás magasabb közelítésben adódó, megfigyelhető következményei közül az elektron anomális mágneses momentumával, a kötött állapotokban fellépő nívóeltolódással (*Lamb*-shift), a *Compton*-szórás sugárzási korrekcióival és a vákuum-polarizáció egyes következményeivel (foton-foton-szórás stb.) találkozunk. A fejezetet a szerzőnek az elmélet matematikai természetű nehézségeivel és a további fejlődés lehetőségeivel foglalkozó megjegyzései zárják.

A *VII. fejezet* tárgya az elmélet egy rendkívül fontos alkalmazási területe, mely egyben fontos lehetőséget nyújt a kísérleti ellenőrzésre is: *a nagyenergiájú sugárzás áthatolóképessége.* A gamma-sugarak abszorpciójának, a gyors töltött részecskék anyagban való lefékeződésének, végül pedig a kozmikus sugárzás kaszkád-záporainak diszkussziója azzal a megállapítással zárul, hogy az elmélet az összes sugárzási jelenségről 600 elektrontömeg energiáig $\sim$ 1% pontossággal képes számot adni; ezen túlmenően is megállapítható azonban, hogy *„az elmélet lényegében a legnagyobb ismert energiákig helyes és... érvényességének látható határa (mostanáig) nincsen".*

A *Függelék* hasznos kiegészítéseket tartalmaz. A magspektroszkópiában fontos szerepet játszó multipólterek, a *Coulomb*-mérték esetén érvényes felcserélési törvények, a töltések jelenlétében érvényes *Lorentz*-feltétel, az iterált csillapodási egyenlet, a részletes egyensúly elve, a *Weizsäcker—Williams*-módszer és a sajátfeszültség-probléma ismertetése található itt meg. A könyvet a fontosabb univerzális és anyagi állandók összeállítása és az irodalmi tájékozódást elősegítő részletes hivatkozási jegyzék egészíti ki.

A könyvben való eligazodást, az anyag feldolgozását jelentékenyen megkönnyíti a szerző által a bevezetés végén közölt *„útiterv”* vázlat. Ez három fő „útvonalat” tüntet fel. A szerzőtől *eleminek* nevezett *vonal* mentén a szabad, valamint a kölcsönhatásban álló terek alapegyenletein túl, megoldási módszerként a *Dirac*-féle perturbációszámítást találjuk. Ennek elsajátítása elegendő felkészültséget biztosít a sugárzási folyamatok legalacsonyabb el nem tűnő közelítésben tárgyalt elméletét tartalmazó V. fejezet túlnyomó részének, valamint a nagyenergiájú sugárzások áthatolóképességével kapcsolatos, a VII. fejezetben összefoglalt alkalmazásoknak tanulmányozásához. E vonal lényegében megfelel a *Heitler*-könyv első két kiadása szerkezetének. „A sugárzás kvantumelmélete” tudvalevően a kvantumelektrodinamika 1926-ban megkezdődött, első fejlődési szakaszának lezárultával íródott a harmincas évek derekán, s a fizikusok köztudatába mint az ezen periódus eredményeit ragyogóan összefoglaló — nyugodtan mondhatjuk — klasszikus mű vonult be. Most, az elsőt több, mint másfél évtizeddel később követő, lényegesen kibővített *harmadik kiadás* magyar fordításának recenziójánál is azt kell mondanunk, hogy a könyvnek ezen, a régebbi két kiadásból átvett része a legegységesebb, didaktikailag a legjobban megoldott, és leginkább ad hasznos bevezetést további irodalmi tanulmányokhoz. Meg kell azonban említenünk, hogy a harmadik kiadás számos, feltétlenül hasznos és értékes kiegészítéssel gazdagodott ebben a részben.

A kvantumelektrodinamikában az előző kiadások megjelenése óta született fontos eredmények számbavételét azok a §-ok szándékolják, amelyek a szerző „útitervében” a *„haladottabb vonal”* mentén fekszenek. Itt a tárgyalás alapjául *nem* az újabb irodalomban általánosan használt *S*-matrix formalizmus (kovariáns perturbációszámítás) szolgál. Ehelyett HEITLER a perturbációszámítás egy olyan, általa kidolgozott változatát ismerteti, amely nem azonos a korábbi irodalomból ismert közelítő módszerek egyikével sem. Kétségtelen, hogy a kovariáns *S*-matrix formalizmus mellőzése folytán a könyv nem látja el az olvasót mindazokkal az alapismeretekkel, melyek birtokában az zökkenő nélkül bekapcsolódhatna a modern kvantumelektrodinamikai folyóiratirodalom olvasásába. Különösen fájdalmas hiány, hogy ezzel együtt le kell mondanunk annak általános bizonyításáról, hogy a divergenciák a perturbációszámítás minden közelítésében a töltés- és tömegrenormálás segítségével kiküszöbölhetők (DYSON). Az sem kétséges azonban, hogy a kovariáns formalizmus alapulvétele lehetetlenné tette volna a könyv eredeti gerincének megtartását; gyakorlatilag teljesen újra kellett volna írni a könyvet. Ekkor ki kellett volna maradni a didaktikai szempontból legjobb, legszebb részek egyikének: a — kovariáns tárgyalásmód szellemétől idegen — *Hamilton*-formalizmus ismertetésének. Jelenleg a könyv egyik jelentős értéke az, ahogy a szerző a *Hamilton*-formalizmusra építve bemutatja: miképpen juthatunk el logikailag — és miképpen jutottak el ténylegesen, a történeti fejlődés során — a klasszikus elektrodinamikától a kvatumelektrodinamikához. Ez a gondolatmenet a kvantumelektrodinamikával újonnan ismerkedő olvasót döntő módon segíti abban, hogy az új diszciplína az előző ismeretekhez szervesen kapcsolódó, eleven tudásanyagként szívódjék fel agyába. (A kovariáns S-matrix formalizmuson alapuló könyvekben a térkvantálás elvi megalapozása általában vérszegényebb. Az ilyen művek — köztük az Akadémiai Kiadónál előkészületben levő AHIJEZER—BERESZTECKIJ *Kvantumelektrodinamika* — olvasását alapvetően megkönnyíti, ha az olvasó előzőleg HEITLER bevezetése nyomán már behatolt a terek kvantumelméletének szellemébe.) — Ha a kovariáns S-matrix formalizmust így nélkülöznünk is kell, az elmélet újabb fejlődése során született fontos eredményeket (*Lamb*-eltolódás, anomális mágneses momentum stb.) megtaláljuk a könyvben. A számítások során fellépő — és az elmélet első fejlődési szakaszában leküzdhetetlen nehézségnek tekintett — divergens kifejezéseket a szerző „általános" perturbációszámításának keretei között, az adott közelítésben konkrétan elvégzett renormálás segítségével távolítja el. A klasszikus elektronelméletről az I. fejezetben adott áttekintés lehetővé teszi, hogy a szerző rámutasson: a kvantumelektrodinamika divergenciái távolról sem egyedül a divergens klasszikus sajátenergia kvantumelméleti megfelelői, sokkal inkább a végtelen sok szabadsági fokú rendszerek kvantumelméleti tárgyalásának velejárói. Erényként kell kiemelnünk, hogy HEITLER nem kendőzi el az elmélet matematikailag kifogásolható, problematikus pontjait, hanem mindenütt rámutat a nehézségekre, ösztönzést adva ezzel a további kutatásokra.

Az „útiterv" *harmadik vonala* az elméleti kérdések iránt érdeklődő olvasó számára érdekes fejezeteket kapcsol össze, melyek a csillapodási jelenségeknek a szerző nevéhez fűződő általános elméletét és annak alkalmazásait tárgyalják.

A fordításról szólva mindenekelőtt örömmel és elégtétellel kell megállapítanunk, hogy az Akadémiai Kiadó a fordítás nehéz és felelősségteljes feladatát ezúttal a legalkalmasabbakra bízta. KÁROLYHÁZY FRIGYES, NAGY KÁROLY és NAGY KÁZMÉR fordítása nyelvileg és szakmailag egyaránt kitűnően adja vissza Heitler jellegzetesen tartalmas, kevés szóval sokat kifejező nyelvezetét, magávalragadó sodrású előadásmódját.

Nem hallgathatunk el azonban néhány megjegyzést az idegen kifejezések használatáról. A fordítók használják az *identitás, interpretáció, kinetikus, reprezentáció* szavakat, melyeknek bevált, elfogadott — és jobbára rövidebb! — magyar megfelelőjük van. (Az utóbbi esetben a magyar nyelv még pontosabb árnyalást is ad: *Schrödinger-reprezentáció-Schrödinger-tárgyalás, impulzus-reprezentáció-impulzus-ábrázolás.*) Ugyanakkor *jelenségnek* fordítják a közhasználatba beivódott *effektus* szót. Így lesz a rövid és kényelmes *fotoeffektusból fényelektromos jelenség!* A kifejezés így sem lett teljesen magyar, hossza pedig majdnem a kétszeresére növekedett. Mindazonáltal nem lehet tagadni, hogy értelmileg megfelelő. De az már nem megfelelő, ha *retardációs effektus* helyett *retardációs jelenséget* írunk. — Szerencsés újítás viszont a korábbi magyar irodalomban német nevén szereplő *Eichtranszformáció mértéktranszformációnak* való fordítása.

MARX GYÖRGY lektor a kvantumelektrodinamika általános tudományos jelentőségéről, a térelméletben az angol eredeti megjelenése óta történt előrehaladásokról és a további fejlődés kilátásairól írt, tanulmánynak beillő szép előszóval, NAGY KÁROLY szerkesztő gondos irodalmi kiegészítésekkel és megjegyzésekkel járult hozzá ahhoz, hogy a magyar HEITLER az olvasó kedvelt és minél hasznosabb segítőtársa legyen az önképzésben és a kutatómunkában.

Az Akadémiai Kiadót köszönet és dícséret illeti meg: e vállalkozása révén a magyar fizikusok abba az irigylésre méltó helyzetbe kerültek, hogy HEITLER könyvét anyanyelvükön, az eredetivel egyenrangú, szép kiállításban, ugyanakkor annál *lényegesen olcsóbb* áron szerezhetik be.

Györgyi Géza
A Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutatóintézete

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1960. VI. 20. — Terjedelem: 13,50 (A/5) ív, 7 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 60-2942

Ára: 30,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

KÖNYVISMERTETÉS

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

X. KÖTET 4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1960

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

X. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

PÁLYÁZATI HIRDETMÉNY

A Magyar Tudományos Akadémia Tudománytörténeti Bizottsága pályázatot hirdet az alábbi témakörök kidolgozására:

1. Egy magyar tudományos társaság vagy tudományos folyóirat XIX. és XX. századi története (országos vagy helyi jellegű társaságok, illetve orgánumok története);
2. A szellemtörténet hatása a társadalomtudományokra, vagy a társadalomtudományok egy ágának fejlődésére Magyarországon.

A jeligével ellátott pályamunkákat 1961. május 1-ig a Magyar Tudományos Akadémia Tudománytörténeti Bizottságának címére (Budapest I. Úri u. 51—53.) kell beküldeni. Az érdemleges pályamunkák jutalomban részesülnek, illetve a Bizottság megjelenésükről gondoskodik.

Olyan nagyobb terjedelmű munka esetében, amelynek részletes kidolgozása a beadási határidőn túlmenő hosszabb időt vesz igénybe, elegendő a munka egy nagyobb részletének és az egész mű részletes vázlatának benyújtása is.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
TUDOMÁNYTÖRTÉNETI BIZOTTSÁGA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

1960. ÉVI NAGYGYŰLÉSE

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK ELŐADÁSAI

Április 11-én, hétfőn délután 3 órakor

HAJÓS GYÖRGY akadémikus

Az osztályvezetőség beszámolója

PÁL LÉNÁRD, a fizikai tudományok doktora

Beszámoló a Központi Fizikai Kutató Intézetben folyó egyes tudományos munkákról

Április 12-én, kedden délután 3 órakor

JÁNOSSY LAJOS akadémikus

Valószínűségszámítási meggondolások mérések kiértékelésének problémájához

RÉNYI ALFRÉD akadémikus

Az információ-elmélet néhány alapvető kérdése

Április 13-án, szerdán délután 3 órakor

HAJÓS GYÖRGY akadémikus

Megemlékezés Bolyai Jánosról és geometriai munkásságáról

AZ OSZTÁLYVEZETŐSÉG BESZÁMOLÓJA

Előadta HAJÓS GYÖRGY akadémikus, osztálytitkár

Az osztályvezetőség jelen beszámolója az Akadémia újjászervezése óta eltelt 10 év eredményeiről, a fejlődés mértékéről, az Osztály munkájáról kíván összefoglaló képet nyújtani, s ezen eredmények figyelembevételével foglalkozik az Osztály jövő feladataival a matematika, a fizika és a csillagászat területén.

A beszámoló kitér a legutóbbi nagygyűlés óta eltelt időszak alatt végzett munkára, az eredményekre és hiányosságokra. Feltétlenül szükséges, hogy e beszámoló keretében foglalkozzunk külön is az egyes intézetek működésével, a könyvkiadás, a tudományos káderutánpótlás eredményeivel és problémáival, az Osztály felügyelete alatt működő társulatok munkájával, az Osztály különböző rendezvényeivel és egyéb irányú tevékenységével.

A beszámoló foglalkozik a hazai matematikai, fizikai és csillagászati kutatások fejlesztésével. A fejlesztést illetően folyamatban van egy perspektívikus tudományos terv kidolgozása. E feladattal az osztályvezetőség beszámolója részletesebben kíván foglalkozni.

Az eredmények felmérése, értékelése, az Osztály munkájában fellelhető hiányosságok feltárása és a jövő feladatok kijelölése érdekében az Osztály egész működését az MSZMP 1958-ban kiadott művelődéspolitikai irányelveinek tükrében kell vizsgálnunk.

A beszámoló sem az elmúlt 10 év munkásságát, sem a legutóbbi nagygyűlés óta eltelt időszakban elért eredményeket tekintve, nem törekedhetik teljességre.

Az Akadémia 1949 őszén történő újjászervezése az Osztály tudományterületein is nagy változásokat eredményezett, és nagyarányú fejlődés indult meg a hazai matematikai, fizikai és csillagászati kutatások területén. Míg az újjászervezés előtt az Akadémiának egyetlen intézete sem volt az Osztályhoz tartozó tudományterületeken, ma összesen 6 intézet, ill. kutatócsoport működik, és végez a megalakulás óta eredményes munkát. Közvetlenül az Akadémia újjászervezése után, 1950-ben alakult meg az Alkalmazott Matematikai Kutató Intézet és a Központi Fizikai Kutató Intézet (KFKI), 1954-ben az Atommag Kutató Intézet, az Elméleti Fizikai Kutató Csoport. Az akkori Közoktatásügyi Minisztériumhoz tartozó Csillagvizsgáló Intézet 1952-ben az Akadémiához került át. 1958-ban a Csillagvizsgáló Intézet keretéből kivált a Napfizikai Obszervatórium. Ezen intézmények megalakítása a matematika, a fizika és a csillagászat terén a kutatások hazánkban korábban nem ismert lehetőségeit nyitotta meg. A kutatási lehetőségek megteremtését és kiszélesítését meggyőzően bizonyítja a következő néhány számadat is:

Az 1950-ben megalakult Alkalmazott Matematikai Kutató Intézet — amely ma Matematikai Kutató Intézet elnevezéssel működik — összlétszáma az alapítási évben 12 fő, és egy évi költségvetése 175 000 Ft, ma az összlétszám 72 fő, évi költségvetése pedig közel 4,5 millió forint.

A KFKI-nak, amely ugyancsak 1950-ben alakult, összlétszáma az alapítási évben 16 fő, költségvetése 160 000 Ft, az 1959. évi intézeti összlétszám pedig 852 fő és az erre az évre biztosított költségvetési kerete 61,5 millió forint volt.

Az Osztályhoz tartozó többi intézménynél megalakulásuk évétől a mai napig a fejlődés mértéke ugyancsak igen jelentős.

Az Akadémia az újjászervezés után nemcsak új kutató intézmények létrehozásával törekedett a kutatások bázisát kiszélesíteni, hanem az egyetemi intézetekben és tanszékeken folyó kutatásokat is támogatta. Ez a támogatás nemcsak a kutatómunka megszervezésében, irányításában és koordinálásában nyilvánult meg, hanem jelentős anyagi támogatás biztosításában is. Ez az anyagi támogatás az újjászervezés óta céltámogatás formájában valósult meg, és ennek összege az elmúlt 10 év alatt mintegy 6,5 millió Ft-ot tett ki. Ezen összegből évente átlag 20 matematikai, fizikai és csillagászati egyetemi intézet és tanszék részesült.

A fejlődés mértékét bizonyítja a könyv- és folyóiratkiadás terén bekövetkezett változás is. Míg az Akadémia újjászervezése előtt az Osztályhoz tartozó tudományterületeken az Akadémia kiadásában alig jelent meg 1—2 könyv, addig az elmúlt 10 év alatt összesen 64 könyv jelent meg, ebből 35 matematikai, 29 fizikai tárgyú volt.

A matematikai tárgyú könyvek közül 20 könyv idegen nyelvről történő fordítás volt, és 15 könyvet magyar szerzők írtak. A magyar szerzők által írt könyvek közül 7 könyv magyar, 8 könyv pedig idegen nyelven jelent meg. Az idegen nyelven megjelentetett matematikai könyvek közül 6 könyv több nyelven több kiadást is megért.

A fizikai tárgyú könyvek közül 23 könyv idegen nyelvről történő fordítás volt, és 6 könyvet magyar szerzők írtak, ezek közül 2 idegen nyelven jelent meg.

Ugyancsak az újjászervezés után került sor az idegen nyelven megjelenő Acta Mathematica és Acta Physica kiadására, valamint a magyar nyelven megjelenő Magyar Fizikai Folyóirat megjelentetésére is. Az Osztály idegen nyelvű folyóiratai ma már szép nemzetközi sikernek örvendenek.

A tudományos munka igen szép anyagi megbecsüléséről tanúskodik az a körülmény is, hogy az Akadémia újjászervezése után bevezetett új tudományos minősítési rendszer során a tudományok kandidátusai, doktorai, az Akadémia levelező és rendes tagjai jelentős összegű tiszteletdíjban részesülnek. Az Osztály tudományterületein az Akadémia által kifizetett ezen tiszteletdíjak összege az elmúlt 10 év alatt mintegy tízmillió forintot jelentett.

A felsorolt tények és adatok bizonyítják, hogy népköztársaságunk nagy gondot fordít a tudomány fejlesztésére, és évről évre mind nagyobb mértékű anyagi és erkölcsi támogatásban részesíti az Akadémiát és ezen belül intézményeit is.

Az Akadémia újjászervezését megelőzőleg és főként a felszabadulás előtti időszakban a kutatások csak néhány vezető tudós nehéz körülmények között végzett munkásságából adódtak. A felszabadulás előtti években a mostoha körülmények miatt számos matematikus és fizikus kényszerült külföldre távozni. Ezzel szemben a felszabadulás után, de különösen az Akadémia újjászervezése után a régebben is művelt kutatási irányok továbbfejlesztése és kiterjesztése mellett magyar kutató iskolák alakultak a matematika és a fizika különböző ágaiban. Jelentős eredménynek kell minősíteni, hogy a matematikában és fizikában a kizárólag elméleti jellegű kutatások mellett a vizsgálatok kiterjedtek az alkalmazásokra is. A matematikában például kialakult egy valószínűségszámítási iskola. A fizikában kozmikus sugárzási, magfizikai és szilárdtestek fizikájával foglalkozó iskola alakult ki, vagy van kialakulóban.

Összefoglalva kijelenthetjük, hogy a megnövekedett lehetőségek egyrészt azt eredményezték, hogy megsokszorozódott a kutatók és a kutatás iránt érdeklődők száma, másrészt a régebben is végzett kutatások fejlődése mellett új, korábban nálunk meglehetősen elhanyagolt területeken is intenzív és sikeres vizsgálatok indultak meg és folynak.

Az elmúlt 10 év alatt a matematika területén elért számos eredmény közül különösen kiemelkedők a következő eredmények:

a hatványösszegek új módszerének kidolgozása és alkalmazása a számelmélet és analízis számos problémájára, az ortogonális polinomok és ortogonális sorfejtések elméletének továbbfejlesztése, a valószínűségszámítás új axiomatikus megalapozása, a rendezett minták elméletének továbbfejlesztése, a Hilbert- és Banach-terekkel, a topológikus terekkel és differenciálgeometriai terekkel kapcsolatos vizsgálatok, a modern algebrai vizsgálatok, függvényegyenletek vizsgálata, továbbá a matematikai logikai gép megépítése és különböző gyakorlati problémákra való alkalmazása.

Kiemelkedő eredményt ért el a Matematikai Kutató Intézet a matematika gyakorlati felhasználása terén is. Külső megbízásaik száma 1959 végéig 1348-ra emelkedett, ebből az elmúlt év végéig 1184 feladatot oldottak meg. A külső megbízásokra végzett munkák fejlődése nemcsak a megbízások számában, hanem jelentőségében is megmutatkozott; mind több azoknak a megbízásoknak a száma, amelyek egy-egy üzem egészére, vagy egy-egy ipari vagy kereskedelmi ágazat egész tevékenységére nézve bírnak jelentőséggel.

A fizika területén különösen nagy lemaradást kellett felszámolni. A fordulat éve előtt, de különösen a felszabadulás előtt hazánkban modern kísérleti fizikai kutatások lényegében alig folytak. Éppen ezért az elmúlt 10 év alatt elsőrendű feladat volt a hazai kísérleti fizikai kutatások lehetőségeinek a megteremtése és ezen belül elsősorban a kísérleti atomfizikai kutatások megindítása. Ez önmagában véve sem volt könnyű feladat. Ugyanakkor természetesen az elméleti fizikai kutatások megfelelő mértékű fejlesztéséről és kiszélesítéséről is gondoskodni kellett, mert enélkül korszerű kísérleti fizikai kutatások nem képzelhetők el.

A kísérleti fizikai kutatások lehetővététele érdekében alakította meg az Akadémia a Központi Fizikai Kutató Intézetet, amely ma Közép-Európa egyik legkorszerűbb kísérleti fizikai intézete. Elsőrendű cél volt az intézeten belül a kísérleti atommagfizikai kutatások lehetőségeinek biztosítása, amely a Szovjetunió segítségével megépített atomreaktorral ma már lehetővé vált. A kísérleti fizikai kutatások jellegéből fakad, hogy több évre volt szükség ahhoz, hogy kísérleti fizikai kutatások végzésére alkalmas kutatógárda nevelődjék ki, és az intézet dolgozói a kutatásokhoz szükséges modern műszereket és eszközöket megépíthessék. Elmondhatjuk, hogy az intézet kb. két éve a kutatások előkészítését célzó munkán túljutott, s ma már eredményes kutatómunkát folytat.

A kozmikus sugárzások kutatásának területén eredményes munka folyt az utóbbi 10 évben. Elsősorban az elektron-foton arány és az áthatoló komponens tanulmányozásában értek el jelentős eredményeket. Komoly eredmények születtek a μ-mezonok élettartamának, a kozmikus sugárzás lágy komponense átmeneti görbéjének (*Rossi*-görbe) és a mezonintenzitás geofizikai tényezők függvényében történő ingadozásának vizsgálata során. Jelentős vizsgálatok folytak az elmúlt évek során a fény kettős természetének vizsgálatával kapcsolatban koherens fénynyalábok koincidenciáját, valamint az interferencia jelenség intenzitás-függetlenségét illetően.

A magfizikai kutatások megindulását lehetővé tette a részecskegyorsítók megépítése, amelyek segítségével több új eredmény látott napvilágot. A kísérleti atomreaktor üzembehelyezésével vált lehetővé a magkémiai kutatások megindulása. Az elmúlt év óta a Központi Fizikai Kutató Intézet mintegy 20-féle különböző izotópkészítményt szolgáltat a hazai szükségletek kielégítésére. A reaktor megépítése tette lehetővé a reaktorfizikai és az azzal kapcsolatos technikai kutatások megindulását.

Az Atommag Kutató Intézet munkatársai felderítették az urán bedúsulására vonatkozó geokémiai törvényszerűségeket, és tisztázták ebben a humusz szerepét. Az intézetben szellemes és egyszerű kísérlettel, Wilson-kamra segítségével a He^6-os bétabomlás során kimutatták a neutrinó visszalökő hatását.

Figyelemre méltó eredmények születtek az elmúlt 10 évben a szilárdtestek kutatása terén is, elsősorban a kristályfizikában, a félvezetők elektromos és fotoelektromos vizsgálatában, továbbá az organikus anyagok lumineszcencia vizsgálatában. Számottevők azok az eredmények, amelyeket a ferromágneses kristályok energia anizotrópiájára vonatkozóan értek el a kutatók. Itt említjük a spektroszkópia területén elért elméleti és gyakorlati eredményeket is.

Az elméleti fizikában különösen kiemelkedő eredményeket értek el kutatóink a statisztikus atommodellnek továbbfejlesztése terén. Ennek során sikerült az elektronhéjak helyén megadni az elektronsűrűségek maximumát. Kidolgozták a többvalenciás fémek elektron elméletét és az anyag nyomássűrűség diagramjait igen nagy nyomás esetére. Jelentős eredmény a különböző impulzusmomentumú atommagokban a nukleon eloszlás meghatározása. A kvantumkémia területén kiemelkedő eredmények születtek a kételektronpályák alkalmazásával kapcsolatos vizsgálatok során.

Jelentős munkásságot fejtettek ki fizikusaink az utolsó 10 esztendőben a térelméletben, valamint a kvantumelmélet problémáival és az elvi problémák értelmezésével kapcsolatos kérdésekben. Ugyancsak jelentősek a relativitás elmélet terén elért hazai eredmények.

A csillagászat területén nemzetközi hírnévnek örvendenek a változócsillagok megfigyelésére vonatkozó kutatások. E témakörben a kutatási eszközök korszerűsítése lehetővé tette, hogy a fotografikus észlelésről áttérjenek a modern fotoelektromos megfigyelési módszerre. Ennek köszönhető, hogy a Blasko-effektus évtizedekig húzódó problémáját sikerült megnyugtató módon megoldani. Értékes adatokat kaptak kutatóink a csillagok kémiai összetételére vonatkozóan is.

Az elmúlt 10 év alatt a kutatókáderek tervszerű fejlesztése, az aspiránsképzés és az új tudományos minősítési rendszer bevezetése igen eredményes volt. Az Osztály tudományterületein sok fiatal kutató nevelődött és közülük többen ma már nemzetközileg is elismert kutatókká váltak. Míg a felszabadulás előtt igen tehetséges fiatal matematikusok és fizikusok számára nem volt munkalehetőség, és ezért igen sokan kénytelenek voltak külföldre távozni, addig ma mind nagyobb és nagyobb szükséglet mutatkozik főként a fizika kísérleti ágaiban és a matematika alkalmazásaiban az új kutatók iránt.

Az Osztály tudományterületein a fordulat éve óta megindult a matematikai, fizikai és csillagászati kutatásokkal kapcsolatos ideológiai tevékenység.

E téren már vannak bizonyos eredmények, azonban e kérdések fokozottabb vizsgálatára van szükség a jövőben.

Az elmúlt 10 évben az Akadémia és az Osztály törekedett az egyetemi tanszékeken folyó kutatások fejlesztésére, azonban ez korántsem bizonyult elegendőnek. Egyetemi tanszékeink, különösen a kísérleti fizikai tanszékek felszerelése és e tanszékek kutatórészlegeinek az elhelyezése nem korszerű, és ez az állapot akadályozza az eredményes kutatómunkát. Ezen az állapoton azért is kívánatos mielőbb változtatni, mert az egyetemi tanszékeken folyó kutatásoknak lényeges szerepük van tudományos életünkben, és szerves kiegészítői az akadémiai intézetekben folyó kutatásoknak.

Az Osztályhoz tartozó tudományterületeken az Akadémia újjászervezése óta elért eredmények közül e néhány kiemelkedő eredmény felsorolása is bizonyítja, hogy igen intenzív kutatómunka folyt mind az elméleti, mind a kísérleti kutatásokban, mind pedig az alkalmazásokban.

A következőkben az Osztály munkájáról adunk tájékoztatást a legutóbbi nagygyűlés óta eltelt időszakra vonatkozólag.

Ebben az időszakban az Osztály tagjai osztályülés keretében tárgyalták meg és értékelték az osztályvezetőség tevékenységét, javaslatokat dolgoztak ki a Kossuth-díjak odaítélésére és új akadémiai rendes és levelező tagok, továbbá tiszteleti és külső tagok választására.

Az osztályvezetőség 1959 januárjában megtárgyalta az egyetemi intézetekben folyó kutatások problémáit, és már ekkor javasolta néhány intézetben akadémiai kutatócsoportok szervezését. Ennek eredményeképpen a fizika területén, különböző egyetemeken 4 akadémiai kutatócsoport szervezése van folyamatban. Ezek a kutatócsoportok az ELTE Elméleti Fizikai Intézetében, az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében, a Szegedi Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében és a budapesti Orvosi Fizikai Intézetben fognak működni.

Az osztályvezetőség rendszeresen megtárgyalta az akadémiai és az egyetemi intézetek tudományos terveit és tudományos beszámoló jelentéseit. Összeállította az Osztály távlati könyvkiadási tervét. Megvitatta és értékelte az osztályvezetőség a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat tevékenységét, javaslataival segítette ezen egyesületek munkájának jobbátételét. Rendszeresen foglalkozott a nemzetközi kapcsolatok fejlesztésével, a nagyobb beruházási igények elbírálásával.

Az Osztály keretében működő Matematikai Bizottság, Fizikai Bizottság és Csillagászati Bizottság hosszas előkészítő munka után kialakította a távlati tudományos terveket, megvitatta az évi tudományos terveket és beszámoló jelentéseket. A bizottságok összetétele lehetővé tette, hogy a matematika, a fizika és a csillagászat hazánkban művelt valamennyi fontosabb területét részleteiben is áttekintsék, és az egyes területeken folyó munkákat a nemzetközi színvonal szempontjából értékelhessék.

Az Osztályhoz tartozó tudományágak egész területét szakembereink nem fedhetik le. Az egyes területek kiválasztását, a művelt területek súlyozását népgazdasági szempontok, hazai hagyományok és személyi adottságok határozzák meg. A bizottságok ezen szempontok szem előtt tartásával irányították a hazai matematikai, fizikai és csillagászati kutatásokat. E szempontok figyelembevételével tettek javaslatot külföldi kapcsolatok kiépítésére, külföldi tanulmányutak megszervezésére, magyar és külföldi intézetek közös kutatásaira, a könyvkiadásra stb. Mindezen sokrétű munka megfelelő elvégzését többek között az tette lehetővé, hogy a bizottságok az Osztályhoz tartozó intézetekkel közvetlen kapcsolatot tartottak fenn.

Mind az osztályvezetőség, mind a bizottságok munkájának legfontosabb része az Osztályhoz tartozó akadémiai és egyetemi intézetek működésének irányítása és ezen intézetekben folyó kutatómunka elősegítése volt.

A továbbiakban az Osztályhoz tartozó intézetek munkájáról és helyzetéről adunk vázlatos tájékoztatást.

Mint ismeretes, a Minisztertanács 1955-ben rendelte el a kísérleti atomreaktor felépítését. A reaktor telephelyét Csillebércen, a *Központi Fizikai Kutató Intézet* telephelyén jelölték ki. Az építés a Szovjetunió segítségével 1959-ben befejeződött. A kísérleti atomreaktor és az ezzel kapcsolatban létesített új tudományos osztályok feletti felügyeletet az Országos Atomenergia Bizottság (OAB), míg a Központi Fizikai Kutató Intézet felügyeletét az Akadémia látta el, bár a két intézmény szoros és elválaszthatatlan kapcsolatban állt egymással. A KFKI igazgatója egyben a kísérleti atomreaktor igazgatója is volt, ugyanaz a főkönyvelő vezette mindkét intézmény gazdasági ügyeit stb. Ez a kettősség mind az intézet, mind pedig a reaktor közvetlen vezetését, ezen létesítmények munkáját nagymértékben akadályozta, mert pl. tudományos felügyelet és pénzügyi vonatkozásban az intézmény egyik fele az Akadémiához, másik fele az OAB-hoz tartozott. Ez a körülmény rendkívül megnehezítette és bürokratikussá tette mind a közvetlen vezetést, mind pedig a felügyeleti szervek irányító munkáját. Ezt a nehéz helyzetet szüntette meg a kormány határozata 1959-ben azzal, hogy elrendelte a két intézmény egyesítését. Az egyesített intézet mint a Magyar Tudományos Akadémia Központi Fizikai Kutató Intézete folytatja működését. A tudományos felügyeletet az Akadémia és az OAB együttesen gyakorolják, a pénzügyi felügyeletet az OAB látja el. Bár rövid idő telt el az egyesítés óta, mégis meg lehet állapitani, hogy ez az intézkedés hasznosnak bizonyult. Erről tanúskodik az intézetben legutóbb lefolyt akadémiai vizsgálat eredménye is. Így például kitűnt, hogy az intézet végső profilja csak az egyesítés után volt kialakítható.

Az intézet fejlődése során tudományos feladataiban igen jelentős mértékben differenciálódott, megnövekedett, és túlnőtte azokat a szervezeti kereteket, amelyek kezdetben még megfelelőnek mutatkoztak. Főleg az ellenforradalom előtti időben az intézetben egymástól többé-kevésbé elszigetelt, saját önálló életet élő egységek kezdtek kialakulni. Ennek megszüntetése érdekében gazdasági vonatkozásban áttértek a témagazdálkodásra, amely jelentős eredményeket hozott a rendelkezésre álló anyagi eszközök célszerűbb hasznosítása terén. A témagazdálkodás bevezetéséig az volt az eljárás, hogy az egyes osztályok függetlenül attól, hogy tudományos programjuk milyen súlyú, létszámuknak megfelelő, illetve az egyenlősdi elvét követő anyagi juttatásokat kaptak. A vizsgálat során kitűnt, hogy a témagazdálkodás bevezetése igen hasznos volt, mert lehetővé tette a témák jelentőségük szerinti támogatását, jobban felébresztette a kutatók lelkiismeretét, és ennek eredményeképpen az anyagi ráfordítások megválasztásában sokkal körültekintőbbek, meggondoltabbak lettek. A gazdálkodási módszerek helyes megváltoztatása azonban a szervezeti felépítés régi, már nem megfelelő kereteit érintetlenül hagyta. Ez az utóbbi időben már szinte akadályozta a céltudatos, kellően összehangolt kutatómunkát, ezért az OAB és az Akadémia 1959 elején az intézet átszervezését rendelte el.

Az új szervezeti formákat az intézet következő feladatai határozták meg: alap- és alkalmazott kutatások folytatása általában a kísérleti fizika, valamint az atomenergia békés felhasználásával kapcsolatos fizikai, kémiai és műszaki tudományok területén.

Ezen általános meghatározáson belül az intézetben folyó tudományos munka a következő fő irányok köré csoportosul: kozmikus sugárzások, fizikai optikai, magfizikai — ezen belül magreakciók vizsgálata, magspektroszkópiai, neutronspektroszkópiai, reaktorfizikai és technikai vizsgálatok —, szilárdtest fizikai, magkémiai és elektronikai kutatások.

Az elmúlt év folyamán a régi, nem kellően definiált osztályok helyett olyan tudományos laboratóriumok létrehozására került sor, amelyek szervezetileg is pontosan fedik a tudományos célkitűzéseket. Az átszervezés előtt az intézet kutatási témáinak száma igen nagy volt, nem beszélve a témák szerteágazó voltáról. Az átszervezés során sikerült ugyan a témák számát jelentősen csökkenteni és a témákat helyesen kiválasztani, azonban e téren még további javulást kell elérni.

A következőkben a KFKI 1959. évi tudományos eredményeiről kíván az osztályvezetőség összefoglaló képet adni: A kozmikus sugárzással kapcsolatos kutatások legfontosabb eredményei az áthatoló záporokat létrehozó magaktív részecskék ütközési hosszának ólomban történő meghatározása volt. Ezenkívül megindult a dubnoi Egyesített Atommagkutató Intézetben besugárzott emulziós lemezekben és buborékkamra felvételeken a 9 GeV-os protonok és a 7 GeV-os

μ-mezonok magkölcsönhatásainak a vizsgálata. Ezzel az együttműködéssel kapcsolatban elkészült a dubnoi Egyesített Atommagkutató Intézet részére egy buborékkamra felvételek automatikus kiértékelésére szolgáló berendezés, amely jelenleg Dubnoban működik.

A fény kettős természetének vizsgálatával kapcsolatos kísérletek során a fotonszámlálás technikáját fejlesztve néhány olyan eredmény született, melynek gyakorlati alkalmazása baráti államok iparában is megmutatkozik. Jelentős eredményeket értek el az intézetben a ferromágneses kristályok energia anizotrópiájára és a ferromágneses anyagok átmágnesezési folyamataira vonatkozó kutatások terén. A vizsgálatokkal kapcsolatban ipari használatra alkalmas négyszöghiszterézishurkú ferritgyűrűk előállítási technológiájának kidolgozására került sor.

1959 elején befejeződtek a kísérleti atomreaktor építési munkálatai és a hidegüzemi próbák befejezése után 1959. március 25-én érte el a reaktor első ízben a kritikus állapotot. Ezt követően megtörténtek a legfontosabb üzemi mérések és beállítások. A reaktor azóta is említésre méltó rendellenesség nélkül teljesíti feladatát. Befejeződtek a legfontosabb reaktorfizikai jellemzők mérései, s megindultak a reaktor segítségével végzendő kutatások is. A reaktorhoz csatlakozó melegkamrák üzembe kerültek, s 1959. december óta rendszeres izotópgyártás folyik.

Megindultak a reaktorfizikai és technikai kutatások keretében egyrészt a moderátoranyagok reaktorfizikai paramétereinek mérései, másrészt ezek hőtechnikai tulajdonságainak vizsgálata. Mérések történtek a sokszorozó rendszerekbe befolyó fluktuációs jelenségek eddigi elméleti vizsgálatai alapján az elméleti eredmények kísérleti igazolására.

1959. november 7-re üzembe helyezett az intézet egy a kísérleti atomreaktor tartalék fűtőelemeiből készített szubkritikus reaktort. E reaktor segítségével olyan reaktorfizikai mérések folynak, melyeket a kísérleti atomreaktoron, annak nagy aktivitása miatt, végrehajtani nem célszerű, vagy lehetetlen.

A kísérleti atomreaktor üzembehelyezésével a magkémiai kutatások is megindultak. Ma már mintegy húszféle különböző izotópkészítményt ad az intézet más kutatóintézeteknek, közöttük több olyan izotópot, amelynek használata — rövid felezési idejük miatt — hazánkban eddig nem volt lehetséges. A stabil izotópok szétválasztásával kapcsolatos kutatások különböző fázisegyensúlyok izotópeffektusainak vizsgálatára irányult. Az intézet a Pécsi Uránércbánya Vállalattal együttműködve széleskörű alapkutatásokat folytatott a hazai uránércből történő uránkinyerésre vonatkozóan.

Összegezve: az osztályvezetőség úgy véli, hogy az intézetben foganatosított átszervezés helyes volt, és az a munka sikerességét elő fogja segíteni.

A Matematikai Kutató Intézet működésének felülvizsgálatára is sor került az elmúlt évben. A vizsgálat során megállapítást nyert, hogy az intézetben eredményes kutatómunka folyik mind a matematika elméleti ágaiban, mind pedig a matematika alkalmazásaiban. A matematika eredményeinek további alkalmazása érdekében alakult meg az intézet Valószínűségszámítási Osztálya keretében egy a matematika közgazdasági alkalmazásaival foglalkozó csoport. Ez a csoport már igen szép eredményeket ért el a közgazdasági problémák megoldásában. Az intézet kutatói eredményeiket több mint 100 dolgozatban publikálták. Ezen eredmények részletes ismertetésére nem térünk ki. Az eredmények a valószínűségszámítás és alkalmazásai, a matematikai statisztika és alkalmazásai, a valósfüggvénytan, a topológia, a differenciálegyenletek elmélete és alkalmazásai, a komplex függvénytan, a funkcionálanalízis, a matematikai logika és alkalmazásai, az algebra és a geometria tárgykörébe tartoznak.

Az intézet munkáját felülvizsgáló bizottság javaslata alapján az osztályvezetőség felszólította az intézetet, hogy a jövőben a matematikai kutatások gyakorlati felhasználásának fokozottabb mértékű biztosítása érdekében tervszerű propaganda munkát folytasson. A matematika alkalmazásainak eredményesebbé tételéhez feltétlenül szükséges, hogy az intézet a közeljövőben elektronikus számológéppel rendelkezzék.

Az *Elméleti Fizikai Kutató Csoport* fő munkaterülete az atom és atommag statisztikus elmélete, a hullámmechanikai közelítő módszerek és alkalmazásaik. Ezekben a témakörökben igen jelentős, számottevő eredményeket ért el a csoport. A statisztikus perturbáció elmélet segítségével az atomok polarizálhatóságára egy formulát vezettek le, amelyet alkalmaztak a neon, argon, krypton és xenon atomok polarizálhatóságának meghatározására. Meghatározták az argon atom polarizálhatóságának a nyomástól való függését. A statisztikus elmélet alapján kidolgozták az N_2 molekula kötését. Számításokat végeztek az Au, S és Br atomok legkülső elektronjai hullámfüggvényeinek és egyelektronenergiájának meghatározására. Tovább folytatódtak a szilárdtestek elméletével kapcsolatos kutatások is. Számításokat végeztek a modifikált potenciál segítségével az Au fémre vonatkozóan. A kapott eredmények jó összhangba vannak a kísérlettel. A kvantumkémia tárgykörben ugyancsak számottevő eredményeket értek el.

A csoportban végzett kutatások eredményei elismerten nemzetközi színvonalon állnak. A kutatómunka során felhasznált elméleti módszerek megfelelnek a modern követelményeknek, amit több körülmény támaszt alá. Ezek közül megemlítjük, hogy a csoport munkásságára és eredményeire külföldi szaklapokban gyakran hivatkoznak. A technikai berendezések, amelyekkel a csoport munkatársai dolgoznak, csak részben felelnek meg a korszerű követelményeknek, mert a rendelkezésre álló számológépek nem elegendők és a meglevők nagy része nem korszerű. A csoportban igen sok numerikus számolási munkát végeznek, és ezt a munkát digitális elektronikus számológép használata nagymértékben megkönnyítené és gyorsítaná.

Az *Atommag Kutató Intézetben* (ATOMKI) az elmúlt évben vizsgálták a természetes vizek urántartalmát és e vizsgálatok során bizonyítást nyert, hogy a korábban laboratóriumi kísérletekből megállapított dúsítási faktor a természetben is reális érték. Sikeres laboratóriumi kísérleteket végeztek uránhasadási termékeknek vízből tőzeg adszorpciójával való eltávolítására.

A hazai szenek urántartalmának kinyerésére vonatkozó laboratóriumi kísérletek 1959-ben lezáródtak. Mindezek a kísérletek az elmúlt években gyakorlati reményeket tápláltak, azonban ma már világosan látszik, hogy a hazai szenek urániumtartalma nem elegendő ahhoz, hogy a kivonás gazdaságos legyen, különösen ha azt is figyelembe vesszük, hogy az ország bőségesen rendelkezik jóval gazdagabb ércekkel is.

Az intézetben eredményeket értek el az alacsonyenergiájú tartományban folytatott magfizikai kutatások terén is.

Nehéz problémát jelent az a körülmény, hogy a közel 9 millió forintos beruházással épített és felszerelt második laboratóriumi épület létszámhiány miatt csak kismértékben van kihasználva, és ezen sajnos ebben az évben sem tudtunk lényegesen segíteni. Az elmúlt év első felében történt felülvizsgálat után alakult ki az intézet perspektivikus kutatási iránya. Eszerint az Atommag Kutató Intézet fő tudományos iránya az alacsonyenergiájú atommagfizikai kutatások, részletesebben: béta-spektroszkópia, gyenge kölcsönhatások és atomok gerjesztett állapotának vizsgálata. Ezenkívül sugárbiológiai, továbbá geokémiai és kozmokémiai vizsgálatok is folynak az intézetben.

Az elmúlt években nem volt kielégítő az együttműködés az ATOMKI és a KFKI között. Az 1959. év ezen a téren is változást hozott. A két intézet tapasztalatcsere megállapodást kötött, és a vezető munkatársak kölcsönösen meglátogatták az intézeteket. A tapasztalatcsere megindítása igen gyümölcsöző lehet.

A Csillagvizsgáló Intézetben az 1959. évben is eredményesen folytatódtak a változócsillagok megfigyelésére vonatkozó vizsgálatok. A Blaskó-effektus évtizedekig húzódó problémáját sikerült megnyugtatóan megoldani. Értékes adatokat kaptak az intézet munkatársai a csillagok kémiai összetételére. Egyedülálló megfigyelést végeztek a Lunyik II. Holdba történő becsapódásáról.

Az intézet munkájának további megjavítása érdekében az intézet működését felülvizsgáló bizottság javaslatai alapján szükségesnek tartjuk, hogy az intézet fokozza együttműködését a hazai intézetekkel, különösen a KFKI-val. A hazai csillagászati kutatások eredményes továbbfejlesztését súlyosan gátolja az a körülmény, hogy nincs megfelelő káderutánpótlás. Éppen ezért sürgős feladat a csillagászati káderutánpótlás megszervezése és biztosítása.

A Debrecenben működő *Napfizikai Obszervatórium* múlt évi munkájának legnagyobb része még mindig csak a műszerek építése és felállítása volt. Az elmúlt évben az Obszervatórium kutatói majdnem kizárólag az észlelések gyűjtésére szorítkoztak, és kevés gondot fordítottak a rendelkezésre álló anyag tudományos feldolgozására.

Összegezve megállapíthatjuk, hogy az Osztályhoz tartozó intézetekben a beszámolási időszakban általában sikeres és eredményes kutatómunka folyt. Az intézetekben folyó kutatómunkák fejlődését elősegítették a lefolytatott vizsgálatok, ugyanis e vizsgálatok során nemcsak a meglevő hiányosságok megállapítására került sor, hanem a vizsgáló bizottságok javaslatai alapján az Akadémia Elnöksége és az Osztály vezetősége határozatot hozott a hiányosságok megszüntetésére. A munka további megjavítása érdekében lényeges követelményként kell előírni minden intézet számára, hogy mind az intézet vezetésében, mind a fiatal kutatók nevelésében, mind pedig egyéb vonatkozásban egyaránt érvényesüljenek a politikai és szakmai követelmények.

A legutóbbi nagygyűlés óta a céltámogatásban részesülő egyetemi intézetekben és tanszékeken ugyancsak eredményes kutatómunka folyt. Az egyetemi intézetekben és tanszékeken működő matematikusok figyelemre méltó eredményeket értek el a valós függvénytan, a függvénytan, az analitikus számelmélet és a funkcionálanalízis elméletében, az ortogonális sorokra vonatkozó vizsgálatokban, a függvényegyenletek terén, a matematikai logika és matematikai gépek elméletében, az algebrai struktúrák vizsgálatában, a differenciálgeometria és a geometria területén.

Az egyetemi fizikai intézetek és tanszékek 1959. évi munkája ugyancsak sikeres volt. Különösen a szilárdtestek fizikájával kapcsolatos eredmények számottevőek. A fizika ezen ágában dolgozó fizikusaink összefoglalták az eddig növesztett szcintillációs kristályok alapján szerzett tapasztalatokat, és statisztikusan értékelték a kristályok minőségét az előállítás körülményeinek függvényében. Az organikus anyagok lumineszcenciájának vizsgálata során elért eredmények ugyancsak jelentősek. Tovább folytatódtak és sikeresek voltak a félvezetők elektromos és fotoelektromos tulajdonságainak vizsgálatai.

Az elméleti fizika terén többek között cél volt a klasszikus és a kvantumelmélet kapcsolatának tanulmányozása. Ennek során több szép eredmény került publikálásra.

A továbbiakban tájékoztatást kívánunk adni az Osztály könyv- és folyóiratkiadási tevékenységéről. 1958 októbere óta 10 könyv jelent meg. Ebből 5 könyv hazai szerző munkája (4 matematikai és 1 fizikai könyv), a másik megjelent 5 könyv külföldi szerző munkájának a fordítása. A hazai szerzőktől megjelent munkák máris nagy hazai és külföldi keresletnek örvendenek. Több könyv magyar—külföldi kooperációban jelent meg. Örvendetes könyvkiadásunkban, hogy növekszik azon művek száma, amelyeknek szerzője hazai matematikus vagy fizikus. Az elkövetkező években az Osztály arra fog törekedni, hogy minél több hazai szerző munkájának megjelentetésére kerüljön sor és minél kevesebb legyen a külföldi szerzők munkájának magyarra való fordítása.

Az Osztály gondozásában továbbra is 4 folyóirat (Acta Mathematica, Acta Physica, III. Osztály Közleményei, Magyar Fizikai Folyóirat) jelenik meg. Megállapíthatjuk, hogy folyóirataink színvonalasak, és Actáinkat a külföldi szakkörök is egyre jobban megismerik. Örvendetes jelenség az is, hogy mind nagyobb számban publikálnak külföldi szerzők is folyóiratainkban.

Az elmúlt évben az osztály 7 alkalommal tartott felolvasó ülést, melyeken több matematikai és fizikai tárgyú előadás hangzott el, és számos dolgozat került bemutatásra. A rendszeresen megtartott felolvasó üléseken kívül az elmúlt év szeptemberében az Osztály az Országos Béketanáccsal közösen Joliot Curie emlékülést rendezett.

Az Osztály tudományos felügyelete alatt működő Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat az Osztály támogatásával több kollokviumot rendezett. Az elmúlt évben 4 matematikai (biometriai, csoportelméleti, sorelméleti, gráfelméleti) kollokvium megrendezésére került sor. E rendezvényeken összesen 38 külföldi matematikus vett részt.

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat kiemelkedő rendezvénye volt a szilárdtestek fizikájával foglalkozó kollokvium, amelyet az NDK Fizikai Társulatával közösen rendezett meg. E kollokviumon mintegy 120 külföldi fizikus vett részt baráti és tőkés országokból egyaránt.

A két társulat közös rendezvénye volt az ez év januárjában tartott valószínűségszámítási és matematikai statisztikai módszerek alkalmazása a fizikában tárgykörű kollokvium. E kollokvium munkája is sikeres volt.

Mind a matematikai, mind a fizikai kollokviumok munkája hasznosnak bizonyult, mert a kollokviumokon résztvevő kutatók nemcsak önálló eredményeikről számolhattak be, hanem a munkájuk közben felmerült problémákat is megvitathatták a kollokviumok keretében.

Az Akadémia a Bolyai János Matematikai Társulattal közösen ez év augusztus 24—31-ig rendezi meg a II. Magyar Matematikai Kongresszust. A kongresszus előkészítése már megindult, és a kongresszus iránt mind a belföldi, mind a külföldi matematikusok és a matematika alkalmazásait igénylők körében nagy érdeklődés nyilvánult meg.

A legutóbbi nagygyűlés óta összesen 19 disszertáció megvédésére került sor (2 matematikai doktori, 7 matematikai kandidátusi, 3 fizikai doktori, 7 fizikai kandidátusi disszertáció). A legutóbbi aspiránsfelvételek során összesen 15 rendes, levelező és önálló aspiráns nyert felvételt. Az aspiránsfelvételek során a kitűzött cél az volt, hogy népi demokráciánkhoz hű, szakmailag kiváló személyek nyerjenek felvételt. A tudományos fokozat odaítélése mind erkölcsi, mind anyagi megbecsülést jelent. Éppen ezért szükséges, hogy a jövőben a disszertációkkal szemben szigorúbb követelményeket támasszunk és jogos az a követelmény is, hogy a tudományos fokozatot nyert kutatók nemcsak szűk szakmájuknak művelőjévé váljanak, hanem tevékenyen közreműködjenek a tudománypolitikai kérdések megoldásában is.

Az elmúlt évben jelentősen kiszélesedett és eredményesebbé vált a nemzetközi kapcsolat is. E tényt bizonyítják a következő számadatok is: a Szovjetunióval és a baráti országokkal kötött kulturális egyezmény keretében, továbbá az osztály devizakeretéből 79 kutató vett részt külföldi rendezvényen vagy külföldi tanulmányúton. (Ebből fizikus 33 fő, matematikus 43 fő, csillagász 3 fő). (Az OAB további 18 fizikust utaztatott külföldre.)

Ugyanakkor az Akadémia jelentős segítséget nyújtott azon kutatók számára, akik vagy önköltségen, vagy külföldi intézmény költségén utaztak külföldre. Az elmúlt évben hazánkban 24 külföldi (11 matematikus, 10 fizikus, 3 csillagász) tudós, ill. kutató járt. (További 38 külföldi matematikus vett részt a társulati kollokviumokon és 120 fizikus a szilárdtestfizikai kollokviumon.) Az elmúlt évben már lényegesen nagyobb számban utazhattak külföldre fiatal kutatók is.

Eredményes volt az együttműködés intézeteink és hasonló jellegű külföldi kutatóintézetek között. Ezek az együttműködések nemcsak a könyv- és folyóiratcserében nyilvánultak meg, hanem közös kutatómunkában is. Elsősorban a matematikai logikai és matematikai gépek elmélete terén végzett vizsgálatokban, a valószínűségszámítás és a matematikai statisztikai vizsgálatokban, a kozmikus sugárzási, a magfizikai kutatásokban, a változócsillagok vizsgálatában voltak igen gyümölcsözőek ezek az együttműködések.

Az osztályvezetőség beszámolóját a jövő feladataival szeretném befejezni. Leglényegesebb feladatnak tartjuk a II. ötéves népgazdasági tervhez tartozó perspektivikus tudományos terv kidolgozását és annak megvalósítását. A perspektivikus tudományos terv kidolgozása már előkészületben van, és részletes kidolgozásához az Osztály tudományterületein megfelelő szakemberekből álló bizottságot kívánunk létrehozni.

Fontos feladatnak tartjuk az akadémiai intézetek és az egyetemeken megalakítandó kutatócsoportok további eredményes munkájának biztosítását minden vonatkozásban, és a tudományos káderutánpótlás tervszerűbbé tételét. Célszerű továbbá a könyv- és folyóiratkiadás, a nemzetközi kapcsolataink további fejlesztése. E feladatok megvalósításához kérjük az Osztály tudományterületein működő valamennyi kutató lelkes és aktív közreműködését.

A HOLDFELÜLET KIALAKULÁSÁRÓL
(ZERINVÁRY SZILÁRD EMLÉKÉRE)

Írta: MOHÁCSI BÉLA

A gyorsan kihűlő holdanyagból az oldott gázok forrásszerűen távoztak el. A felszabaduló gázok egy része óriási buborékok alakjában a felszínre került, és létrehozta a jellegzetes gyűrűshegyeket, bizonyos körülmények között a sugárrendszert is. A Hold anyagának egy részén, annak eltérő tulajdonsága miatt, a feltörő buborékok nem hagytak nyomot. Így keletkeztek a síkságok.

Bevezetés

A Hold felszínének alakzatait a következőképpen csoportosítják:

1. A tengerek. Mélyebben fekvő, általában kör alakú vidékek. Környezetüknél sötétebbek. Szintjük aránylag egyenletes, krátereket csak elvétve találunk rajta. Kiáradt lávaárnak vagy porral megtöltött medencéknek vélik.

2. A kráterek a holdfelszín legjellegzetesebb alakzatai. Átmérőjük elérheti a 200 km-t is. A kráterek keletkezésével foglalkozó elméleteket két csoportra oszthatjuk aszerint, hogy azok eredetét belső vagy külső eredetű okokkal akarják megmagyarázni. A vulkanikus tevékenységre vezető magyarázat Galilei-ig nyúlik vissza, utána Nasmyth, Carpenter, Pickering és mások követték ezt az utat. A vulkanikus elmélet azonban már a múlt század közepén nem volt meggyőző. A kráterképződést kozmikus eredetű okokkal igyekeztek megmagyarázni. Procotor a Holdra zuhant meteorokban talált magyarázatot. Később Wegener is erre az álláspontra helyezkedett. Legutóbb Hoyle dolgozta fel ezt az elméletet. Több kutató igyekezett a jellegzetes alakú krátereket porábrákkal, homokba csepegtetett vízcseppekkel megmagyarázni. Az utóbbi időben a meteor becsapódási elméletek kerültek az előtérbe. Amikor legutóbb Alter megfigyelése alapján Kozirev és Wilkins az Alphonsus kráterben bebizonyították a belső kitörést, megint felvetődött a holdkráterek vulkanikus eredetének a lehetősége.

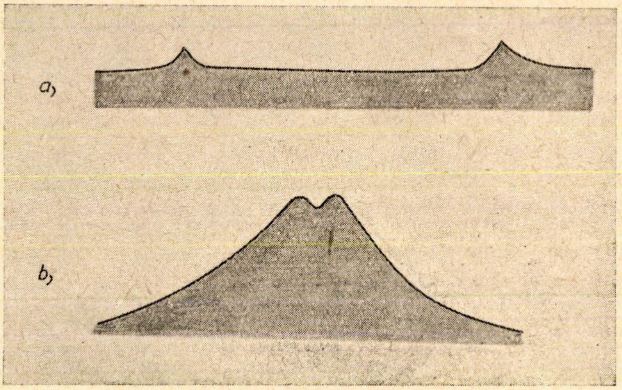
3. A sugaras szerkezet. Egyes kráterekből sugárzódnak szét, hosszuk több ezer kilométer is lehet, magasságuk néhány méter. Minden más felszíni képződményen áthatolnak. Fejlett sugárrendszere van a Tycho, Kepler és Kopernikus krátereknek. Hoyle szerint ezek a később becsapódott meteorok által összenyomott és felrobbant gáznak a nyomai.

4. A lánchegységek meredek összefüggő toronyszerű képződmények sorozatai, magasságuk eléri a 8—9 km-t is.

5. Rianások. A Holdat keresztül-kasul szelő szakadékok, hosszuk több ezer kilométer is lehet.

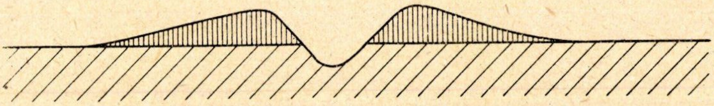
A kráterek vulkanikus eredete

A kráterek eredetének okát a Holdban keressük. Legkézenfekvőbb magyarázat GALILEIé, aki a krátereket vulkanikus tevékenység eredményének vélte. SCROPES szerint [1] vulkanikus tevékenységről beszélünk akkor, ha egy kihűlő égitest nyílásaiból szilárd, folyékony vagy gáznemű anyag tör fel. A területi és hasadékos kitörések a kráterképződés szempontjából nem jöhetnek tekintetbe. A csatornás kitörések, melyek nagy mennyiségű lávát, törmeléket meg



1. ábra. a) Holdkráter, *b)* Földi vulkánkúp metszete

gázt hoznak a felszínre, és megteremtik a jellegzetes vulkáni kúpot, már több figyelmet érdemelnek. Azonban a földi vulkánkúpoknál a hegy tömegének a kráter átmérőjéhez viszonyított aránya nagy érték, a holdkrátereknél ugyanez az érték kicsi (1. ábra). Ha elfogadjuk azt a józan kijelentést, hogy a kráteren keresztül tör fel az égitest belső anyaga, akkor nyilvánvaló: a Hold belsejéből olyan anyag került a felszínre, amely a nagy kráter ellenére is kis kép-



2. ábra. Gázkitörés eredményeként létrejött földi maar képződmény

ződményt hozott létre. A Földön is találunk olyan vulkáni képződményeket, melyek a kráterhez képest szegényes tömegű körsánccal rendelkeznek (2. ábra). Németországban maar-nak nevezik ezeket a tavakkal kitöltött képződményeket, melyek a Sváb Alpok területén, Skóciában, Mexikóban és Japánban is előfordulnak. Ezeket gázkitörés hozta létre. Valószínű, hogy a Hold jellegzetes kráterein is csak gáz törhetett fel, mert csupán ez a folyamat hozhatott létre olyan kis formaváltozást.

NASMYTH a kráterek keletkezését csatornás gázkitöréssel magyarázta meg. Ez indokolja, de nem eléggé, azt a tényt, hogy a gyűrűshegyek miért rendelkeznek viszonylag kis tömeggel. SCHINDLER 1911-ben kiadott munkájában [2] a holdkrátereket elpattant hólyagoknak vélte. Meggyőződésének igazolására nedves deszkára megömlesztett betűfémet öntött. A keletkezett gőzök hólyagokat húztak a fémolvadék felületére. Az elpukkanás után visszamaradó nyomok a fényképek tanúsága szerint olyanok, mint a holdkráterek. Ennek ellenére SCHINDLER gondolata mind ez ideig nem kapta meg a megérdemelt megbecsülést. A következőkben megkíséreljük a holdkráterek keletkezését a Hold felszínére bugyogó óriási elpattant buborékok alapján megmagyarázni.

Ismeretes, hogy a fémolvadékok lehűlésekor az oldott gázok a felszínre törő buborékok alakjában eltávoznak. Ha a gáznak nincs ideje eltávozni, akkor az öntvény belsejében lyukakat képez. Nyomás alatti kristályosodáskor az öntvényben nem képződnek pórusok [3]. A földi eredetű láva a fémolvadékokhoz hasonlóan jelentős mennyiségű gázt tartalmaz feloldva, amelynek nagy része lehűléskor eltávozik. Ha a kihűlés gyors, a megszilárduló láva hólyagos lesz (7. kép).

A Hold fajsúlya arra enged következtetni, hogy anyaga a földi magmához hasonló anyagból állott. A magma gázzal átitatott szilikát összetételű olvadék [4]. Izzónfolyós állapotból a Hold olyan gyorsan hűlt ki, hogy az olvadékban levő gázok nem tudtak párolgás és belső diffúzió útján eltávozni, hanem a kihűlő magmában gázbuborékok keletkeztek. A gyors lehűlés oka a Hold kis térfogata, a felszabaduló és eltávozó gázok hőlekötése volt. A lehűlt olvadék instabil állapotban tartalmazta a gázokat feloldva. A felszín közelében, ahol a hidrosztatikus nyomás ezt nem gátolta meg, az olvadékban levő idegen zárványokon megindult a gázkiválás. Nagy mélységben az ott uralkodó nyomás miatt ez a folyamat nem mehetett végbe. Itt a buborékképződést esetleg a Holdba zuhant (és 100—200 km mélységre lehatolt) meteorok által odajuttatott kis buborékok indíthatták meg.

A lejutott buborék a ráható felhajtóerő miatt felfelé törekedett. Növekedését két tényező idézte elő: a hidrosztatikus nyomás csökkenése és az olvadékból kiváló gázmennyiség. z_0 mélységből a felszínre kerülő buborékban levő gázmennyiség tömege legyen m. Ekkor a BOYLE—MARIOTTE törvény alapján a p nyomású gázbuborék térfogata

$$V=\frac{m}{p}\frac{RT}{M}, \tag{1}$$

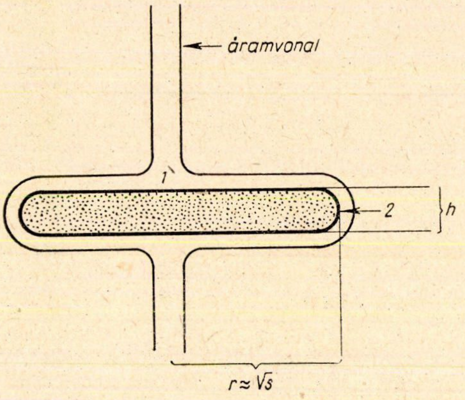
ahol R az egyetemes gázállandó, T a gáz hőmérséklete Kelvin fokokban, M

pedig a gáz molsúlya. Mivel a buborék alsó pontjában a hidrosztatikus nyomás nagyobb, mint az oldalsó pontokban, a buborék ennek következtében szétlapulni igyekszik. Ezt a felülről ható torlónyomás még jobban elősegíti. A szétlapulásnak az olvadék σ felületi feszültsége szab határt. A felszín közelébe érkező nagy buborékot durva közelítésként tekintsük korong alakúnak s alapterülettel és h magassággal (3. ábra). A buborék körül kialakuló áramlást olyannak vesszük, amely közelítésképpen mind stacionárius, mind turbulens áramlásnak felfogható. A buborékra ható nyomáskülönbség az 1- és 2-es pontok között BERNOULLI törvénye alapján* (az áramlást stacionáriusnak véve)

$$\Delta p = \frac{1}{2}\varrho v'^2 + \varrho g \frac{h}{2}. \tag{2}$$

ϱ a közeg sűrűsége, v' a közeg buborékhoz viszonyított relatív sebessége a 2-es pontban, g a nehézségi gyorsulás. Mivel a buborék nagyon lapos, a 2-es pontban a v' jóval nagyobb lesz a buborék v emelkedési sebességénél. A 3. ábráról leolvasható, hogy a két sebesség aránya közelítésképpen

$$\frac{v'}{v} = \frac{2\sqrt{s}}{h}. \tag{3}$$



3. ábra. A nagy buborék alakját h magasságú és s alapterületű korong alakkal közelítjük meg

A buborékalak egyensúlyának feltétele az, hogy a virtuális munka nulla:

$$\Delta p s \delta h - \sigma \delta s = 0,$$

amiből

$$\frac{\delta s}{\delta h} = -\frac{\Delta p s}{\sigma}.$$

Másrészt $s = V/h$-ból V állandó érték mellett (a felszín közelében V-t állandónak tekinthetjük, mert innen a gázok nagy része már eltávozott és így nincs tömegfelvétel, a hidrosztatikus nyomásváltozást pedig elhanyagoljuk a torlónyomás mellett)

$$\frac{ds}{dh} = -\frac{V}{h^2},$$

* Az 1-es pontban a sebesség nulla

és így

$$\sigma = h \Delta p.$$

(2)-t és (3)-at figyelembe véve

$$(4) \qquad \sigma = h\left(\frac{1}{2}\varrho\frac{4s}{h^2}v^2 + \frac{1}{2}\varrho g h\right).$$

A buborékra ható felhajtóerőt a ráható ellenállási erővel tesszük egyenlővé [5]. Az áramlást itt turbulensnek vesszük. A négyzetes ellenállási törvény alkalmazása célszerű, mert az örvények keletkezéséből származó ellenállás a *Stokes*-féle ellenállást sokszorosan felülmúlja.

$$(5) \qquad sh\varrho = cs\frac{1}{2}\varrho v^2.$$

A c ellenállási együtthatónak az értéke csak olyan buborékokra lenne kicsi, melyek nem hagynak maguk után örvényeket. A korong alakja nem ilyen. Nitrobenzolban áramoltatott nagy buborékok esetén $c = 1{,}25$ volt, mi $c = 1$ értékkel számolunk.

A buborékot a környező anyag felületi feszültsége tartja össze. Az áramló közeg magával ragadja a buborékban levő gáz részecskéit úgy, hogy a ϱ' sűrűségű gáz felgyorsul a buborék v emelkedési sebességére. A buborék akkor esik szét, ha a pulzációkból eredő nyomás meghaladja a görbületi nyomást [6]. Ha tehát bekövetkezik az, hogy

$$\frac{1}{2}\varrho' v^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{s}},$$

akkor a buborék szétesik. A buborék nagymértékű lapossága miatt a 2-es pontban a közeg v' sebessége jóval nagyobb a buborék emelkedési sebességénél, ezért (3)-mal a buborék szétesésének feltétele

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\varrho'\frac{4s}{h^2}v^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{s}}.$$

Hátra van még az (1)-ben szereplő m meghatározása. A felfelé áramló buborék közelítőleg annyi olvadékkal érintkezett, amennyi az s alapterületű és z_0 mélységű kúpban van. Ha a buborék közelében eláramló magma 1 köbcentiméteréből δ cm^3 ϱ' sűrűségű gáz válik ki, akkor

$$(7) \qquad m = \frac{1}{3}sz_0\delta\varrho'.$$

Az olvadékban oldott gázok mennyisége a hőmérséklet növekedésével erősen nő [3]. Tehát ha lehetőség van a gáz kiválására, akkor δ a lehűléssel csökken. Ha a gázok kiválására nincs lehetőség (pl. a Hold belsejében, ahol nagy a nyomás és nincs gázfázis), akkor a hőmérséklet csökkenésével a kiválható gázmennyiség növekedik. Így idővel a Hold bármely pontjában, vagy egy adott időpontban a mélység változásával — mindkettő hőmérsékletváltozással jár — δ csökkenhet vagy növekedhet (természetesen egy korláton belül). A tárgyalás kvalitatív jellege nem engedi meg, hogy δ-nak a mélységtől, az időtől és a túlhűtöttségétől való függését meghatározhassuk.

Ismeretes, hogy a földi eredetű láva jelentős mennyiségű gázt (NH_3, Cl, HCl, SO_2, CO_2, CO, H_2O stb.) tartalmaz elnyelve, aminek egy része kihűléskor eltávozik, más része a kőzetben marad. Figyelemre méltó az a törvényszerűség, amely szerint a földi vulkanikus eredetű kőzetek gáztartalma függ a geológiai koruktól. F. v. WOLF szerint [7] az újkeletű láva gáztartalma kevés, 0,6 cm^3 jut a kőzet egy köbcentiméterére. A harmadkori láva már annyi gázt tartalmaz, amely térfogatának 1,98-szerese. A prekambriumból származó eruptív kőzeteknél ez az érték 5,31, az archaikumból származó kőzeteknél 11,89. Ez azt mutatja, hogy idővel a magma gáztartalma csökkent. A kőzetbe zárt gáztartartalom nyilván alsó korlátja a magma gáztartalmának. Archaikumban tehát a magma gáztartalmának nagyobbnak kellett lenni cm^3-ként mint 10 cm^3. Megengedhető ez a feltevés a Hold izzónfolyós állapotára is, annál is inkább, mert fajsúlyát tekintve, az hasonló a földi eruptív kőzetek fajsúlyához. A Holdra nézve a $\delta = 10\,cm^3$ normál állapotú gázt fogadjuk el.

Tekintetbe véve azt, hogy $V = s \cdot h$, az (1), (4)—(7) egyenletekből $\sqrt{s} \approx r$-re a

$$(\sqrt{s})^3 - \frac{\delta R T}{3 g M} \frac{z_0}{z} (\sqrt{s})^2 - \frac{1}{216} \frac{\varrho g}{\varrho'} \left(\frac{\delta \varrho' R T}{\varrho g M} \frac{z_0}{z} \right)^3 = 0 \tag{8}$$

egyenletet kapjuk, ha a felszín közelébe érő buborékban uralkodó és az (1)-ben szereplő p nyomást egy z mélységben uralkodó sztatikus nyomással teszszük egyenlővé, vagyis, ha $p = \varrho \cdot g \cdot z$ (a Hold anyagát közelítésképp összenyomhatatlan folyadéknak vesszük).

Legyen $z = 10$ km. Ekkora mélységnek megfelelő sztatikus nyomásnál a buborék a felszínt már 10 km-nél jobban megközelítette a torlónyomás létezése miatt, tehát a buborék gyakorlatilag a felszínre ért. ϱ'-t a 10 km mélységű sztatikus nyomáshoz tartozó értéknek vesszük. Az egyesített gáztörvény alapján

$$\varrho' = \frac{pM}{RT} = 0{,}12 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3},$$

ha $p = \varrho \cdot g \cdot z$, $z = 10^6$ cm, $R = 8{,}3 \cdot 10^7$ erg fok^{-1}, a hőmérsékletet $T = 1{,}5 \cdot 10^3$ K°-nak, a gáz molsúlyának megfelelő értéket pedig $M = 30$ g-nak vesszük. Az itt felsorolt értékeket helyettesítjük be (8)-ba is. Továbbá a nehézségi gyorsulás $g = 1{,}6 \cdot 10^2$ cm sec^{-2}; $\varrho = 3\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$; a normál állapotú $\delta = 10$ cm^3-t át kell számítani $T = 1{,}5 \cdot 10^3$ K°-nak megfelelő, $p = \varrho \cdot g \cdot z$ nyomáshoz tartozó térfogattá az egyesített gáztörvény alapján:

$$\delta = \frac{V_0 p_0 T}{T_0 p} = \frac{10\,\mathrm{cm}^3 \cdot 10^6\,\mathrm{din} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{fok}}{273\,\mathrm{fok} \cdot 3\,\mathrm{g/cm}^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^2\,\mathrm{cm/sec}^2\, 10^6\,\mathrm{cm}} = 10^{-1}\,\mathrm{cm}^3.$$

A táblázat a különböző z_0 mélységek esetén megadja a (8) egyenlet numerikus megoldását $\sqrt{s} \approx r$-re.

z_0	$\sqrt{s} \approx r$
100 km	90,2 km
150 km	133 km
200 km	178 km

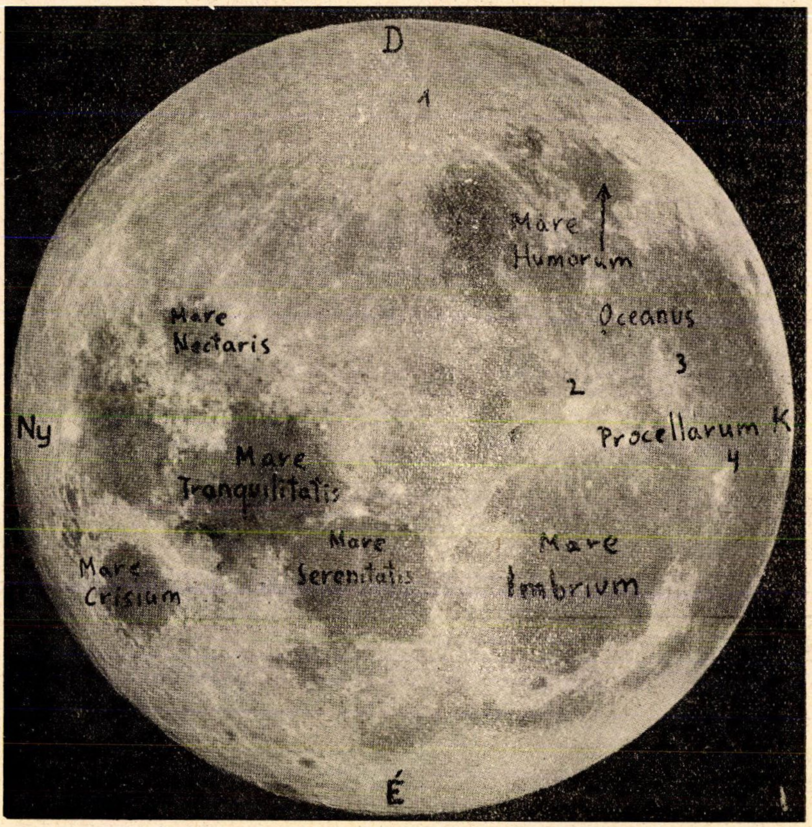
Ha 150 km mélységben keletkezett egy kis buborék, akkor a megadott állandókkal keletkező buborék sugara jó egyezésben van a GRIMALDI és CLAVIUS kráterek 237 és 230 km-es átmérőivel, mivel (6) alapján a legnagyobb térfogatú buborékot számítottuk ki.

Sem a buborék h magassága, sem v emelkedési sebessége nem függ a buborék r sugarától. $z_0 = 150$ km-nél $h = 5$ km és $v = 10\,\mathrm{m\,sec}^{-1}$ adódik. A holdanyag felületi feszültségére a $\sigma = 10^{15}$ din/cm értéket kapjuk. Ezt a szokatlanul nagy értéket csak a belső magmára nézve fogadjuk el, és itt azzal magyarázhatjuk meg, hogy a lehűlés és a nagy nyomás miatt közelkerülő részecskék közötti kohéziós erők megnövekedtek. Másrészt a magma buborékot határoló felszíne a párolgás miatt jobban lehűlt, ami a buborék felületén feszültségnövekedést hozott létre. A Hold viszonylag normális körülmények között levő felszínén a felületi feszültség nem, vagy legalábbis nem sokkal haladhatta meg pl. a fémolvadékok 10^3 din cm nagyságrendű felületi feszültségét. Bár közvetlenül a megszilárdulás előtt ez jelentősen meg is változhatott.

A felszínt elérő buborék az olvadékon úszó már megszilárdult salakot az útjából félretolja és ebből alakul ki a jellegzetes kistömegű gyűrűshegy (4. ábra). A hegy tömege a korong alakú buborék felett levő kőzetből keletkezik, tehát közelítőleg

$$r^2 \pi d = 2 r \pi a \frac{m}{2},$$

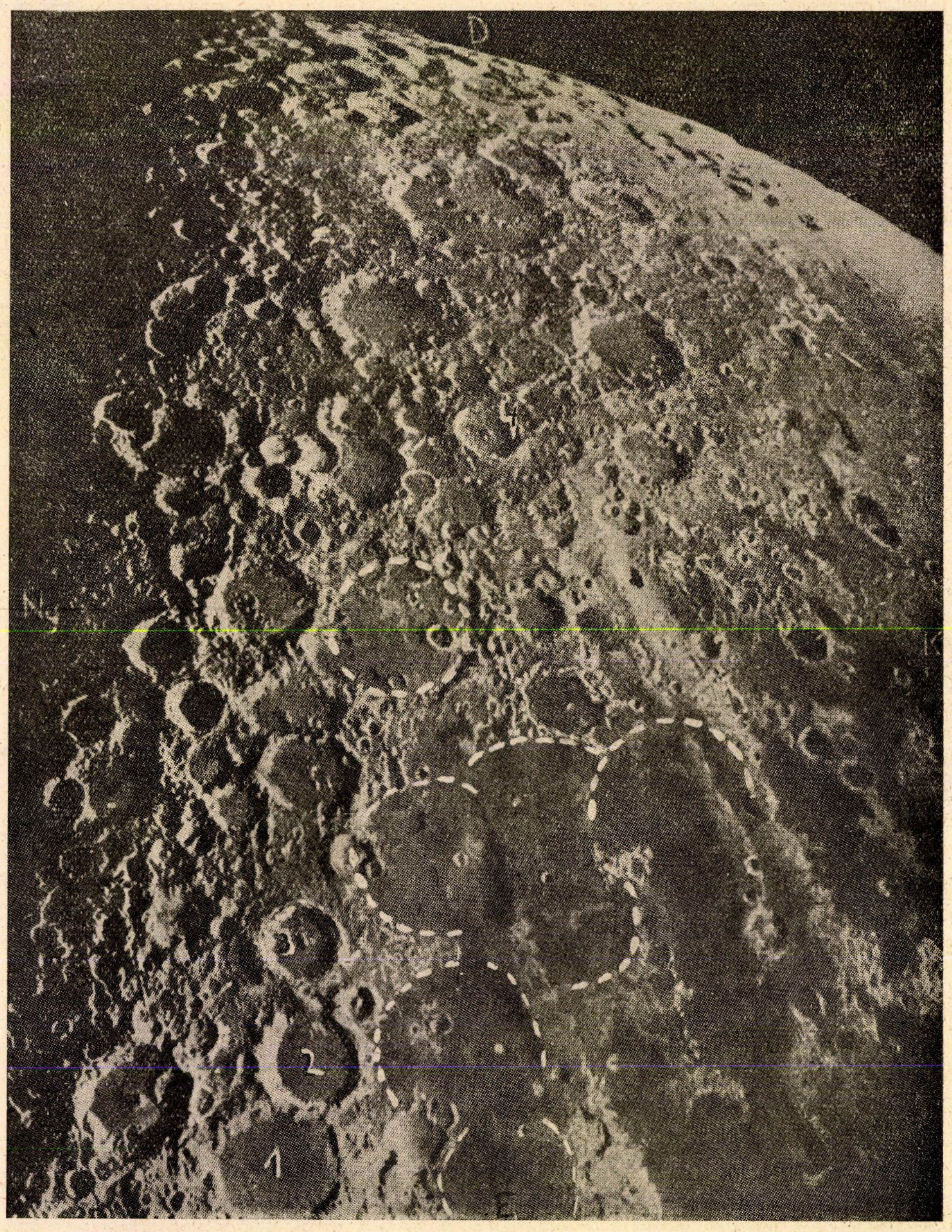
ahol r a korong sugara, d a szilárd kőzet vastagsága, a a gyűrűshegy alapjának szélessége, m a hegy magassága. Innen a hegy térfogatának megmérésével kiszámítható, hogy a krátert milyen vastagságú holdkéreg átszakításánál hozta létre a feltörő buborék. Ezek szerint az *Alphonsus* kráter akkor keletkezett, amikor a szilárd kőzet vastagsága $d = 2$ km volt. Hasonlóan vékony kérget kellett áttörni pl. az *Arsachel, Ptolemaios* (2. kép), *Platon, Cassini, Archimedes* (5. kép) krátereket létrehozó buborékoknak. A gyűrűshegy töme-



1. kép. 1. Tycho kráter, 2. Kopernikus kráter, 3. Kepler kráter, 4. Aristarchos kráter

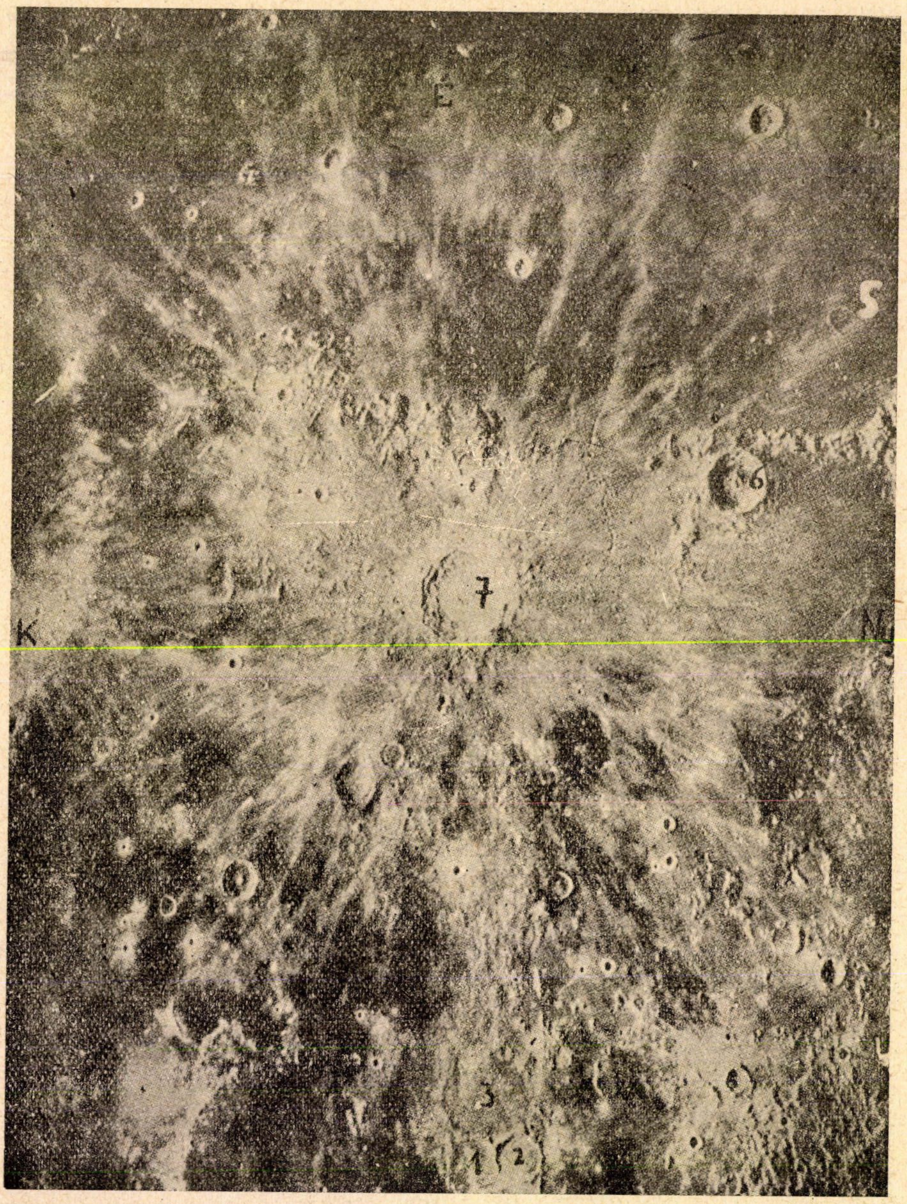
géből következtetve az *Antolycos* és *Eratosthenes* kráterek például vastagabb réteg átszakításakor keletkeztek (4. és 5. kép).

A gyűrűshegyek jelentős részére jellemző a középponti csúcs. Magyarázatul nézzük meg az Oceanographic Institution [8] által készített fényképsorozatot egy buborék felszínre éréséről folyadékban (6. kép). (A fényképek egyébként a kráter kialakulásáról is számot adnak.) A Holdon a felszínre ért és elpattant buborék térfogatát betölteni igyekvő olvadék a kráter közepén feltornyosulva megszilárdulhatott. Lehetséges az is, hogy a buborék szélén az olvadék gyors áramlása következtében, ahol a nyomás már kisebb, apró buborékok keletkezhettek, melyek már nem tudtak úgy megnőni. A felszínt később elérő kis buborékok a kráter lassan megszilárduló olvadékában vulkanikus jelenségeket hozhattak létre, amely a középponti csúcs kialakulásához vezethetett.

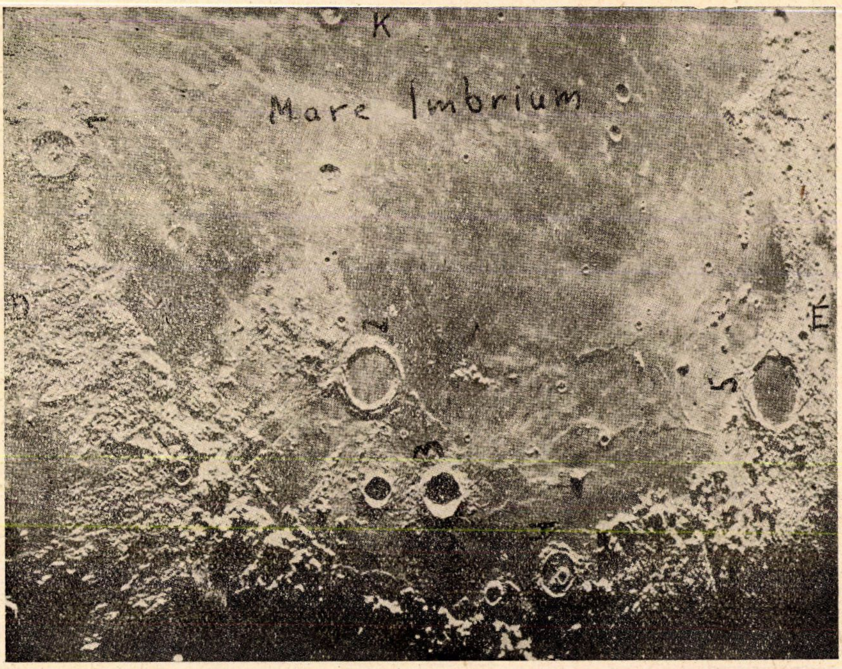


2. kép. 1. Ptolemaios kráter, 2. Alphonsus kráter, 3. Arsachel kráter, 4. Tycho kráter.
A szaggatott vonalak elmosódott kráterek

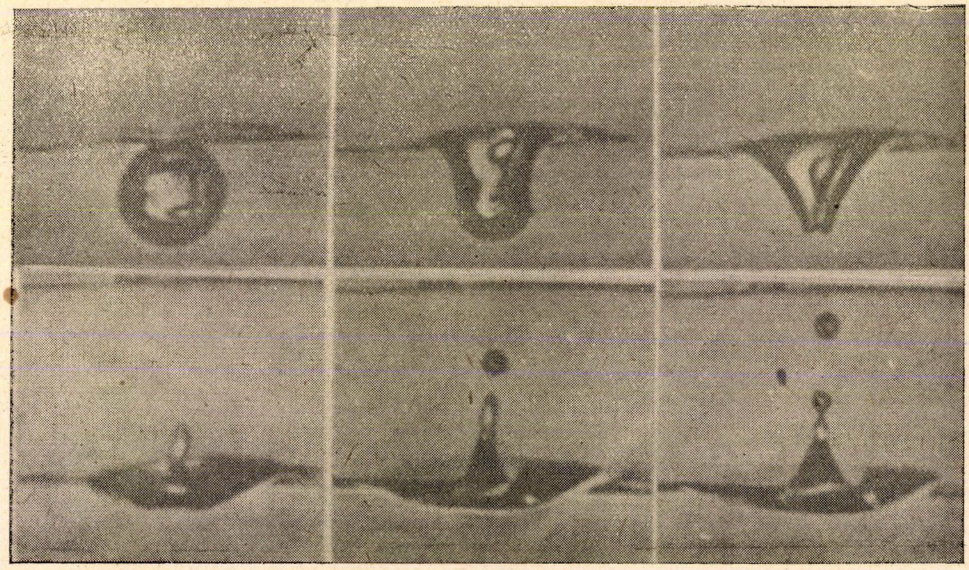
3. *kép.* Tycho kráter



4. kép. 1., 2., 3., 4., 5. elmosódott kráterek, 6. Eratosthenes kráter, 7. Kopernikus kráter



5. *kép.* 1. Eratosthenes, 2. Archimedes, 3. Antolycos, 4. Cassini, 5. Platon



6. *kép.* Vízben a felszínt elérő buborék kráteralakzatot hoz létre.
A kráter közepén a víz feltornyosul

7. kép. Hólyagos bazaltláva

A sugaras szerkezet

Egy nagy mélységben levő kis térfogatú buborék felfelé áramló sebessége (amint a *Stokes*-féle ellenállási törvényből és a felhajtóerőből következik)

$$v = \frac{2r^2 g \varrho}{9\eta}$$

r kis, és η nagy értéke miatt olyan kis érték is lehetett, hogy a buborék felszínre éréséig eltelt idő alatt a Hold kérgén már jelentős vastagságú kéreg keletkezhetett.

Egy bizonyos vastagságú kéregnél a kráterképződés másképpen következett be, mint ahogyan azt már előbb megmutattuk. A buborék, alakját megtartva nem bírja felemelni a vastag kérget, hanem ehhez érve elpattan (5. ábra). A buborékban levő gázzal eddig a hidrosztatikus és felülről a torló-, oldalról a görbületi nyomás tartott egyensúlyt.

Mivel a kéreghez érve a buborék megáll, a külső torlónyomás és az ennek megfelelő görbületi nyomás megszűnik. A külső nyomás ilyen csökkenésével a belső nyomás felszabadul. Ehhez járul még az is, hogy az elpattant buborékot a hidrosztatikus, illetve görbületi nyomás a kéreghez szorítja. A gáztömeg felrobban. A robbanás átszakítja a kérget és gyér tömegű körsánccal kialakul a kráteralakzat. A szétrepülő törmelék létrehozza a sugárrendszert. Mivel a Holdon nincs légellenállás, a robbanáskor felszabaduló gáz ezer kilométerre is elszállíthatja a könnyű, por alakú törmeléket. A vastagabb réteg átszakításából nyilvánvaló, hogy az ilyen kráterek utolsóknak keletkeztek. Ez megmagyarázza azt, hogy a robbanás következményeként kialakult sugárrendszer miért halad át minden felszíni képződményen. A *Tycho, Kepler, Kopernikus, Aristarchos* kráterek keletkezhettek például így (1., 2. és 4. kép). Ha a kéreg vastagsága, vagy a buborék kis térfogata miatt a gáz nem tud a felszínre törni, akkor a megszilárduló magmában gázzárvány keletkezik, aminek tartalma idővel pl. repedéseken keresztül a felszínre kerülhet. Lehet, hogy az *Alphonsus* kráterben észlelt jelenségnek ez a magyarázata.

Minden bizonnyal számos olyan kráter van, amely másfajta vulkanikus tevékenységnek, vagy éppen meteorok becsapódásának az eredménye.

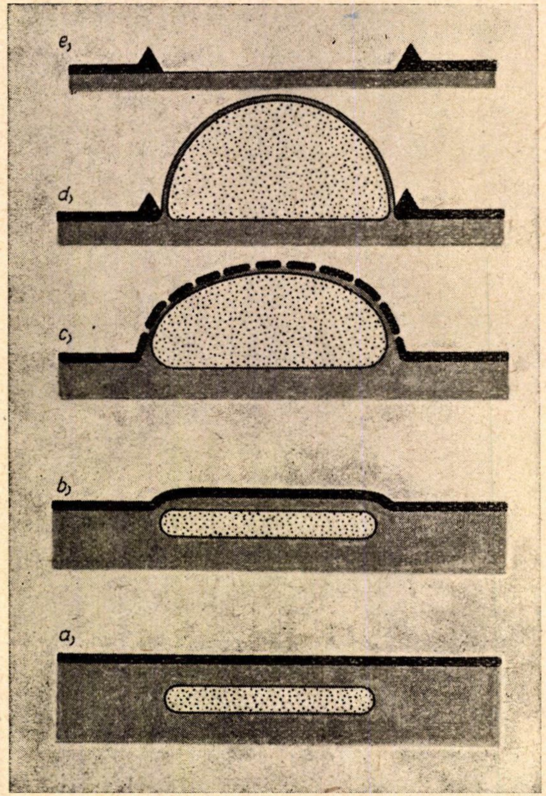
A tengerek

Ismeretes, hogy a földi vulkánokból a felszínre kerülő *bázisos* láva hígan folyós, gyorsan kihűlő, emiatt az elnyelt, gyorsan eltávozó gázok összetördelik, felfújják. A *savanyú* láva viszkózus, lassan hűl ki, a felszabaduló gázok ezért elávozhatnak belőle. Ha a kovasavtartalom nagy, akkor a láva savanyú, ha kisebb, akkor bázisos.

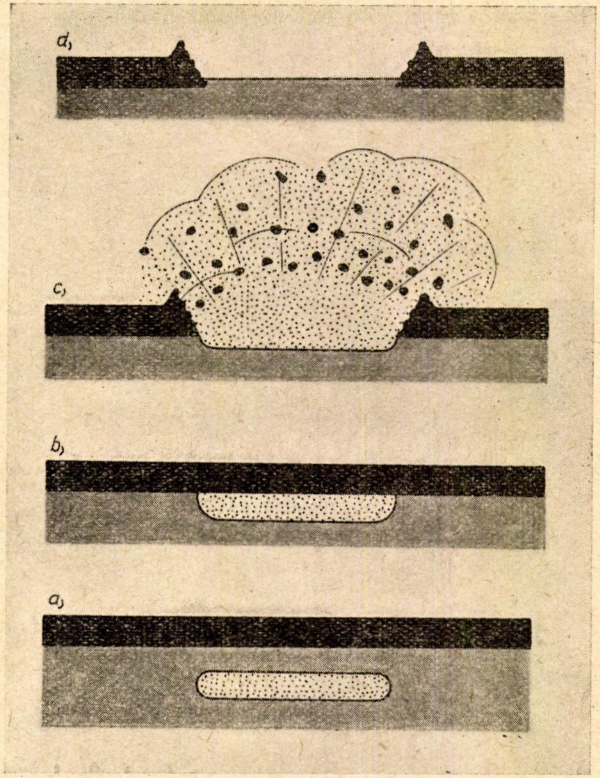
A földi eruptív eredetű bázisos és savanyú kőzetek egymáshoz viszonyított tulajdonságai a következők [9]:

	bázisos	savanyú
fajsúly	nehezebb	könnyebb
szín	sötétebb	világosabb
törőszilárdság	nagyobb	kisebb
hővezető képesség	nagyobb	kisebb

A Hold felszínének anyaga feltehetőleg hasonló tulajdonságú kőzetekből áll. A fajsúly és a hővezetőképesség fenti különbözőségét elfogadjuk cseppfolyós állapotra is. A törőszilárdságot a részecskék közötti kohéziós erők határozzák meg, tehát a savanyú kőzeteknél ez kisebb, mint a bázisosaknál. Megolvadt állapotban is feltehető a kohéziós erők ilyen különbsége, ami felületi feszültségük különbözőségén is tükröződik: a savanyú olvadékok felületi feszültsége kisebb, mint a bázisos olvadéké.



4. ábra. A felszínt elérő óriási buborék a vékony szilárd kérget útjából félretolja (ebből lesz a gyűrűshegy) és elpattan

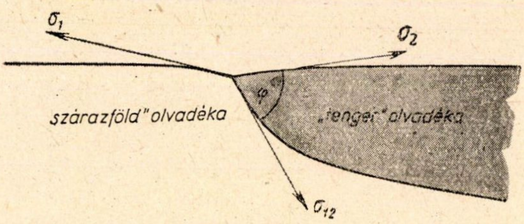


5. ábra. A vastagabb szilárd kérget a buborék nem tudja félretolni, a gáztömeg felrobban

Ha a bázisos olvadék felületi feszültsége σ_1, a savanyúé σ_2, a két olvadék érintkezési felületén pedig σ_{12}, akkor ezek kielégítik a *Young*-féle

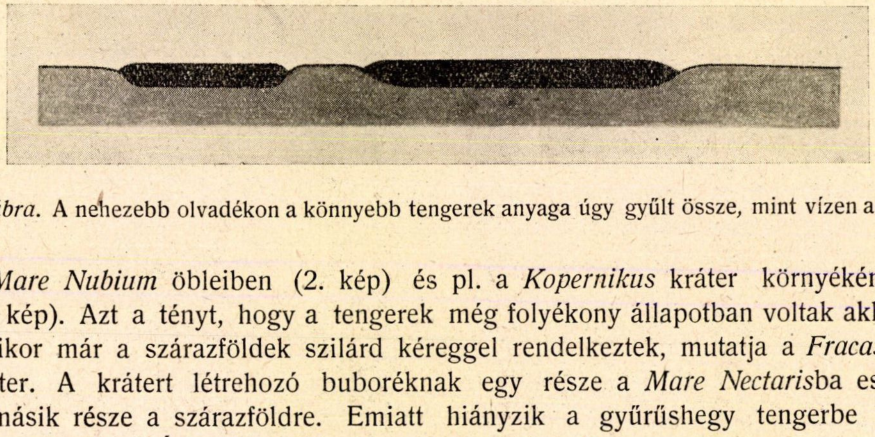
$$\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_{12} \cos \varphi$$

egyenletet, ha közelítésképpen a σ_1 és σ_2 által bezárt szöget 180°-nak vesszük. Mivel fentebb megjegyeztük, hogy $\sigma_1 > \sigma_2$, ezért $\varphi < 90°$ (6. ábra). A higanfolyós nehezebb olvadékon úgy gyűlt össze a könnyebb, savanyú olvadék, mint pl. vízben az olaj. Ezzel magyaráztuk a kialakult tengerek köralakját (1. kép). A tengerek vastagsága olvadt állapotban csak a felületi feszültségektől és a fajsúlyoktól függhet, de nem a kiterjedéstől (7. ábra). (A tengerek anyaga természetesen nem szükségszerűen ugyanazzal a kovasav tartalommal rendelkezett, így pl. vastagságuk is csak közelítésképpen vehető egyenlőnek.)



6. ábra. Egyensúly esetén a felületi feszültségek összege nulla

A majdani szárazföldek anyaga gyorsan hűlt ki, a felszabaduló buborékok a felszínt összetördelték. A 3. kép a Hold tengerektől háboritatlan, kráterektől feltördelt délnyugati részét mutatja. A kisebb hővezetőképesség miatt lassabban kihűlő tengerek még felszínük megszilárdulása előtt elvesztik gáztartalmuk jelentős részét úgy, hogy a keletkezett buborékok nem, vagy csak éppen kivehető nyomokat hagynak. Ilyen elmosódott nyomokat találunk

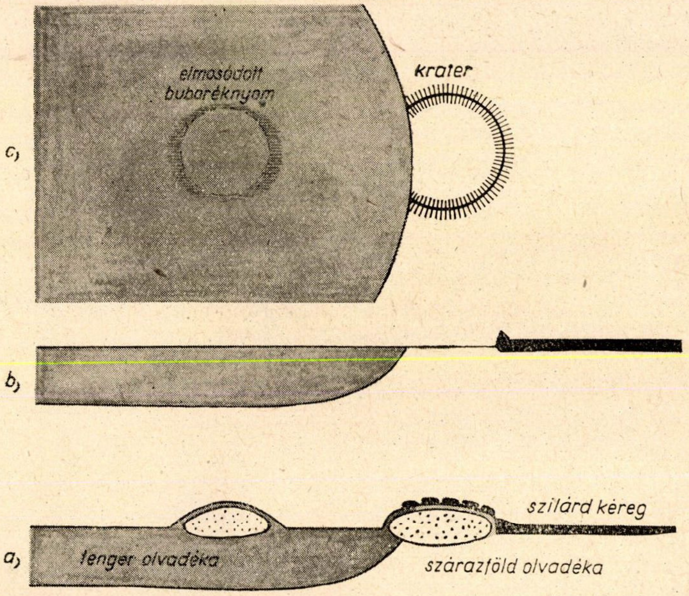


7. ábra. A nehezebb olvadékon a könnyebb tengerek anyaga úgy gyűlt össze, mint vízen a zsír

a *Mare Nubium* öbleiben (2. kép) és pl. a *Kopernikus* kráter környékén is (4. kép). Azt a tényt, hogy a tengerek még folyékony állapotban voltak akkor, amikor már a szárazföldek szilárd kéreggel rendelkeztek, mutatja a *Fracastor* kráter. A krátert létrehozó buboréknak egy része a *Mare Nectaris*ba esett, a másik része a szárazföldre. Emiatt hiányzik a gyűrűshegy tengerbe eső része (8. ábra). Így keletkezhetett a *Sinus Iridum* is.

A *Mare Nubium* nyugati öbleiben óriási buboréknyomokat találunk (2. kép). Ennek az lehet a magyarázata, hogy a tengert alulról megközelítő *V* térfogatú buborék (amely szárazföldön felbugyogva a többi kráterhez hasonló nagyságú képződményt hozott volna létre) a tengerek olvadékába érve (4) miatt ellaposodik, mert a tengerek felületi feszültsége kisebb. A buborék mégsem esett szét (6) miatt, mert a tenger nagyobb viszkozitása jelentősen csökkentette a buborék v sebességét.

Az olvadékból eltávozó gázok a szárazföldek anyagát fellazították, a tengerekét pedig nem. Ezért lettek a tengerek síkságok. A gyorsabban kihűlő

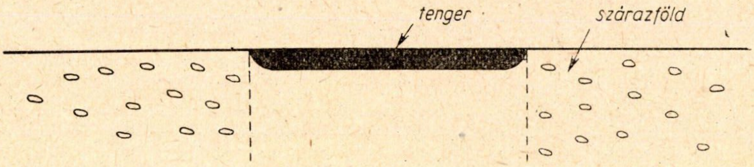


8. ábra. A tengerek a lassúbb lehűlés miatt még folyékonyak voltak, a szárazföldek anyaga pedig a gyors lehűlés miatt már szilárd kéreggel rendelkezett. Ha a buborék egy része a tengerbe esett, a másik része a szárazföld alá, akkor egyik részén nyitott gyűrűshegy keletkezett

szárazföldek anyagából nem tudott minden buborék eltávozni, ezért a megszilárduló olvadékban gázzárványok keletkeztek. Ezek a szárazföldek anyagának fajsúlyát jelentősen csökkentették. A rossz hővezetés miatt lassabban kihűlő tengerek megóvták az alattuk levő (a szárazföldek anyagával megegyező) olvadékot a gyors kihűléstől. Ezért a tengerekből és az alattuk levő nehezebb olvadékból a gázok eltávozhattak, gázzárványok kevésbé keletkeztek. Ebből következik, hogy a tengerek és az alatta levő kőzetek fajsúlya nehezebb lett a „szárazföldek" anyagánál. A tengerek alatt tehát egy henger alakú, összefüggő nehéz tömb alakult ki (9. ábra). A súlytöbblet miatt fellépő nyírás

$$f=\frac{P}{F}=\frac{r^2\pi m(\varrho_t-\varrho_{sz})g}{2r\pi m}=\frac{(\varrho_t-\varrho_{sz})g}{2}r,$$

azaz arányos a sugárral, ha r a tenger sugara, ϱ_t és ϱ_{sz} a tömb, illetve a szárazföld sűrűsége ($\varrho_t \gg \varrho_{sz}$), m pedig a szilárd kéreg vastagsága. Mivel a tömb süllyedése arányos a fellépő nyírással, ez pedig láttuk, hogy a tenger suga-



9. ábra. A tenger alatt nehéz, gázzárványoktól mentes tömb alakult ki

rával arányos, a következő törvényszerűséghez jutunk: a tengerek mélysége növekszik a sugárral. Ismeretes, hogy a nagyságrendben egymásután következő

Mare Imbrium	(átmérője 1150 km)
Mare Serenitatis	(átmérője 690 km)
Mare Foecunditatis	(átmérője 670 km)
Mare Crisium	(átmérője 510 km)
Mare Humorum	(átmérője 440 km)
Mare Nectaris	(átmérője 300 km)

tengerek mélysége ugyanilyen sorrendben csökken.

A szárazföldeket alkotó kőzetek jobb hővezetők a tengerek anyagához viszonyítva, ezért nagyobb hőingadozásoknak is voltak kitéve, különösen holdfogyatkozáskor. A gyors hőmérsékletváltozások a szárazföldek anyagát finomabban porlasztották el, mint a kisebb hővezetőképességű, tengereket alkotó kőzeteket, amelyekben a lassú hőingadozások kevésbé bontották meg a kőzet szerkezetét. A szárazföldek nagyobb fényvisszaverőképességét azzal magyarázzuk meg, hogy az anyag felaprózódásával nő a fényvisszaverő képessége. Ez a hatás megváltoztatja az anyag normális visszaverőképességét.

A láncheygységek

A megdermedő olvadékok általában kiterjednek. A később megszilárdult tömör felépítésű tengeranyag, a partjain elterülő gázzárványok miatt lazább szerkezetű szárazföldeket feltúrta. Így alakultak ki a jellegzetes, tengerek partvidékein elhelyezkedő lánchegységek: *Kárpátok*, *Appenninek*, *Haemus*. Nem szükségszerű, hogy a szárazföld feltorlódása éppen a tenger partján következzen be. Létrejöhet távolabb is, ott, ahol a szárazföld szilárdsági viszonyai ezt jobban megengedik. Természetes, hogy ebben az esetben is a hegylánc merőleges a feszültség irányára. Ilyen esetre példa a *Mare Nectaris*tól távolabbra eső *Altáj*. Valószínű, hogy a Lunyik által felfedezett *Moszkva*-hegylánc a felénk eső tengerek hatására hasonlóan keletkezhetett.

A rianások

Ismeretes, hogy a gyorsan kihűlő üvegszerű olvadékok megrepedeznek. A magma szilikáttartalmánál fogva bizonyos körülmények között üvegszerűen is megdermedhet. Ha a magma hirtelen hűl le, akkor benne nem képződnek kristályok, hanem az olvadék amorf kőzetüveggé dermed [10]. A magmában oldott gázok jelentősen csökkentik a viszkozitást [10]. Ezek eltávozásával tehát a magma részecskéi nehezebben rendeződhetnek kristályrácsba. Üveges módosulatok pl. az obszidián, a perlit, a szurokkő, a bazaltüveg.

Az olvadt állapotban levő szilikáttartalmú holdfelszín a hirtelen lehűlés és gázeltávozás miatt egyes földi kőzetekhez hasonlóan üvegszerűen dermedhetett meg. További kihűlés jelentős összehúzásokat eredményezhetett, aminek következtében rianások keletkezhettek.

IRODALOM

[1] P. Scropes: *On Volcans*, London, 1825.
[2] R. Schindler: *Die Mechanik des Mondes*, Luzern, 1911.
[3] D. P. Levcev: Litejnoje Proizvodsztvo, 1954. 5. 24.
[4] F. v. Wolf: *Die Eruptivgesteine*, Pössneck, 1951. (2. oldal)
[5] R. Davies—G. Taylor: Proc. Roy. Soc. **200**, (1950) 1062.
[6] V. G. Levics: *Fiz.-kém. hidrodinamika*, Budapest, 1958. (276. oldal)
[7] F. v. Wolf: *Der Vulkanismus I*, Stuttgart, 1914.
[8] A. H. Woodcock: *Scientific American*, **197**, (1957)
[9] Vendl A.: *Geológia*, Budapest, 1957.
[10] F. v. Wolf: *Die Eruptivgesteine*, 1951. (1. ill. 48. oldal)

(Beérkezett: 1959. III. 24)

Damjanich János Gimnázium
Nagykáta

A MATEMATIKA ALAPJAINAK EUKLIDÉSZI TERMINUSAI, I.

Irta: SZABÓ ÁRPÁD

Az a történeti probléma, *hogyan alakult ki a görögöknél a matematikának mint deduktív tudománynak a rendszere,* csak a közelmúltban lett igazán aktuális. Köszönhető pedig ez főként annak, hogy jobban megismertük a görögség előtti kultúrák matematikáját. Mint K. v. FRITZ írja: „A legutóbbi évtizedek felfedezései és kutatásai kimutatták, hogy a görögség előtti babilóni matematika sokkal fejlettebb volt, mint korábban gondolták. A babilóniak már kb. ezer évvel a görög matematika keletkezése *előtt* meg tudtak oldani viszonylag komplikált feladatokat — elég jó közelítéssel. Kiderült az is, hogy a görögök sokmindent éppen a babilóniaktól vettek át vagy tanultak."[1]

Nem csodálkozhatnánk éppen ezért azon sem, ha a rendszeres és deduktív görög matematika nem is volna egyéb, mint folytatása vagy továbbfejlesztése a régebbi, a görögség előtti matematikának. A különös éppen az, hogy mégis a történeti tények legjobb ismerői kellett megállapítsák: *„Sehol semmi nyoma sincs annak, hogy a babilóniak vagy egyiptomiak bármikor is megkísérelték volna a matematika rendszerének felépítését, a tételeknek szigorú logikával elvekből (princípiumokból) történő levezetését.*"[2]

Akadtak ugyan olyanok, akik azt a tényt, hogy a deduktív matematika ismeretének nyomai a görögség előtti kultúrákból *nem mutathatók ki,* igyekeztek puszta véletlennek minősíteni. Az a körülmény pl., hogy a babilóniak ismerték ugyan a Pythagoras-tételt, de nincs olyan babilóni szövegünk, amely ezt a tételt be is bizonyítaná, múlhatnék a véletlenen is;[3] egyszerűen arról

E dolgozat — az „Archive for History of Exact Sciences" c. folyóiratban (I, 1, 37—106) megjelent korábbi munkám („Anfänge des euklidischen Axiomensystems") továbbérlelt és újjáépített változata — nem azonos az eredeti német nyelvű cikkel, bár a tárgy természeténél fogva helyenként megismételem régebbi megállapításaimat.

1 K. v. FRITZ, Die APXAI in der griechischen Mathematik, *Archiv f. Begriffsgeschichte* (herausg. E. ROTHACKER) I, Bonn 1955. Vö. O. NEUGEBAUER, Zur geom. Algebra, *Quell. u. Studien zur Gesch. d. Math.* etc. B 3 (1936) 245 kk. és B. L. v. d. WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft,* Basel—Stuttgart 1956.

2 K. v. FRITZ uo. 13—14.

3 H. GERICKE írja a babilóniak „Pythagoras-tételével" kapcsolatban: „Dass wir keinen babylonischen Beweis dafür kennen, kann daran liegen, dass wir einen solchen Text *zufäl-*

lenne csak szó, hogy ilyen természetű feljegyzést nem találtak még az archeológusok, de semmi akadálya sem volna annak, hogy ehhez hasonló szövegek később előkerüljenek majd. — Bár ez a feltevés végérvényesen sohasem lesz cáfolható — hiszen előreláthatóan *sohasem* leszünk abban a helyzetben, hogy elmondhassuk: birtokunkban van immár *minden* adat az ókori kultúrákról, újabb dokumentum pedig „nem is kerülhet már elő" —, mégis állapítsuk meg: jelenlegi tudásunk alapján nem indokolt arra várni, hogy újabb, ma még ismeretlen dokumentumok igazolják majd a deduktív matematikának a meglétét már a görögség előtt. Éppen ellenkezőleg! Ha elfogulatlanul vizsgáljuk az ismert tényeket, be kell látnunk: *„Mindaz, amit az ókori Kelet görögség előtti népeinek matematikájáról tudunk, arra vall: nem valószínű, sőt aligha lehetséges, hogy már a görögök előtt lett volna rendszeres matematikai tudomány."*[4]

Úgy látszik tehát: a rendszeres, deduktív matematikát a görögök teremtették meg. Lássuk mármost: hogyan magyarázták eddig ennek a tudománynak a létrejöttét?

1. Egyesek abban látták a probléma megoldását, hogy emlékeztettek az ókori görögség társadalmi viszonyaira, különösen pedig annak a kornak a társadalmi rendszerére, amely feltehetően a deduktív matematika kialakulásának az ideje volt. E magyarázat szerint a kifogástalan matematikai bizonyítások igénye arra vezethető vissza, hogy a görög demokrácia érvényesítette a vélemény- és szólásszabadságot; ezért szokhattak hozzá a szembenálló felek — mind a politikai életben, mind pedig a bíráskodásban ahhoz, hogy igazukért *érvekkel* harcoljanak. A mindennapi élet érveléseiből, bizonyításaiból fejlődött volna ki — e szerint a magyarázat szerint — egy magasabb fokon a matematikai bizonyítás gyakorlata.[5]

2. Mások azzal magyarázták a matematikai tételek és bizonyítások hirtelen megjelenését a görögöknél, hogy utaltak arra: az a régebbi keleti hagyomány, amelyet a görögök átvettek, nem volt mindig egységes. A babilóniak pl. ismertek egy „formulát" a kör területének a kiszámítására: $3r^2$; az egyip-

lig noch nicht gefunden haben oder daran, dass derartiges nur mündlich überliefert wurde, oder schliesslich vielleicht auch daran, dass *den Babyloniern noch nicht klar zum Bewusstsein gekommen war, was ein Satz und ein Beweis ist"* (Gymnasium, *Zeitschr. f. Kultur der Antike u. human. Bildung*, F. Bömer—L. Voit 67, (1960) 126.) — Legvalószínűbb e három feltevés közül természetesen az utolsó.

[4] K. v. Fritz, i. m. 14. Vö. O. Becker, *Grundlagen der Math.*, Freiburg—München 1954, 22 és O. Becker, Frühgriech. Mathematik und Musiklehre *(Archiv f. Musikwissenschaft* 14, Trossingen 1957, 157).

[5] Lásd erre vonatkozóan „Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá?" c. dolgozatomat: *Matematikai Lapok* VIII (1957) 8—36 és 232—247.

tomiak ugyanerre a célra más „formulát" használtak: $\left(\frac{8}{9}\cdot 2r\right)^2$. Ez a két egymástól eltérő „recept" ugyanannak a mértani feladatnak a megoldására jól illusztrálhatja egyszersmind azt is: milyen problémák merülhettek fel a görögökben akkor, amikor észrevették a keleti hagyományban jelentkező kisebb-nagyobb különbségeket. Dönteniök kellett ugyanis: melyik a *jobb* a két „recept" közül. S éppen ennek a döntésnek, választásnak a szükségszerűsége vezette volna el őket az egzakt, deduktív tudomány megalkotásához.[6] Ez az utóbbi magyarázat tehát a matematikának azt a lényeges átalakulását, amely azáltal következett be, hogy a régebben csupán praktikus-empírikus ismeretek igazi tudományos rendszerré kristályosodtak, olyan igényekre vezeti vissza, amelyek szinte magának a matematikának a természetéből adódtak. A matematika mint tudomány önmagából teremtette volna meg igazi és végérvényes formáját.[7] — Úgy látszik, volt ennek az elgondolásnak már több különböző változata is.[8]

3. Külön csoportba tartoznak azok a magyarázó kísérletek, amelyek a filozófiára akarták visszavezetni a deduktív matematika eredetét. Elég hosszú időn keresztül emlegették pl. a matematika ún. „platóni reformját", mondván, hogy ez előtt a reform előtt a matematika *empírikus* tudás volt, és csak utána alakult volna át *elméleti* tudománnyá.[9] Más szóval ez azt jelenti, hogy e szerint az elképzelés szerint a rendszeres, deduktív matematika létrejötte tulajdonképpen a platóni filozófia érdeme volna. — Ezt a felfogást az utóbbi időben felváltotta — szinte észrevétlenül — egy másik, vele csak rokon elképzelés. A „platóni reform" helyett ugyanis azt kezdték hangoztatni, mintha ARISTOTELÉSnek lettek volna elévülhetetlen érdemei az elméleti matematika megalapozása terén.[10]

A magyarázó kísérleteknek ebbe a legutóbb említett csoportjába tartozik saját elméletem is a deduktív matematika keletkezéséről. Az elmúlt évek során ugyanis több dolgozatban azt igyekeztem kimutatni, hogy a legrégibb görög deduktív matematika létrejötte az eleai filozófia hatásának tulajdonítható.[11] Erre a gondolatra — az időrend figyelembevételén kívül — főként két megfigyelés vezetett. *Egyrészt* ugyanis az a körülmény, hogy gyakran találkozunk

[6] B. L. v. d. WAERDEN, i. m. 147; vö. O. BECKER, *Gnomon* **23** (1951) 297 kk.

[7] Vö. ezzel e dolgozat utolsó fejezetét.

[8] Lásd ennek az elgondolásnak egyik változatát K. REIDEMEISTERnél: *Das exakte Denken der Griechen,* Hamburg 1949, 52.

[9] Lásd e dolgozat utolsó fejezetét.

[10] K. v. FRITZ, i. m.

[11] „Eleatica", *Acta Ant. Acad. Scient. Hung.* III, Budapest (1955) 67—103 és „Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá?" i. h.

az V. századi görög matematikában az ún. indirekt bizonyítási formával, annak a gondolatnak a kimondására késztetett, hogy deduktív matematika mindaddig nem is lehetséges, amíg nem ismeretes ez a bizonyítási forma.[12] Márpedig az indirekt bizonyítási formának a kialakítása aligha rekonstruálható valamely még csak empírikus-praktikus jellegű matematika keretein belül; annál könnyebb volt viszont rámutatnom arra, hogyan került át ez a gondolkozási forma az eleai filozófiából a matematikába. *Másrészt* úgy láttam: az eleai filozófia hatására vall a görög matematika evidencia-fogalmának a történeti fejlődése is.[13] Azt hiszem, sikerült kimutatnom, hogy a legrégibb görög matematikában az evidencia empírikus-szemléletes jellegű volt; már az V. században fölváltotta azonban az ilyen jellegű kezdetleges evidenciára való törekvést egy egészen különös antiempírikus és szemléletellenes tendencia. Ez a tendencia egyszerre jelentkezett az indirekt bizonyítási forma első matematikai alkalmazásaival, és ugyanúgy mint amaz: az eleai filozófia hatására volt visszavezethető. — Ezekhez a régebbi felismerésekhez kapcsolódva legutóbb a görög matematika definíciós-axiómatikus alapjait vizsgáltam.[14] Kimutattam, hogy EUKLIDÉS „Elemeinek" VII. könyvében az aritmetika több igen fontos definíciója minden valószínűség szerint eleai eredetű. Azt hiszem, sikerült ugyanígy kimutatnom azt is, hogy EUKLIDÉS 8. axiómájának („az egész nagyobb mint a rész") a felállítására az eleai ZÉNÓnak egyik különben megcáfolhatatlan paradoxona („a fele idő egyenlő [ekvivalens] a duplájával") adott alkalmat.

Ezúttal a rendszeres görög matematika eredetének kérdését a *terminológia* történetéből kiindulva vizsgálom. Kísérletet teszek arra, hogy megvilágítsam a görög matematika axiómatikájában használt legfontosabb kifejezéseknek — a *definíciók, posztulátumok* és *axiómák* jelölésére használt görög terminusoknak az eredetét. Azt hiszem, e vizsgálat eredményei messzemenően igazolják majd a rendszeres görög tudomány keletkezésére vonatkozó elméletemet.

I. Proklos terminológiája

Mint ismeretes, EUKLIDÉS klasszikus művét, az „Elemeket" i. e. 300 körül állította össze. A „Elemek" I. könyvéhez írt kitűnő ókori kommentár viszont attól az újplatónikus PROKLOStól származik, aki majdnem 800 évvel később élt az i. sz. V. században. — Előre kellett bocsátanom ezt a kronológiai tényt, mert mindjárt látni fogjuk majd, hogy az axiómatikának PROKLOSnál meg-

12 *Matematikai Lapok* VIII (1957) 238 kk.

13 „A matematikai *bizonyítás* görög terminus technicusa", *Antik Tanulmányok* 1958, Budapest 25—43.

14 *Matematikai Lapok* X 1959, 72—121.

őrzött terminusai mégis *régibb keletűek,* mint azok a terminusok, amelyeket EUKLIDÉS szövegében találunk.

Az „Elemek" görög szövegkiadásában (ed. J. L. HEIBERG, vol. I. Lipsiae 1883) rögtön az első könyv elején hármas csoportba osztva találjuk az ókori matematika *princípiumait.* E hármas csoportnak a modern kiadó latin fordításában a következő neveket adta: *1. definitiones, 2. postulata* és *3. communes animi conceptiones.* E három névnek a görög szövegben a „horoi" *(ὅροι),* „aitémata" *(αἰτήματα)* és „koinai ennoiai" *(κοιναὶ ἔννοιαι)* terminusok felelnek meg.

Ha mármost összehasonlítjuk ezeket az EUKLIDÉSnél olvasható görög terminusokat a PROKLOS kommentárjában használt terminusokkal, meglepődve tapasztaljuk, hogy PROKLOS tulajdonképpen csak a második csoportnak, a posztulátumoknak a megjelölésére használja ugyanazt a görög szót, mint EUKLIDÉS; a posztulátum neve PROKLOSnál is mindig „aitéma". A másik két csoportot azonban PROKLOS *más* nevekkel jelöli, mint EUKLIDÉS.

Vegyük pl. elsőnek a „communes animi conceptiones" nevű csoportot. E princípiumok neve PROKLOSnál *nem* „koinai ennoiai", hanem „axiómata" *(ἀξιώματα).*[15] Ismeri ugyan PROKLOS a „koiné ennoia" nevet is,[16] de sohasem használja, hanem következetesen mindig az „axiómata" szóval helyettesíti. Sőt PROKLOS olyan magától értetődő természetességgel használja ezt az utóbbi kifejezést („axiómata") — ami pedig EUKLIDÉS mai szövegében sehol sem fordul elő —, hogy önkéntelenül is felébred bennünk a gyanú: vajon ugyanaz az Euklidés-szöveg volt-e PROKLOS kezében, mint amit mi olvasunk? Nem állott-e az ő szövegében a „koinai ennoiai" kifejezés helyén az „axiómata" szó? — Megerősítheti ezt a gyanúnkat a következő két tény:

1. Az „axióma" szó mint matematikai terminus ismeretes már az EUKLIDÉSt megelőző korból is. ARISTOTELÉS beszél pl. a matematikusok ún. axiómáiról,[17] sőt több ízben szó szerint idézi is azt az „axiómát", amely EUKLIDÉS mai szövegében mint harmadik „koiné ennoia" szerepel.[18]

2. A „koinai ennoiai" kifejezés — amint ezt már P. TANNERY is felismerte[19] — későbbi, talán sztoikus eredetű terminus. A sztoikusok ugyanis „koinai ennoiai"-nak nevezték a „minden ember számára közös képzeteket".[20]

Úgy látszik tehát, későbbi, talán sztoikus hatásra vallhat az, hogy EUKLIDÉS szövegében a régi „axiómata" kifejezés helyébe a „koinai ennoiai"

15 *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii,* ed. G. FRIEDLEIN, 1873 p. 76,6; 77,1; 188,5 et passim.

16 Proclus 194, 8—9.

17 Met. Γ 3 1005 a 20.

18 Met K 4 1061 b 20, vö. Met. Γ 3 1005 19 kk.

19 Mém. Scient. (publiés par J. L. HEIBERG—H. G. ZEUTHEN, 1912) II 60.

20 Stoicorum Veterum Fragmenta, ed. H. v. ARNIM, II 154,29 kk.; III 51, 41.

terminust írták. Ezt a változtatást azonban talán *nem mindegyik* ókori Euklidés-példányon hajtották végre. Bizonyára még PROKLOSnak is olyan Euklidésszöveg volt a kezében, amelyik a régi „axiómata” elnevezést változatlanul megtartotta.

Azt a feltevést egyébként, hogy EUKLIDÉS szövegében a régi „axiómata” elnevezést csak utólag váltotta fel a „koinai ennoiai” terminus, nemcsak az teszi valószínűvé, hogy ez az újabb keletű kifejezés a sztoikus filozófia terminusa volt. Ezt a következtetést támogatja még egy másik megfigyelés is. Ti. az „axiómata” szó maga is a sztoikus filozófia egyik terminusa volt — *de nem abban az értelemben, mint az ókori matematikában.* A sztoikusok „axiómá”-nak neveztek minden kijelentő állítást, tételt (Aussagesatz).[21] Az a valaki tehát, aki az ókorban az euklidészi „axiómata” megjelölést a „koinai ennoiai” terminussal helyettesítette, ezzel többek között arra is törekedhetett, hogy megkülönböztesse EUKLIDÉS „axiómiáit” a mástermészetű sztoikus „axiómáktól”.

Ehhez a gondolatmenethez egyelőre még csak a következőt kell hozzáfűznöm. Látni fogjuk majd később, hogy a „koinai ennoiai” terminus bevezetését a régebbi „axiómata” megjelölés helyébe, tulajdonképpen már ARISTOTELÉS működése előkészítette. Egyelőre azonban beérhetjük a következő megállapitással: a „communes animi conceptiones” nevű princípium-csoportnak eredeti görög megjelölése: „axiómata” volt; ez derül ki az idézett Aristotelés- és Proklos-helyek összehasonlításából. Az EUKLIDÉS mai szövegében olvasható megjelölés: „koinai ennoiai” — későbbi eredetű átírás.

*

Nagyjából hasonló eredménnyel jár a másik euklidészi terminusnak, a definíciók görög nevének a vizsgálata is. EUKLIDÉS szövege a definíciókat „horoi” *(ὅροι)* névvel jelöli. Bizonyos, hogy ennek a szónak „definíció” jelentése — legalábbis PLATÓN óta — közismert volt a görög filozófiai nyelvben. (Igaz ugyan, hogy ARISTOTELÉSnél a *ὅρος* szó általában *terminust* jelent, míg a *definíció* neve nála: *ὁρισμός;* de ez a speciálisan arisztotelészi szóhasználat a matematikatörténet szempontjából egyelőre aligha lényeges.) EUKLIDÉS tehát valóban jelölhette definícióit ezzel az ő korában már *régi* terminussal: „horoi”. — A különös csak az, hogy PROKLOS kommentárja az euklidészi definíciókat *mégsem* „horoi” néven emlegeti. Bár nagyon jól ismeri PROKLOS a definícióknak ezt a megjelölését is,[22] nála azonban a *definíció* neve általában: „hypothesis” *(ὑπόθεσις).*[23]

[21] Uo. II 193—200.
[22] Pl. Proclus 81, 26.
[23] Proclus 76, 4 kk., 15 kk; 178, 1 kk.

Különös ez a prokloszi szóhasználat főként azért, mert a „hypothesis" kifejezés a görög matematikai szakirodalomban — sőt gyakran magánál PROKLOSnál is — egyszersmind a matematikai princípiumok *összefoglaló* neve is. Annak tehát, aki PROKLOS szövegét görögül olvassa, esetről esetre kell eldöntenie, vajon a „hypothesis" szó *princípiumot* jelent-e általában, vagy speciálisan *definíciót.*

Mégis tévedés volna, ha azt hinnők, hogy a „hypothesis" szónak „matematikai *definíció*" jelentése csak PROKLOS kommentárjából ismeretes. Több jel arra mutat, hogy ugyanez a szójelentés mind a görög matematika klaszszikus, mind pedig korai szakaszában általános lehetett. ARCHIMÉDÉS pl. „De conoidibus et sphaeroidibus" c. munkájában több ízben használja a „hypotithesthai" *(ὑποτίθεσθαι* = „alátenni") igét *definíciók* bevezetésére.[24] De ugyanígy hívatkozhatunk PLATÓNra is, aki egy alkalommal „hypotheseis" néven több olyan *definíciót* említ, amelyet megtalálunk a nála későbbi Euklidésszövegben.[25] — Úgy látszik tehát, PROKLOS szóhasználata ebben az esetben is megfelel az Euklidés-korabeli gyakorlatnak; a definíciók jelölésére használt terminus nemcsak a „horoi", hanem a „hypotheseis" szó is lehetett.

Összefoglalásul megállapíthatjuk: a *definíciók, posztulátumok* és *axiómák* jelölésére összesen *öt* görög terminust említettünk: 1. „hypotheseis", 2. „horoi", 3. „aitémata", 4. „axiómata" és 5. „koinai ennoiai". Ezek közül az első kettő — „hypotheseis" és „horoi" — a *definíciók,* az utolsó kettő pedig az *axiómák* (vagy másképpen a „communes animi conceptiones" csoport) neve. Minthogy pedig a felsorolt öt görög név közül a legelső, a „hypothesis" szó, nemcsak *definíciót* jelent, hanem egyszersmind matematikai *princípiumot* is, érdemes lesz behatóbb vizsgálatunkat éppen ezzel kezdenünk.

II. A definíciók terminusa

1. A „HYPOTHESIS" PROKLOSnál ÉS PLATÓNnál

A „hypothesis" szó, mint a *ὑποτίθεσθαι* („alátenni") ige származéka, görögül *feltevést,* azaz pontosabban *„alátétet"* jelent, tehát valami olyasmit, ami a szó átvitt értelmében *„alapja"* lehet annak, amit reá építenek. Mint matematikai terminus ez a szó általában összefoglaló neve azoknak a *princípiumoknak,* amelyeket egy másik görög szóval néha „archai"-nak *(ἀρχαί)* neveznek. Mint PROKLOS egy alkalommal írja: „sokszor a tudomány alap-

[24] ARCHIMEDES, *Opera omnia* (ed. J. L. HEIBERG, 1910) I 248, 252; a DOSITHEOShoz írt ajánlólevélben. Vö. K. v. FRITZ, i. m. 57.

[25] PLATÓN, Resp. VI 510 C—D; az itt említett „hypothesisek" — *páros* és *páratlan szám,* geometriai *idomok* és a háromféle *szög* — kétségtelenül definíciók.

elveit, az *arché*-kat mind *hypothesisek*nek mondják".[26] Feltehető, hogy ugyanennek a „hypothesis" szónak speciálisabb matematikai jelentése („definíció") valamiképpen az általánosabb matematikai jelentésből fejlődött ki. — Lássuk azonban előbb, milyen értelemben használja PROKLOS a „hypothesis" szót a matematika *princípiumainak* a megjelölésére? Útbaigazíthat bennünket erre vonatkozóan a következő Proklos-idézet.

„Minthogy azt állítjuk, hogy ez a tudomány, a geometria (= matematika) feltevésekből indul ki *(ἐξ ὑποθέσεως εἶναι)* és meghatározott princípiumokból *(ἀπὸ ἀρχῶν ὡρισμένων)* bizonyítja következtetéseit..., annak, aki geometriai kézikönyvet állít össze, külön kell tárgyalnia tudományának alapjait (princípiumait, *τὰς ἀρχάς)*, és külön azokat a dolgokat, amelyeket a princípiumokból vezet le. A princípiumokról nem kell számot adnia, ezeket nem kell bizonyítania, de mindazt, ami ezekből következik, bizonyítania kell."[27]

Nem kétséges, mi az értelme ebben az összefüggésben a görögül is idézett *ἐξ ὑποθέσεως* kifejezésnek. A „hypothesis" szó ezen a helyen összefoglaló neve mindazoknak a be-nem-bizonyított feltevéseknek, princípiumoknak, tehát: *definícióknak, posztulátumoknak* és *axiómáknak,* amelyekből a matematika kiindul. PROKLOS idézett szavai tulajdonképpen arról szólnak, hogy a matematika *„hypothetikus"* tudomány; azokat a *feltevéseket* vagy *alapelveket*, amelyekből kiindul, a matematikus *nem* bizonyítja, bizonyítás *nélkül* fogadja el őket igazaknak; csak azokat a következményeket („tételeket") kell bizonyítanunk a matematikában, amelyeket az alapelvekből, vagy más szóval: a kiindulásul választott feltevésekből vezetünk le. Tehát a „hypothesis" szó az idézett helyen azt jelenti: „kiindulásul választott és be-nem-bizonyított feltevés".

Első kérdésünk ezek után így hangzik: mióta használatos a görög matematikában a „hypothesis" szó ebben a jelentésben — „kiindulásul választott és be-nem-bizonyított feltevés" —, és vajon milyen körből származhatik egyáltalán ez a szóhasználat? — Erre a kérdésre adandó válaszunk PLATÓN dialógusainak tüzetesebb vizsgálatából indulhat ki.

A „Menón" c. dialógus pl. azt a kérdést tárgyalja: tanítható-e az erény? SÓKRATÉS ugyan előbb azt szeretné tisztázni, hogy *mi* az erény, de minthogy partnere türelmetlen és rögtön a főkérdéssel akar foglalkozni, SÓKRATÉS kompromisszumot javasol: „engedd meg, hogy a kérdést egy feltevés alapján vizsgáljam" *(ἐξ ὑποθέσεως σκοπεῖσθαι)*[28], s mindjárt illusztrálja is javasolt „hypothetikus" eljárását a geometerek példájával: „a feltevés alapján való

26 Proclus 77, 2 k.
27 Uo. 75, 6 kk.
28 PLATÓN, „Menón" 86 E 3.

vizsgálatot úgy értem, ahogy a geometerek is feltevések alapján folytatják kutatásaikat". — Már ezekből a szavakból is kiderül, milyen fontos szerepük volt a feltevéseknek, a „hypothesiseknek" a platónkorabeli matematikában. SÓKRATÉS azért hivatkozhat a geometerek példájára, mert javasolt módszere az egykorú geometriában, úgy látszik, közismert volt. — Világosan kiderül az említett „Menón"-részletből az is, miből állott a geometereknek az a „hypothetikus" eljárása, amelyet SÓKRATÉS az adott esetben követni akart. A geometer ugyanis — SÓKRATÉS jellemzése szerint —, ha választ kérnek tőle valamilyen konkrét kérdésre, akkor előbb megpróbálja az adott konkrét kérdést általános *feltevés*, „hypothesis" formájába önteni, és csak ebben az értelemben adja meg válaszát. Tehát kb. így beszél: „Ha igaz az, hogy..., akkor ebből ez és ez következik; ha viszont nem igaz az, hogy..., akkor ebből ez vagy amaz következik." Ugyanilyen „hypothetikusan" akarja SÓKRATÉS is megvizsgálni a kérdést: „tanítható-e az erény?"

Az említett „Menón"-példa azt mutatja, hogy már a platónkorabeli matematikában is megvolt a „hypothesis" szónak az a jelentése, amelyet az előbb PROKLOSnál láttunk: „kiindulásul választott és be-nem-bizonyított feltevés". A geometer *nem dönti el*, igaz-e az a feltevés, amelyből kiindul — ezt a kérdést függőben hagyja —, csak azt vizsgálja: mi következik abból, *ha* igaz a „hypothesis". Ezért „hypothetikus" az eljárása. — Az első pillantásra mégis az lehet a benyomásunk, mintha volna egy lényeges különbség a kétféle, a PROKLOS és a PLATÓN által említett „hypothetikus eljárás" között. PROKLOS ugyanis arról beszél, hogy a matematika *egész* rendszere be-nem-bizonyított „hypothesisekre" épül, értvén ezeken a „hypothesiseken" az euklidészi *definíciókat, posztulátumokat* és *axiómákat*. SÓKRATÉS viszont csak azt állítja, hogy a geometerek valamiféle „hypothesisből" szoktak kiindulni, amelynek érvényességét függőben hagyják; de egyáltalán nem derül ki SÓKRATÉS szavaiból, hogy vajon a geometerek kiindulásul választott „hypothesise" *alapelv*-e a matematikában, vagy csak valamilyen „ad hoc", tetszőlegesen választott *feltevés*? — Ez más szóval azt jelenti, hogy az előbbi „Menón" részlet alapján *nem dönthető el egyértelműen*: csakugyan ismerte-e már PLATÓN korában is a matematika azt a „hypothesis"-fogalmat, amelyről PROKLOS beszélt, vagy talán csak távolabbi analógiaként értendő-e a SÓKRATÉS által említett „hypothetikus eljárás"? — Szerencsére a következő Platón-idézet lehetővé teszi ennek a kérdésnek az eldöntését is. Az „Állam" c. dialógusban ugyanis egy alkalommal ezt olvassuk:

„Azt hiszem, tudod, hogy azok, akik geometriával, számokkal és más ehhez hasonló tudománnyal foglalkoznak, alapul veszik *(ὑποθέμενοι)* a *páratlant*, a *párost*, az *idomokat*, a *háromféle szöget* és más ehhez hasonlót; ezeket teszik meg alapnak („hypothesiseknek" — *ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά)*, úgy gondolván, hogy ezeket már tudják; nem is adnak ezekről számot sem maguknak, sem másnak, minthogy ezeket úgyis mindenki tudja, hanem ezekből mint princípiumokból kiindulva az utánuk következő dolgok bizonyításához látnak.[29]

PLATÓN tehát ugyanúgy hangsúlyozza, mint PROKLOS, hogy a matematikusok be-nem-bizonyított (tovább-már-nem-vizsgált) feltevésekből indulnak ki. A példaképpen felsorolt „hypothesisek" pedig ezúttal egyáltalán nem „ad hoc", tetszőlegesen választott feltevések, hanem alapvető matematikai állítások arról, hogy mi a páros és páratlan szám, mik az egyes geometriai idomok, mi a szög stb. Vagyis: a matematika „hypothetikus tudomány" jellege már PLATÓN korában közismert volt. Annyit tehát máris megállapíthatunk, hogy a „hypothesis" szónak vizsgált jelentése („kiindulásul választott és be-nem-bizonyított feltevés") a platónkorabeli matematikában megvolt már. — Bár ez a megállapítás önmagában nem több még, mint „terminus ante quem", mégis azt hiszem, továbbsegíthet bennünket az eredet kutatásában is, ha azt a másik kérdést vizsgáljuk most: milyen körből származhatik egyáltalán a „hypothesis" szónak ez a használata?

Érdemes lesz mindenekelőtt alaposabban szemügyre vennünk az idézett „Menón"-részletnek egyik kifejezését. SÓKRATÉS azzal kezdte említett fejtegetését: „*engedd meg*, hogy a kérdést egy feltevés alapján vizsgáljam". Könnyen azt hihetnők, hogy ez a *kérés* — „engedd meg" — csak udvariassági fordulat, amelynek nincs nagyobb jelentősége a „hypothesis"-probléma megértése szempontjából. Holott látni fogjuk majd e dolgozat egyik későbbi fejezetéből, hogy a görög matematika axiómatikája nem is érthető igazában anélkül, hogy alaposabban meg ne magyaráznánk ezt a látszólag *csak* udvariassági fordulatot. Egyelőre állapítsuk meg: SÓKRATÉS csak abban az esetben alkalmazhatja javasolt „hypothetikus eljárását", ha ehhez partnere is hozzájárul. Az a „feltevés", amelyből ki akar indulni, csak abban az esetben lehet *alapja* későbbi közös vizsgálódásaiknak, csak akkor lesz a szó igazi értelmében „hypothesis", ha SÓKRATÉS javaslatát a másik fél is elfogadja. Ezért *nem lényegtelen* az, hogy SÓKRATÉS *kéri* a „hypothesis" elfogadását. Az pedig, hogy mennyire fontosnak tartották a másik fél hozzájárulását az ilyen természetű *kéréshez* vagy *javaslathoz*, kiderül abból is, hogy van a „hypothesis" szónak egy érdekes szinonimája: „homologéma" *(ὁμολόγημα)*. „Homologéma" — szó szerint *megegyezés* — a neve annak az állításnak, amelyben a dialektikus vita során a szembenálló felek mint kiinduló tételben bizonyítás nélkül megegyeznek, mert az ilyen tételt mind a ketten igaznak tartják.[30]

[29] Resp. VI 510 C—D.
[30] Vö. pl. PLATÓN „Theaitétos" 155 A—B.

A dialektikus vita ugyanis abból áll,[31] hogy az egyik résztvevő meg akarja győzni a másikat egy általa választott tételnek a helyességéről. Ezért olyan premisszákat keres, amelyeket partnere is elfogad, igazaknak tart. Az ilyen mind a két fél által bizonyítás nélkül elfogadott és előrebocsátott premisszának a neve: „hypothesis" vagy „homologéma". Miután pedig a kiindulásul választott állításban, a „hypothesisben" vagy „homologémában", megegyeztek, az egyik fél megmutatja, hogy a bebizonyítandó tétel — az, amelyiket a másik fél kezdetben *nem akart elfogadni, nem tartott igaznak* — logikus szükségszerűséggel következik az általa is elfogadott „hypothesis"-ből, „homologéma"-ból.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a „hypothesis" szó — éppenúgy mint említett szinonimája a „homologéma" kifejezés is — nemcsak a matematikai szaknyelvnek volt terminus technicusa, hanem egyszersmind a *dialektikának* is, értvén ezúttal „dialektikán" a vitatkozásnak azt a művészetét, a *διαλεκτικὴ τέχνη*-t, amelyet többek között pl. PLATÓN dialógusaiból olyan jól ismerünk. Amellett, úgy látszik, ez a terminus a dialektikában is ahhoz valami egészen hasonlót jelentett, mint amilyen értelemben a matematikusok használták: „hypothesis" volt a neve mind a dialektikában, mind pedig a matematikában annak a be-nem-bizonyított de mégis elfogadott feltevésnek, amelyből a vitatkozó partnerek kiindultak, illetőleg: amely feltevés *alapja* volt egy utána következő bizonyításnak. — Világos, hogy ezekután a legfontosabb kérdés, amelyet tisztáznunk kell, az lesz majd: vajon csakugyan a dialektikából került-e át ez a szakkifejezés a matematikába, vagy megfordítva? Mielőtt azonban ezt a kérdést tárgyalnánk, alaposabban meg kell vizsgálnunk még a dialektikában alkalmazott hypothesiseknek néhány jellegzetes vonását.

2. MATEMATIKA ÉS DIALEKTIKA

Mindenekelőtt a következőre kell felhívnom a figyelmet. Úgy látszik, mintha a dialektikus vita során azt a kezdőtételt, amelyből a bizonyítás kiindult, a beszélgetés egyik résztvevője — pontosabban: az, aki a dialógust vezette — többé-kevésbé *tetszőlegesen* választhatta volna meg. Hiszen ezzel a kezdőtétellel kapcsolatban igazán fontos csak két dolog volt: 1. hogy ezt a tételt a dialógus másik résztvevője is elfogadja, és 2. hogy ebből a kezdőtételből valamiképpen levezethető legyen a bizonyítandó állítás. — Minthogy viszont az olyan valaki, aki jártas volt a dialektika művészetében, sokszor valószínűleg több különböző kiindulótételből is le tudta vezetni bizonyítandó igazát, könnyen kialakulhatott az a felfogás, hogy a „hypothesis", amely alapja valamely dialektikus levezetésnek, *szinte tetszőlegesen választható állítás.*

31 Vö. K. v. FRITZ, i. m. 20; E. KAPP, „Syllogistik", RE IV A 1048 és 1058/59.

— Csakugyan ilyen elgondolásra mutatnak azok a tanácsok, amelyeket ARISTOTELÉS ad a „Topikában" (VIII 1, 155 b 29 kk. és VIII 3, 159 a 3 kk.) arra vonatkozóan: hogyan válasszuk meg valamely dialektikus bizonyítás kiindulótételeit?[32] ARISTOTELÉS tanácsa szerint ezeknek a kiindulásul választott tételeknek természetesen olyanoknak kell lenniök, hogy az ellenfél is elfogadja őket. De vigyázzunk mégis: ne legyenek ezek az állítások túlságosan „átlátszóak", azaz: nehogy az ellenfél is azonnal észrevegye, hogy belőlük könnyen levezethető a kívánt bizonyítás; mert ebben az esetben az ellenfél nem fogadja majd el a kiindulótételt. Az ügyes vitatkozó arra törekszik tehát, hogy kezdetben leplezze az összefüggést a „hypothesis" és a bizonyítandó állítás között. Nem is maguktól adódó, természetes sorrendjükben bocsátja előre hypothesiseit, hanem úgy, hogy az ellenfél is gyanútlanul elfogadhassa őket, és csak utólag lepődjék meg azon: mi következik ezekből a látszólag semmitmondó kiindulótételekből. — Ha ezeket a tanácsokat olvassuk, csakugyan az lehet a benyomásunk, mintha az antik dialektika többé-kevésbé a *szofisztika* szellemében kezelte volna a bizonyítások „hypothesiseit". Holott valójában PLATÓN nagyon csínján bánt még a csakugyan tetszőlegesen választott hypothesisekkel is.

Egy alkalommal pl. az „Állam" c. dialógusban SÓKRATÉS a következő értelemben beszél az egyik csak provizórikusan elfogadott feltevésről:[33] feltesszük, hogy csakugyan így áll a dolog *(ὑποθέμενοι ὡς τούτου οὕτως ἔχοντος)*, és ebben a feltevésben folytatjuk vizsgálódásunkat. De előre megegyezünk abban: ha időközben megváltoznék véleményünk kiindulásul választott állításunkat illetően: semmis lesz mindaz, amit előbbi (téves) feltevésünkből következtettünk *(πάντα ἡμῖν τὰ ἀπὸ τούτου συμβαίνοντα λελυμένα ἔσεσθαι)*.

Úgy látszik tehát, a dialektikában alkalmazott „hypothesisek" mégsem lehettek „önkényesen választott állítások". Hiszen a „hypothesis" szorosan összefügg azzal, amit belőle következtetünk. Ebben az értelemben hangsúlyozza PLATÓN a „Kratylos" c. dialógusban:[34] az, aki a kutatás legelején valamilyen téves feltevésből indul ki *(εἰ γὰρ τὸ πρῶτον σφαλεὶς ὁ τιθέμενος)*, kénytelen mindabban, ami ezután következik, kezdetben választott feltevéséhez igazodni, hogy összhangban maradhasson önmagával *(τἆλλα ἤδη πρὸς τοῦτ' ἐβιάζετο καὶ αὑτῷ συμφωνεῖν ἠνάγκαζεν)*; így van ez néha a geometriai

[32] Érdemes lesz már itt felhívni a figyelmet arra, hogy e kiindulótételek neve az idézett Aristotelés-szövegben *nem* „hypotheseis", hanem: „axiómata". Később látni fogjuk majd, hogy az „axióma" szó mint a dialektika terminus technicusa nem is volt egyéb, mint a „hypothesis" kifejezés szinonímája.

[33] PLATÓN, Resp. IV 437 A.

[34] „Kratylos" 436 D.

ábráknál is, ahol a hiba kezdetben parányi és jelentéktelen ugyan, de később nagyon sok hozzá igazodó téves következménye lesz. Ezért kell minden ilyen esetben különös gonddal vizsgálnunk éppen a kutatás kiindulópontját: vajon helyes-e alapul választott feltevésünk vagy sem *(εἴτε ὀρθῶς εἴτε μὴ ὑπόκειται)*, és csak ha ezt megvizsgáltuk már, akkor ellenőrizhetjük majd további következtetéseinket.

Az a figyelmeztetés, hogy minden gondolatmenetnek különösen a kiindulótételét, a „hypothesisét" vizsgáljuk meg alaposan, mert következményeiben súlyos tévedésre vezethet, ha bármilyen parányi hiba csúszik is a „hypothesisbe", többször fölbukkan PLATÓNnál. Emlékeztethetünk pl. a „Phaidón" c. dialógusra. Ebben a beszélgetésben ugyanis SIMMIAS egy alkalommal kijelenti: nem tudná ugyan megcáfolni SÓKRATÉSnek éppen elhangzott bizonyítását, de mégis úgy érzi, maradt még benne némi kétely. Erre feleli SÓKRATÉS: „Helyes, SIMMIAS, de nemcsak ebben van igazad! Alaposabban meg kell még vizsgálnotok a legelső, a kiinduló feltevéseket is *(τὰς ὑποθέσεις τὰς πρώτας)*, vajon hiteltérdemlőknek találjátok-e őket *(εἰ πισταὶ ὑμῖν εἰσιν)*; s majd csak ha ezt megtettétek, akkor követhetitek a további gondolatmenetet."[35]

Ha görögül olvassuk SÓKRATÉS utóbbi szavait a „legelső, kiinduló feltevésekről" — amelyek *hiteltérdemlőek, igazak* kell hogy legyenek — önkéntelenül is eszünkbe jutnak a *matematikai princípiumok.* A görög nyelvű szakirodalom ugyanis éppen ezekkel a szavakkal jelölte a matematika princípiumait is: *αἱ πρῶται ἀρχαί* vagy *πρῶται ὑποθέσεις* és — legalábbis az ARISTOTELÉS utáni időkben — ugyanezt a követelményt is állították fel a matematikai princípiumokkal szemben. Mint sokan hiszik: éppen ARISTOTELÉS lett volna az első, aki rámutatott arra, hogy minden tudománynak bizonyíthatatlan, de mégis igaz, hiteltérdemlő princípiumokból kell kiindulnia; sőt, ő, ARISTOTELÉS lett volna az is, aki először tette vizsgálat tárgyává a kérdést: milyeneknek kell lenniök a tudomány kiindulásul választott, bizonyíthatatlan princípiumainak.[36] Éppen ezzel készítette volna elő ARISTOTELÉS a rendszeres matematikai tudomány axiómatikus megalapozását.

Mégis, ha SÓKRATÉS legutóbb idézett szavaira gondolunk, lehetetlen, hogy föl ne ébredjen bennünk a gyanú: vajon az a PLATÓN, aki így beszéltette SÓKRATÉSt a dialektikus bizonyítás kiinduló tételeiről, ne ismerte volna egyszersmind a matematikai princípiumok problémáját is? Hiszen már a eddigiekből is láthattuk, milyen gyakran hívatkozik PLATÓN éppen a „hypothesis" kérdésével kapcsolatban a matematika példájára. A „Menón" c. dia-

35 „Phaidón" 107 B.
36 K. v. FRITZ, i. m. 64—65, 98.

lógusban SÓKRATÉS „hypothetikus eljárásával" a geometerek módszerét utánozza, a „Kratylos"-ban a geometriai ábrák kezdetben parányi hibáira emlékeztet, amelyek később súlyos tévedésekre vezetnek; ugyanígy történik ez a dialektikus bizonyításban is, ha téves a „hypothesis". — Helytelen volna, ha azt hinnők, hogy PLATÓNnak ezek a hívatkozásai a matematikára csak ötletszerű gondolatasszociációk. A valóság ti. az, hogy PLATÓN számára a matematika a nagy mintakép. Az a későantik hagyomány, amely szerint PLATÓN állítólag kiíratta az Akadémia bejárata fölé: „Senki ne lépjen be ide, amíg nem ismeri a geometriát!" — lényegében mindenesetre igaz. Igazolható ez a felfogás magának PLATÓNnak a műveiből is. A dialógusok figyelmes olvasója lépten-nyomon meggyőződhetik róla, hogy PLATÓN mindig arra törekedett: a dialektikus bizonyítás legyen éppen olyan meggyőző, mint a matematikai bizonyítás. A „Theaitétos" c. dialógusban el is mondja SÓKRATÉS: hányszor megesik a köznapi gyakorlatban, hogy valamely kérdés vizsgálata során beérjük a pusztán csak hozzávetőleges, elképzelhető, de egyáltalán nem szükségszerűen meggyőző „bizonyítással". A matematikában, persze, ilyesmi nem lehetséges, mert a matematikusnak minden bizonyítása feltétlenül meggyőző kell hogy legyen.[37] S PLATÓN szerint ez — mint majd látni fogjuk — éppen azzal függ össze, hogy hogyan kezeli a matematika a „hypothesiseket". Ezért van az is, hogy a platóni dialektika gyakran szinte „matematikai jellegű" hypothesisekből indul ki. A „Theaitétos" c. dialógusban pl. két érdekes „homologéma" így hangzik:[38]

1. „egy dolog sem nagyobbá, sem kisebbé nem lesz, sem tömegében, sem szám szerint, amíg egyenlő önmagával"

2. „amihez semmi nem járul hozzá, és amiből semmi el nem vétetik, az nem növekedhet, és nem csökkenhet, hanem önmagával egyenlő marad."

Nem véletlen, hogy akadt már kutató, aki szóvá tette: mennyire emlékeztetnek ezek a „homologémák" az euklidészi *axiómákra.*[39] Csakugyan látni fogjuk majd később: nagymértékben elősegítheti az euklidészi axiómák történeti problémájának a megértését, ha összehasonlítjuk őket az idézett platóni „homologémákkal".

Egyelőre azonban fontosabb számunkra a következő megállapítás: mind a „hypothesis", mind pedig a „homologéma" szavak használata azt mutatja, hogy ezek a kifejezések egyformán terminus technicusai voltak a matematikának is, meg a dialektikának is. De ugyanez érvényes nemcsak erre a két

[37] Vö. „Theaitétos" 162 E.

[38] Uo. 155 A—B.

[39] Ž. MARKOVIČ, Les mathématiques chez Platon et Aristote, *Bulletin International de l'Acad. Yougoslave des Sciences et des Beaux Arts,* Classe des Sciences mathématiques et naturelles XXXII (1939) 1—21.

szóra, hanem mindazokra a sztereotíp kifejezésekre is, amelyek a görög nyelvhasználatban szinte elválaszthatatlanok az előbbi két szótól. Gondolok itt a következőre. — Mint már az eddigiekből is láttuk: „hypothesis" a neve a dialektikában annak a feltevésnek, amelyre valamilyen gondolati konstrukciót építenek, illetőleg görög szóhasználat szerint inkább úgy mondhatnánk: amely feltevéshez „következtetéseket" fűznek. Az ilyen „következtetéseket" görögül több szinoním kifejezéssel írhatják körül, pl. *τά ἑπόμενα*[40] „azok, amik utána, ti. a hypothesis után jönnek", *τα ἑξῆς*,[41] „a sorjában következő dolgok", *τὰ συμβαίνοντα*,[42] „a vele, a hypothesisszel együtt járó dolgok"; vagy mondhatják azt is az ilyen „következtetésről": „azok, amik összhangban vannak a hypothesisszel" *(συμφωνεῖν)*[43]. Ha mármost megfigyeljük Platón szóhasználatát, azt látjuk, hogy a felsorolt kifejezések nála egyformán terminus technicusai mind a matematikának, mind pedig a dialektikának.[44] Pusztán a szóhasználatot vizsgálva, az lehet a benyomásunk, mintha Platón korában ez a kettő, a matematika és a dialektika, még nem is váltak volna el egészen egymástól, mintha ebben az időben a matematika még nem is lett volna egyéb, mint egyik speciális ága a dialektikának.

3. A „HYPOTHESISEK" ALKALMAZÁSÁNAK MÓDSZERE

Még szembeszökőbb lesz a dialektika és matematika módszerének a rokonsága, sőt valójában: *azonossága,* ha közelebbről vizsgáljuk a „hypothesisek" alkalmazását a platóni bizonyításban. — Sókratés egy alkalommal a következőképpen jellemzi gondolkozásmódját:[45] mindig olyan állításból indulok ki, azt az állítást teszem meg *hypothesis*nek, amelyet különösen erősnek tartok *(ὑποθέμενος ἑκάστοτε λόγον ὅν ἂν κρίνω ἐρρωμενέστατον);* s amiről aztán azt látom, hogy összhangban van ezzel az állítással, azt igaznak tartom *(ἁ μὲν ἂν μοι δοκῇ τούτῳ συμφωνεῖν, τίθημι ὡς ἀληθῆ ὄντα);* amiről viszont azt tapasztalom, hogy nincs összhangban az előbbi erős állítással, azt hamisnak minősítem *(ἃ δ' ἂν μή, ὡς οὐκ ἀληθῆ)*. — Látjuk ebből az idézetből, hogy a platóni dialektika a „hypothesis"-ből való helyes következtetést legszívesebben a *συμφωνεῖν* („összhangban lenni") szóval írja körül. Azok az állítások, amelyek a kiindulásul választott *erős állításhoz,* a hypothesishez kapcsolódnak, összhangban kell hogy legyenek ezzel, mert ha nincsenek összhangban

40 Pl. „Kratylos" 436 D.
41 „Phaidón" 100 C.
42 Lásd pl. az előbb idézett „Menón"-részletet.
43 Pl. „Phaidón" 100 A. — A felsorolt kifejezésekhez lásd Ž. Markovič i. m.
44 Ž. Markovič, i. m.
45 „Phaidón" 100 A. — Ne feledkezzünk meg arról sem, hogy Platón szerint a *gondolkozás* is *dialógus;* vö. „Theaitétos" 189 E—190.

vele, akkor ezek az utóbbiak — SÓKRATÉS gondolkozása szerint — nem is lehetnek igazak, nem illeszkednek harmónikusan a hypothesishez. — Figyelemre méltó ez a *συμφωνεῖν* terminus márcsak azért is, mert jól ismerjük PLATÓN szóhasználatából ugyanennek a szónak a *negatívumát* is. Azt az állítást, amely „nincs összhangban" egy másikkal, PLATÓN a *διαφωνεῖν* igével jellemzi;[46] ez az utóbbi pedig nem egyéb mint körülírása annak, amit mi manapság „logikai ellentmondásnak" nevezünk. (Az az állítás, amely *nincs* összhangban egy másikkal, ellentmond amannak.) A *διαφωνεῖν* ige tehát az ellentmondásosságnak, pozitív párja, a *συμφωνεῖν* pedig az ellentmondás-*mentességnek* a megjelölésére szolgál.

Lássuk ezekután konkrét példán: hogyan használta a platóni dialektika a „hypothesiseket" és hogyan ellenőrizte a hozzájuk kapcsolódó állítások *összhangját?*

Igazában egyáltalán nem döntő az a kérdés: melyik dialógusból választjuk az illusztráló példát a „hypothesis" alkalmazásának a bemutatására, mert PLATÓN bármelyik dialógusában találunk ilyet, akár többet is. Praktikus szempontok mégis amellett szólnak, hogy illusztráló példánkat a „Theaitétos"-ból vegyük. Ebben a dialógusban ugyanis PLATÓN maga is hangsúlyozza, hogy bemutatandó bizonyítása „matematikai jellegű". (SÓKRATÉS éppen arról beszélt, hogy nem szabad megelégednünk a csak hozzávetőleges okoskodással, a bizonyításban a matematikusok szigorúságára kell törekednünk — „Theaitétos" 162 E —, s mindjárt ez után a figyelmeztetés után kerül sor annak a bizonyításnak a bemutatására, amelyet az alábbiakban részletesebben tárgyalunk.) A másik gyakorlati szempont, amely ugyancsak a bemutatandó példa mellett szól, abban áll, hogy ez a konkrét eset jól illusztrálja nemcsak a hypothesishez fűződő állításoknak — a következtetéseknek —, hanem egyszersmind magának a hypothesisnek az ellenőrzését is. A kérdéses bizonyítás gondolatmenete nagyjából a következő:

A probléma, amelyet a dialógus résztvevői el akarnak dönteni, így hangzik: azonos-e a tudás és az érzéki észrevevés (163 A: *εἰ ἄρα ἐστὶν ἐπιστήμη τε καὶ αἴσθησις ταὐτὸν ἢ ἕτερον).* Hogy erre a kérdésre végleges választ adhassanak, felteszik előbb, hogy „tudás és érzéki észrevevés *azonosak*". Ez az állítás lesz tehát az utána következő vizsgálódásnak a „hypothesise". Kérdés: mi következik ebből a hypothesisből"? — Ha tudás és érzéki észrevevés azonosak, akkor azonos a tudás a *látással* is, mert a látás = egyfajta érzéki észrevevés. Ez viszont más szóval azt jelenti: az az ember, aki *lát* valamit, *tudja* is azt, amit lát, aki pedig *nem lát* valamit, *nem is tudja* azt, amit nem lát. — Dehát vajon mit mondjunk arról az emberről, aki *lát* ugyan valamit

[46] „Phaidón" 101 D.

(és az előbbiek szerint ezért nyilván *tudja* is azt, amit lát), de aztán egyszerre csak behúnyja a szemét? Az ilyen nyilván — miután becsukta a szemét — *nem lát* már, s ezért az előbbi gondolatmenet értelmében most már *nem is tudhatja* azt, amit nem lát. Tagadhatatlan azonban, hogy az illető szemének bezárása után is *tudni fogja* azt, amit azelőtt látott is. Az előbbi gondolatmenet értelmében tehát azt kellene mondanunk az ilyen becsukott szemű emberről, hogy „*nem tudja* azt a bizonyos dolgot", másik gondolatmenetünk szerint viszont: „*tudja* ugyanazt a dolgot". — Az a feltevésünk tehát, hogy „a tudás azonos az érzéki észrevevéssel" nyilvánvaló *ellentmondásra* vezetett: „*tudja* azt a dolgot" és ugyanakkor „*nem tudja* ugyanazt a dolgot". Mint Sókratés mondja: úgy látszik tehát, valami *lehetetlen* következik abból a feltevésből — valami *lehetetlen* jár együtt annak az embernek a hypothesisével, aki azt állítja, hogy tudás és érzéki észrevevés azonosak (164 B: *τῶν ἀδυνάτων δή τι συμβαίνειν φαίνεται ἐάν τις ἐπιστήμην καὶ αἴσθησιν ταὐτὸν φῇ εἶναι).*

Figyelemre méltó ennek a platóni bizonyításnak legutóbbi, görögül is idézett mondata márcsak a terminológiája miatt is. Görögül ugyanis azt a „lehetetlenséget", amely az előbbi gondolatmenet értelmében következménye a kiindulásul választott hypothesisnek, *ἀδύνατον*-nak mondják. Nagyon jól ismeri ezt a szót mindenki, aki Euklidés szövegét görögül olvassa. Mert éppen ezzel a sztereotíp kifejezéssel zárul Euklidésnél minden indirekt bizonyítás: *ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον*, „ami pedig nem lehetséges".[47] Az imént összefoglalt platóni bizonyítás nem is egyéb, mint szabályszerű indirekt bizonyítás· Sókratés tulajdonképpen azt a tételt akarja bebizonyítani: „tudás és érzéki észrevevés *nem* azonosak". Az a matematikai jellegű, feltétlenül meggyőző erejű bizonyitás[48] pedig, amellyel ezt a tételt igazolja, abból áll, hogy kimutatja: a bizonyítandó tétel ellenkezője — „tudás és érzéki észrevevés *azonosak*" — nem lehet igaz, mert ez az utóbbi tétel ellentmondásra vezet; mint görögül mondják: ez az utóbbi tétel „nincs összhangban" önmagával *(διαφωνεῖ)* s ezért nem is lehetséges *(ἀδύνατον).* Ebből pedig a bizonyítás gondolatmenete értelmében az következik, hogy csak a bizonyítandó tétel, az éppen megcáfoltnak az ellentéte lehet összhangban önmagával *(συμφωνεῖ)*, csak ez lehet igaz. — Az indirekt bizonyításnak ugyanezzel a gondolatmenetével igazolta a régi pythagoreus matematika a négyzet átlójának és oldalának inkommenzurábilitását. Amiképpen Sókratés bemutatott bizonyításában a kiindulásul választott „hypothesis" — próbaképpen — éppen az ellenkezőjét mondta ki annak, mint amit Sókratés valójában bizonyítani akart („tudás és érzéki

[47] Előfordulnak Euklidésnél ennek a záróformulának stilisztikai variánsai is, pl. Elem. I 6; XI 20, 30, 34 stb., vagy más formában: IX 34.

[48] A matematikai jellegű és meggyőző bizonyitás neve Platónnál: „apodeixis kai anagké", pl. „Theaitétos" 162 E.

észrevevés *azonosak*" — így hangzott a próbaképpen felállított hypothesis), ugyanúgy jártak el a pythagoreusok is az inkommenzurábilitás bizonyításakor; felállították ugyanis a bizonyítandó tétellel ellenkező hypothesist: „a négyzet oldala és átlója *kommenzurábilis* mennyiségek". S amiképpen aztán SÓKRATÉS megmutatta, hogy a felállított „hypothesis" *nem lehet* igaz, mert ellentmondásra vezet — ha ugyanis tudás és érzéki észrevevés „azonosak" volnának, akkor azt kellene mondanunk arról a bizonyos becsukott szemű emberről, hogy *tudja* azt a dolgot és ugyanakkor *nem is tudja* ugyanazt —, ugyanúgy mutatták meg a pythagoreusok is, hogy kiindulásul választott hypothesisük ellentmondásra vezet; mert ha a négyzet átlója és oldala csakugyan kommenzurábilis mennyiségek volnának, akkor ez azt is jelentené, hogy ugyanaz a szám egyszerre *páros* is meg *páratlan* is volna.[49]

Mielőtt részletesebben továbbvizsgálnám az imént bemutatott platóni bizonyítást, érdemes lesz közbevetőleg kitérnem egy olyan ellenvetésre, amely könnyen felmerülhet az eddig elmondottak alapján. Mint láttuk, PLATÓN a dialektika és matematika közös terminusát, a „hypothesis" szót tulajdonképpen *két különböző értelemben* használja. (Egyelőre eltekintünk attól a *harmadik* lehetőségtől, hogy „hypothesis" PLATÓNnál a matematikai *definíció* neve is lehet!) Egyrészt ugyanis „hypothesiseknek" nevezi PLATÓN a tudománynak azokat az *alapelveit*, amelyeket a matematikusok maguktól értetődőknek tartanak, és nem vizsgálnak tovább;[50] ugyanígy a dialektikus vitának azokat a kezdő tételeit is, amelyekből SÓKRATÉS mint „különösen erős állításokból" szokott kiindulni.[51] Másrészt viszont „hypothesis" a neve PLATÓNnál az olyan feltételes érvényű állításnak is, amelynek érvényességét vagy érvénytelenségét éppen a dialektikus vizsgálat kell hogy eldöntse. Világos, hogy a szónak ebben az utóbbi értelmében beszél „hypothesis"-ről (= feltételes érvényű állításról) az a most bemutatott bizonyítás, amelyet a négyzet átlójának és oldalának inkommenzurábilitásáról szóló pythagoreus bizonyítással hasonlítottunk össze. Kérdés azonban: nem kell-e éppen ezért határozottabban megkülönböztetnünk egymástól a kétféle „hypothesist": 1. hypothesis = „alapelv" és 2. hypothesis = „feltételes érvényű állítás"? — Úgy gondolom, bármennyire fontos lehet is más összefüggésben ez a megkülönböztetés, számunkra ezúttal mégsem lényeges. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a „hypothesis" mint *„alapelv"* éppen abban különbözik a másikfajta „hypothesis"-től, hogy *nem* vezet ellentmondásra — ezért az ilyen *valódi* „hypothesis" —, míg a másiknak a következményei között felfedezzük az ellentmondást, s ezért az ilyen „hypothesist"

[49] Lásd Eucl. Elem. X App. 27 (HEIBERG, vol. III p. 408—410; vö. O. BECKER, Quell. u. Studien etc. B 3 (1936) 533—553).

[50] PLATÓN, Resp. VI 510 C—D.

[51] „Phaidón" 100.

mint *téves* állítást el kell vetnünk. Az *egy* oszthatatlanságáról szóló tétel pl. azért lett, mint igaznak bizonyuló „hypothesis", *alapelve* az egész antik aritmetikának, mert ennek a tételnek az ellenkezője éppenúgy ellentmondásra vezetett,[52] mint az a másik téves „hypothesis" is, amely azt állította, hogy „a négyzet átlója és oldala *kommenzurábilis* mennyiségek".

Tanulságos az imént bemutatott platóni bizonyítás különösen azért, mert világosan szemlélteti, miben áll a „hypothesis" alkalmazásának módszere. Már az eddigiekből is kiderülhetett, hogy minden esetben, amikor felállítanak valamely „hypothesist", meg akarják vizsgálni egyszersmind a „hypothesis" következményeit is, hiszen éppen azért folyamodtak a „hypothesis-felállítás" módszeréhez. A „hypothesis" mindig a következményei miatt fontos. Világos az is, hogy a „hypothesis" következményeit *két* különböző szempontból vizsgálhatják. Mert vagy valódi „hypothesis"-szel van dolgunk — mint SÓKRATÉS mondja: olyan „erős állítással", amelyet senki sem von kétségbe —, s ebben az esetben azért vizsgáljuk a „hypothesis" következményeit, mert arra vagyunk kíváncsiak, hogy mit vezethetünk le a hypothesisből; vagy előfordulhat az a másik lehetőség, hogy a „hypothesis" csak feltételes érvényű állítás; ebben az utóbbi esetben viszont azért vizsgáljuk a „hypothesis" következményeit, mert arról szeretnénk meggyőződni: nem vezet-e „hypothesisünk" ellentmondásra; az ellentmondás ugyanis megbízható cáfolata lehetne kiindulásul választott feltevésünknek. Világos tehát, hogy a hypothesis alkalmazásának mind a két esetében a *következményeket* ellenőrizzük.

Kérdés mármost: hogyan állítja össze a platóni dialektika valamely „hypothesis" következményeit? Mi a döntő kritériuma annak, hogy azok a következtetések, amelyeket hozzáfűzünk valamely „hypothesis"-hez, csakugyan összekapcsolhatók egymással?

4. A „HYPOTHESIS" ÉS AZ INDIREKT BIZONYÍTÁS

Ha áttekintjük PLATÓN műveiben azokat az eseteket, amelyekben valamely „hypothesis"-nek a következményeit vizsgálják, arra a megállapításra jutunk, hogy a vizsgálat tulajdonképpen mindig ugyanannak az egyetlenegy kritériumnak az érvényesítéséből áll. Azt vizsgálják ugyanis minden ilyen esetben, vajon a „hypothesis" következményei *(τὰ συμβαίνοντα[53])* összhangban vannak-e egymással *(συμφωνεῖν)*. Arra viszont, hogy milyen természetű állítások vannak összhangban egymással, a platóni dialektika tulajdonképpen *nem ismer* pozitív kritériumot; vagyis: PLATÓN dialógusaiban sohasem okolják meg közvetlenül: miért van két vagy több állítás összhangban egymással

[52] Vö. *Matematikai Lapok* X (1959) 83 kk.
[53] „Menón" 87 A.

(ὁμολογεῖν, συμφωνεῖν stb.*)*; PLATÓN erre csak közvetett megokolást ad, azaz dialógusainak szereplői mindig csak azt mutatják ki, ha két állítás *nincs* összhangban egymással *(διαφωνεῖν)*. — Könnyen beláthatjuk azt is: miért van ez így? Mint már az eddigiekből is kitűnhetett, az az „összhang", amelyet a platóni dialógusok szereplői keresnek, voltaképpen a gondolatmenet egyes állításainak *ellentmondásmentessége*. Érthető viszont, hogy ezt a negatívumot — valamely állítás ellentmondásmentességét — a logika módszereinek azon a fejlődési fokán, amelyet a platóni dialektika képvisel, úgy látszik, legtöbbször nem is tudták volna másképp igazolni, mint indirekt úton, vagyis oly módon, hogy az ellentmondást a bizonyítandó tétellel ellenkező állításban mutatták ki. Az ellentmondásmentességnek ez az indirekt igazolása a platóni dialektika legjellemzőbb vonása.

Látjuk tehát, hogy a dialektikus vita során a „hypothesisek" alkalmazásának a módszere elválaszthatatlan az indirekt bizonyítás módszerétől. Sőt, úgy látszik, ez a kettő — hypothesis-alkalmazás és indirekt bizonyítás — voltaképpen nem is egyéb, mint ugyanannak a dialektikus módszernek két különböző szempontból való megnevezése. A platóni és a platónelőtti dialektikából nem ismerünk egyetlenegy példát sem arra, hogy valamely „hypothesist" másként igazoltak vagy cáfoltak volna, mint indirekt bizonyítással.[54]

Az a megállapításunk, hogy a „hypothesisek" alkalmazásának módszere lényegében azonos az indirekt bizonyítási móddal, jól összevág azzal is, hogy PLATÓN a „Theaitétos" c. dialógusban az előbb tárgyalt hypothesis-alkalmazást mint „matematikai jellegű" bizonyítási eljárást mutatta be. Csakugyan minden jel arra mutat, hogy a platónkorabeli, sőt már ezt megelőzően a régebbi, az V. századi görög matematika is feltűnően gyakran alkalmazta az indirekt bizonyítási módot. Igaz ugyan, hogy erre teljes bizonyossággal csak egyetlenegy példát tudunk, azaz: csak egy olyan tételt ismerünk, amelyet már a IV. században is úgy tartottak számon, mint a matematikai indirekt bizonyítás közismert, régi példáját; ez pedig nem egyéb, mint a már többször említett pythagoreus bizonyítás: a négyzet átlója és oldala inkommenzurábilis mennyiségek. További példáink — amelyek még igazolhatnák, hogy az indirekt bizonyítást már az V. századi görög matematikusok is gyakran használták — mind olyan természetűek, hogy datálásukat tulajdonképpen csak a modern történeti rekonstrukciónak köszönhetjük. De mégsem lehet véletlen az, hogy az O. BECKER által rekonstruált régi pythagoreus elméletnek, a párosról és páratlanról szóló tanításnak[55] 17 tétele közül *hatot*, ill. *nyolcat* indirekt

[54] PLATÓNnal kapcsolatban írja B. L. v. d. WAERDEN (*Erwachende Wiss.* 247): „Eine andere Beweismethode als die Widerlegung angenommener Hypothesen (d. h. also: die indirekte Beweismethode) kommt in keinem Dialog vor."

[55] Lásd a 49. jegyzetet.

bizonyítással igazoltak. Hasonlóképpen az euklidészi „Elemek" VII. könyvének első 36 tétele közül — amelyeknek V. századi eredetét B. L. v. d. WAERDEN mutatta ki[56] — *tizenötnek* a bizonyítása indirekt. Legutóbb egyik dolgozatomban utaltam már arra is, hogy a pythagoreus aritmetika centrális és legalapvetőbb tételét, az *egy* oszthatatlanságát, ugyancsak indirekt úton bizonyították.[57] Egyáltalán semmi okunk sincs tehát arra, hogy kétségbevonjuk: az V. századi görög matematikában rendkívül fontos szerepe volt az indirekt bizonyítási eljárásnak.

Anélkül, hogy ebben az összefüggésben részletesebben vizsgálni akarnám az indirekt bizonyítási mód *elvi jelentőségét* mind a mai napig a matematika egésze szempontjából, fel kell hívnom a figyelmet ezúttal egy érdekes történeti problémára ezzel a bizonyítási eljárással kapcsolatban.

Láttuk egyrészt, hogy PLATÓN az indirekt bizonyítást — azaz más szóval: a „hypothesis" alkalmazásának módszerét — „matematikai jellegű" bizonyításnak tartotta. Másrészt világossá lehetett előttünk az is, hogy ez a platóni megjelölés aligha önkényes; minden jel arra mutat, hogy ez a bizonyítási forma csakugyan már PLATÓN előtt is jellemző volt a matematikára. — Erre a két tényre épült a közelmúltban egy olyan történeti konstrukció, amely az első pillantásra kétségtelenül nagyon plauzibilisnek látszik.

K. REIDEMEISTER ugyanis felállította azt a tételt, hogy az indirekt bizonyítási módszer, s ezzel tulajdonképpen maga a platóni dialektika is *a matematikából származik.*[58] Bizonyos, hogy ezt a feltevést az első pillantásra támogatni látszik az is, amit ebben a dolgozatban eddig a dialektika és matematika módszerének valamint terminusainak azonosságáról elmondtunk. Mégis kérdés: vajon nem kell-e éppen az ellenkezőjére fordítanunk K. REIDEMEISTER feltevését? Vajon szabad-e azt a kétségbevonhatatlan tényt, hogy PLATÓN csakugyan szívesen hívatkozott a matematika példájára, úgy magyaráznunk, mintha a platóni dialektika nem is volna egyéb, mint a matematika módszerének alkalmazása egy másik, a matematikától távolabb eső területen? Nem úgy kell-e inkább rekonstruálnunk a történeti összefüggést, hogy bár az indirekt bizonyítás módszerét kezdetben a görög *dialektikusok* fejlesztették ki — erre mutat a használt terminusok története is —, mégis később (PLATÓN korában) ez a módszer már annyira a matematika jellemző jegyének számított, hogy PLATÓN hívatkozhatott — a dialektika régebbi úttörői helyett mint közelebbi példára, az egykorú matematikára is?

[56] *Math. Ann.* 120 (1947—49) 127—153.

[57] *Matematikai Lapok* X (1959) 83 kk.

[58] K. REIDEMEISTER, *Mathematik und Logik bei Platon*, Leipzig 1942; vö. B. L. v. d. WAERDEN, *Erwachende Wiss.* 247.

Hogy erre a kérdésre választ adhassunk, meg kell vizsgálnunk a következőkben az indirekt bizonyításnak — más szóval: a „hypothesis-alkalmazás” módszerének — legrégibb példáit, és tisztáznunk kell ennek a gondolkozási formának az eredetét.

5. ZÉNÓN

PLATÓN „Parmenidés” c. dialógusában az eleai ZÉNÓN elmondja: mi volt a lényege akkoriban híres művének?[59] E szerint a magyarázat szerint ZÉNÓN munkája PARMENIDÉS tanítását akarta igazolni, ill. támogatni *(βοήθειά τις τῷ Παρμενίδου λόγῳ)*: PARMENIDÉSnek ugyanis szemére vetették ellenfelei, hogy az „egy”-ről szóló tétele nevetséges, mert ellentmondásra vezet *(ὡς εἰ ἕν ἐστι, πολλὰ καὶ γελοῖα συμβαίνει πάσχειν τῷ λόγῳ καὶ ἐναντία αὑτῷ)*. Ezekkel a kísérletekkel fordult szembe ZÉNÓN, amikor kimutatta, hogy PARMENIDÉS ellenfeleinek a „hypothesis”-e *(„πολλά ἐστιν”)* még nevetségesebb következtetésekre ad alkalmat — feltéve, hogy helyesen folytatjuk a vizsgálatot *(ὡς ἔτι γελοιότερα πάσχοι ἂν αὐτῶν ἡ ὑπόθεσις, εἰ πολλά ἐστιν, ἢ ἡ τοῦ ἓν εἶναι εἴ τις ἱκανῶς ἐπεξίοι)*.

Egyértelműen kiderül mind az idézett görög szavakból, mind pedig abból a párhuzamos hagyományból, amelyet számunkra SIMPLICIUS őrzött meg,[60] hogy ZÉNÓN eszerint a felfogás szerint tulajdonképpen két „hypothesist” állított szembe egymással *(1. ἡ ὑπόθεσις ἡ λέγουσα πολλά ἐστιν* és 2. *ἡ τοῦ ἓν εἶναι)*. Majd pedig azt vizsgálta, hogy e két „hypothesis” közül melyik vezet ellentmondásra *(ἐναντία αὑτῷ λέγει)*, mert ebben látta annak a bizonyítékát, hogy csak a másik, a vele ellentétes „hypothesis” lehet igaz. — ZÉNÓN módszere tehát ugyanaz a „hypothesis-alkalmazás” (= indirekt bizonyítás) volt, mint ami a platóni dialektikáé. Nem véletlen, hogy ARISTOTELÉS éppen ZÉNÓNt tartotta a legrégibb dialektikusnak.[61]

Bizonyos, hogy PLATÓNnak ez a jellemzése nemcsak a dialógus szereplőjének, hanem az igazi, a történeti ZÉNÓNnak a módszerére is érvényes. Az eleai ZÉNÓN művének fennmaradt töredékei, valamint a rávonatkozó antik híradások egybehangzóan tanusítják, hogy valóban ebből — a hypothesis-alkalmazásból, ill. indirekt bizonyításból — állott ZÉNÓN egész dialektikája.

A kérdés számunkra mármost az: vajon honnan származik ZÉNÓNnak ez a módszere? — Ugyanúgy, ahogy K. REIDEMEISTER legutóbb a platóni dialektikát a matematikából származtatta, megpróbálták már levezetni ZÉNÓN

59 PLATÓN, „Parmenides” 128.
60 SIMPL. Phys. 134, 2 (ARISTOT. A 3. 187 a 1).
61 Aristot. Fragm. ed. V. Rose, 1886 fr. 65.

módszerét is az egykorú matematikusok gyakorlatából.[62] Mégis azt hiszem, ez a kísérlet aligha meggyőző. Mert

1. a ZÉNÓNnal egykorú görög matematikát csak nagy vonalakban, a modern történeti kutatás rekonstrukciójából ismerjük. Ha tehát ZÉNÓN *ismert* fragmentumainak módszerét mégis az ennél *jóval kevésbé ismert* matematikából származtatjuk, akkor tulajdonképpen az ismertet magyarázzuk az ismeretlenből;

2. egyáltalán semmi sem kényszerít bennünket arra, hogy feltegyük: ZÉNÓN az indirekt bizonyítás módszerét vele egykorú, közelebbről nem ismert matematikusoktól tanulta. Hiszen ZÉNÓN a hagyomány szerint PARMENIDÉS tanítványa volt; s miért ne vehette volna a tanítvány a módszert is mesterétől, PARMENIDÉStől? Mint ismeretes, PARMENIDÉS éppen azzal bizonyította tételeit, hogy megcáfolta e tételek ellenkezőjét,[63] kimutatván bennük az ellentmondást. Vagyis: az indirekt bizonyítás módszerét már PARMENIDÉS is használta.

Túlságosan messzire vezetne, ha ki akarnám mutatni ebben az összefüggésben azt is: mi adott egyáltalán alkalmat arra, hogy kifejlesszék az eleai filozófián belül az indirekt bizonyítások módszerét?[64] Minden további részletezés helyett beérhetjük ezúttal a következő ténymegállapítással: az indirekt bizonyítás legrégibb ismert alkalmazását — legalábbis a görögök között — PARMENIDÉS tanítókölteményében találjuk. Ugyanennek a bizonyítási formának legrégibb matematikai alkalmazásai — mai tudásunk szerint — mind későbbiek, a PARMENIDÉS *utáni* időkből származnak. Ez más szóval azt jelenti: semmi akadálya sincs annak a feltevésnek, hogy a legrégibb görög matematikusok az indirekt bizonyítás módszerét az eleai filozófusoktól tanulták. Megfordítva viszont: az a másik feltevés, hogy az eleai filozófusok tanulták volna e módszert a matematikusoktól, *semmivel sem valószínűsíthető.*[65]

6. A KETTŐS „HYPOTHESIS-ALKALMAZÁS"

A matematikai „hypothesisek" problémájának történeti vizsgálata az eleai filozófiához vezetett bennünket. Mielőtt kísérletet tennék mármost arra, hogy e felismerés alapján megvilágítsam az euklidészi axiómarendszer kialakulását, ki kell még térnem a „hypothesisek"-kel kapcsolatban a platóni dialektikának két olyan vonására, amelyeknek ismerete megkönnyítheti számunkra a korai görög matematika jobb megértését.

Közismert, hogy a platóni dialógusok SÓKRATÉSe mennyire bizalmatlan

[62] Pl. A. REY, *La jeunesse de la science grecque,* Paris 1933, 202.
[63] Vö. A. GIGON, *Der Ursprung der griech. Philsophie,* Basel 1945, 251.
[64] Vö. Á. SZABÓ, Zum Verständnis der Eleaten, *Acta Ant.* Budapest II (1954) 243—289.
[65] Vö. *Matematikai Lapok* X (1959) 72 kk.

minden olyan megismeréssel szemben, amelyet érzékszerveink közvetítenek. A „Phaidón" c. dialógusban erről ezt mondja SÓKRATÉS:[66]

„A lélek, ha a test segítségével vizsgálódik, látással, hallással vagy az érzékszervek útján — mert érzékelni valamit, ebből áll a test segítségével vizsgálódni —, ha tehát így a test segítségével vizsgálódik a lélek, akkor a test olyan jelenségek felé vonzza a lelket, amelyek sohasem mutatkoznak önmagukkal azonosaknak *(οὐδέποτε κατὰ ταὐτὰ ἔχοντα);*; az ilyen dolgokkal foglalkozva aztán eltéved, megzavarodik és úgy tántorog a lélek, mintha részeg volna. Ha viszont önmagában, egyedül vizsgálódik a lélek, akkor eljut a tisztához, az örökkévalóhoz, a halhatatlanhoz, amely önmagával mindig azonos *(ἀεὶ ὂν ... καὶ ὡσαύτως ἔχον)*, és ott is marad a közelében, mert rokontermészetű ezzel, és akkor nem is tévelyeg tovább, hanem ő is azonos marad önmagával, minthogy ilyen dolgokkal foglalkozik. A léleknek ezt az állapotát pedig, ugye, gondolkozásnak hívjuk."

Látjuk tehát, az idézet szembeállítja egymással az érzékszervek bevonásával és a t:sztán csak gondolkozással nyert megismerést. Nem kétséges, hogy mind ez a megkülönböztetés, mind pedig az, hogy PLATÓN előnyben részesíti a tisztán gondolkozás útján nyert megismerést, az eleai filozófia öröksége. Már PARMENIDÉS tanítóköltеményében azt olvassuk: „Ne hagyd, hogy a sokat tapasztalt megszokás erre az útra kényszerítsen! Ne bízd magad céltalan látásodra, zúgó füledre és nyelvedre! Ne ezekkel, hanem *értelmeddel* döntsd el a sokat vitatott kérdést, amelyet eléd tárok."[67]

Fontos, hogy tisztán lássuk: a hypothesis alkalmazásának módszere — más szóval: az indirekt bizonyítás — *szervesen* összefügg az érzéki észrevevés elutasításával. ZÉNÓN csak úgy tarthatta érvényesnek indirekt bizonyítással igazolt paradoxonait, hogy azt állította: az érzéki tapasztalás — amely e paradoxonokat lépten-nyomon cáfolta — félrevezető látszat. Többé-kevésbé ugyanígy volt ez a platóni filozófiában is. — A hypothesis-alkalmazás módszere és az érzéki tapasztalás elutasítása pedig azért függenek össze egymással, mert a hypothesis-alkalmazás, vagyis az indirekt bizonyítás tulajdonképpen mindig valamely *ellentmondás* kimutatásából áll. (Kimutatjuk az ellentmondást valamely állításban, és ezzel már be is bizonyítottuk, hogy nem a tárgyalt állítás, hanem ennek az ellenkezője igaz.) Az érzékszervek közvetítésével megismert valóság viszont, minthogy állandóan változik, tele van ellentmondással. Az a tárgy, amelyet *meleg*nek érzünk, más szempontból, vagy más körülmények között vizsgálva, egyszersmind *hideg* is. Érzéki tapasztalásaink

[66] „Phaidón" 79 C—D.

[67] DIELS—KRANZ, Vorsokratiker 8 I 28 B 7. — SÓKRATÉSnek a szövegben idézett szavaival érdemes összevetnünk az eleai Melissos töredékét: DIELS—KRANZ I 30 B 8: az érzéki tapasztalás világa állandóan változó, önmagának ellentmondó, ezért nem is létezhet.

tehát arra kényszerítenének bennünket, hogy azt, ami *meleg*, ugyanakkor *hideg*-nek (= „nem-meleg"-nek) is mondjuk, holott gondolkozásunk szerint az a valami, amiről azt állítjuk, hogy *A*, pl. „páros szám", nem lehet egyszersmind ennek az ellenkezője, NON-A, „nem páros szám" is. Látjuk tehát, hogy az ellentmondásmentesség kritériuma, amelyből az indirekt bizonyítás (a hypothesis-alkalmazás) kiindul, igazában csak akkor érvényesíthető következetesen, ha érzékszerveinktől lehetőleg függetleníteni tudjuk magunkat, ha — SÓKRATÉS szavai szerint — „a lélek önmagában folytatja vizsgálódásait".[68] Mert mint PLATÓN mondja, csak az olyan gondolati elemek, mint az „egyenlő" *(τὸ ἴσον)*, a „szép" *(τὸ καλόν)* stb.[69] maradnak mindig változatlanok. — A későbbiekben látni fogjuk majd, hogy a hypothesis-alkalmazásnak ez a szerves összefüggése az érzéki tapasztalás elutasításával milyen lényeges vonás a görög matematika axiómatikájának a megértése szempontjából is. (Egyelőre csak emlékeztetek arra: más összefüggésben kiemeltem már, hogy a korai görög matematikában az indirekt bizonyítás első alkalmazásaival egyidőben antiempirikus és szemléletellenes tendencia jelentkezett.[70])

Kétségtelen, hogy a platóni filozófiában mind az indirekt bizonyítás (a hypothesis-alkalmazás), mind pedig az érzéki tapasztalás elutasítása az eleaták öröksége volt. Jellemző pl. hogy a „Parmenidés" c. platóni dialógusban maga PARMENIDÉS a következő szavakkal dícséri meg SÓKRATÉSt:

„Nagyon meg voltam elégedve, SÓKRATÉS, amikor megértettem szavaidból, hogy nem engedted eltévedni a kutatást a látható dolgok körében, hanem azokra a dolgokra irányítottad figyelmedet, amelyek csak az értelemmel foghatók fel."[71]

Ezek a szavak jól összhangban vannak egyrészt mind a történeti PARMENIDÉS, mind pedig a platóni filozófia közismert módszerével, s ily módon egyszersmind azt is dokumentálják, hogy a platóni filozófia szerves folytatása az eleai filozófiának. Másrészt viszont tanulságos e legutóbbi idézet a hypothesis-alkalmazás módszerét illetően is. PARMENIDÉS ugyanis a következőkben azt tanácsolja, hogy minden konkrét esetben nemcsak egy bizonyos megadott hypothesist és következményeit kell megvizsgálnunk, hanem ugyanezt a műveletet el kell végeznünk az ellenkező értelmű hypothesisszel is. Hivatkozik egyszersmind a platóni PARMENIDÉS ZÉNÓN példájára is, aki

68 Nyilvánvaló, hogy az érzékszervek *igazában* semmiféle megismerésből sem kapcsolhatók ki egészen. Ezt azonban az eleaták és PLATÓN — érthető módon — még nem vették észre.

69 Vö. „Phaidón" 78 D.

70 Vö. Á. SZABÓ, Deiknymi als math. Terminus für *beweisen*, MAIA 1958 106 kk. és *Matematikai Lapok* X 1959 72 kk.

71 „Parmenides" 135 E.

mindig következetesen ragaszkodott e „kettős hypothesis-alkalmazás" módszeréhez.[72]

Anélkül, hogy ebben az összefüggésben felvetnénk a kérdést: mi az értelme a kettős hypothesis-alkalmazás módszerének a platóni „Parmenidés" dialógus szempontjából, azt hiszem, vázolhatjuk e módszer általános jelentőségét pusztán csak a dialektika és matematika szempontjából.

Ha elutasítjuk az érzékszervek által közvetített megismerést, azaz a konkrét empírikus tapasztalatot, akkor nem is ellenőrizhetjük állításaink helyességét vagy helytelenségét a gyakorlattal. Vagyis ebben az esetben az igaz állításnak csak egyetlenegy kritériuma lehet: az *ellentmondásmentesség.* Ezért nem elég tehát pusztán csak azt tapasztalnunk, hogy valamely állításunk *nem vezetett még* ellentmondásra. Ha nagyobb bizonyosságra törekszünk, meg kell még azt is mutatnunk, hogy a vizsgált állítás ellenkezője csakugyan ellentmondásra vezet. Ezért kell minden adott esetben a *kettős* hypothesis-alkalmazás módszeréhez folyamodnunk.

Nem kétséges, hogy ez a kettős hypothesis-alkalmazás használatos volt már az i. e. V. század folyamán nemcsak a dialektikában, hanem a matematikában is. Így döntötték el pl. azt a kérdést: osztható-e vagy oszthatatlan-e az *egy?*[73]

7. Összefoglalás

A Proklos által használt matematikai terminusnak, a „hypothesis" szónak a vizsgálata kiderítette, hogy ez a szó már a platónelőtti matematikában is ugyanazt jelentette, mint Proklosnál: „kiindulásul választott és be-nem-bizonyított feltevés". Láttuk azt is, hogy ez a terminus minden valószínűség szerint az *eleai dialektikából* származik, ahol — éppenúgy, mint a matematikában — elválaszthatatlan volt az indirekt bizonyítás alkalmazásától. Mielőtt rátérnénk most az euklidészi axiómatika további terminusainak történeti vizsgálatára, két kérdést kell még a „hypothesisek"-kel kapcsolatban tisztáznunk.

Először is az a kérdés érdekelne bennünket, vajon mikor és mi indíthatta a görög matematikusokat arra, hogy tudományuk be-nem-bizonyított alapelveit, a princípiumokat mint „hypothesiseket" külön csoportokba foglalva bocsássák művük elé, úgy, ahogy ezt Euklidés „Elemeiben" látjuk? — A másik kérdés viszont, amelyre választ keresünk még: hogyan alakul ki a „hypothesis" szónak speciális matematikai jelentése: „definíció"?

Az első kérdésre csak hozzávetőleges választ adhatunk. Bizonyos, hogy *nem* Euklidés volt az első olyan görög matematikus, aki az alapelveket, a

[72] Uo. 135 E—136.
[73] Vö. *Matematikai Lapok* X (1959) 83 kk.

princípiumokat csoportokba foglalva bocsátotta műve elé. Az a gondolat, hogy a be-nem-bizonyított kiinduló feltevéseket külön kell előrebocsátanunk, adódik már egyszerűen a dialektika gyakorlatából is. A platóni SÓKRATÉS mindig élesen megkülönbözteti „hypothesiseit" azoktól a következtetésektől *(τὰ συμβαίνοντα)*, amelyeket a hypothesisekhez fűz. Sőt, minthogy SÓKRATÉS beszél egy alkalommal olyan különösen erős állításokról („Phaidón" 100 A), amelyek megbízható hypothesisei lehetnek valamely gondolatsornak, joggal következtethetnénk e szavaiból arra, hogy talán már az egykorú matematikában is szokásos volt az ilyen „különösen erős állításoknak", az alapvető feltevéseknek az előrebocsátása. Nem tudjuk ugyan, hogy az a legelső görög matematikus, aki PROKLOS szerint „Elemeket" állított össze az i. e. V. század közepe táján,[74] a chiosi HIPPOKRATÉS, csakugyan princípiumok felsorolásával kezdte-e művét, de szinte bizonyos, hogy ilyen előrebocsátott matematikai princípiumoknak már az EUKLIDÉSt megelőző korokban is lenniök kellett. Láttuk már, hogy maga PLATÓN is említ olyan matematikai definíciókat (páros szám, páratlan szám, a háromféle szög, a geometriai idomok stb.), amelyeket megtalálunk a nála jóval későbbi EUKLIDÉS-szövegben. Magánál EUKLIDÉSnél viszont a „sík felület" és az „egyenes vonal" meghatározása fölösleges, azaz sohasem használt definíció. Valószínű — amint ezt már mások is feltették[75] —, hogy EUKLIDÉS ezeket a definíciókat készen vette át régebbi kézikönyvekből, amelyek feltehetően ugyanúgy princípiumok felsorolásával kezdődtek, mint EUKLIDÉS műve. Éppen ilyen meggondolásokból kiindulva jutottam egyik legutóbbi dolgozatomban arra a következtetésre, hogy az aritmetikai definíciók nagy része — az euklidészi „Elemek" VII. könyve előtt — feltehetően még az i. e. V. századból származik.[76]

Másik fontos kérdésünk, amelyre még ugyanebben az összefüggésben választ keresünk: hogyan alakult ki a *hypothesis* szónak speciális matematikai jelentése: *„definíció"?* — Azt hiszem, erre a kérdésre könnyen válaszolhatunk, ha figyelembe vesszük mindazt, amit a „hypothesis"-ről eddig kiderítettünk. Nem kétséges ugyanis, hogy minden dialektikus vitában a résztvevő partnereknek mindenekelőtt a vita *tárgyát* illetően kell megegyezésre jutniok. Meg kell ugyanis egyezniök abban, hogy *mi* az, amiről beszélnek, és hogy ez a *valami* mindenesetre különbözik attól, ami *nem ugyanez a valami;* mint pl. az „Euthyphron" c. platóni dialógusban olvassuk: a *kegyes (τὸ ὅσιον)* mindig csak önmagával azonos, és sohasem lehet egyszersmind önmaga ellentéte *(τὸ ἀνόσιον)* is.[77] Az a görög szó, amely a definiálást, meghatározást jelöli

[74] Proclus 66, 7 k.
[75] Vö. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide et chez les modernes, Paris 1940 14.
[76] Vö. *Matematikai Lapok* X (1959) 72 kk.
[77] „Euthyphrón" 5 D és „Phaidón" 102 E.

(ὁρίζεσθαι), tulajdonképpen *elhatárolást* jelent. A definícióban ugyanis a tárgy fogalmát, „eidos"-át határoljuk el attól, ami *nem* a szóban forgó tárgy, s ezzel voltaképpen a meghatározott fogalom ellentmondásmentességét biztosítjuk. Tudomásunk szerint a legrégibb ilyen definíciót PARMENIDÉS kísérelte meg, amikor a „létező" *(τὸ ὄν)* fogalmát élesen elválasztotta attól, ami *nem* a létező *(τὸ μὴ ὄν)*. Az eleai dialektika — amelynek, mint láttuk, lényege az indirekt bizonyítás — valójában éppen a fogalmaknak erre az éles elválasztására, a definícióra épül. Ugyanígy hangsúlyozza PLATÓN is, hogy egyáltalán nem lehetséges dialektika a fogalmaknak e nélkül az éles elhatárolása, a definíció nélkül: „Ha valaki nem járul hozzá ahhoz, hogy a dolgoknak megvannak a maguk „eidos"-ai, és ha nem határoljuk el (nem definiáljuk) mindenegyes dolognak az „eidos"-át, akkor egyáltalán nem tudjuk ráirányítani figyelmünket valamire, mert ebben az esetben *nem engedjük meg azt, hogy mindenegyes dolognak a fogalma mindig változatlanul ugyanaz maradjon,* s ezzel alapjában tesszük lehetetlenné a dialektikát".[78] — Ez más szóval azt jelenti: ha nem szögezzük le előre a definícióban azt, hogy a tárgy, amiről beszélünk, illetőleg ennek a tárgynak a fogalma, mindig ugyanaz, tehát sohasem ellentéte önmagának — ha ezt nem tesszük —, akkor ez a tárgy ellentmondásos lesz (a *tárgy* maga, és ugyanakkor az is, ami *nem-a-tárgy*), márpedig ebben az esetben csakugyan nem lehetséges a dialektika (hypothesis-alkalmazás vagy indirekt bizonyítás), hiszen ennek igazság- (valóság-) kritériuma éppen az ellentmondásmentesség.

Természetes, hogy annak a korai görög rendszeres matematikának, amely igazában nem is volt egyéb, mint egyik *speciális ága a dialektikának,* definíciókból kellett kiindulnia, mint első „hypothesisek"-ből. Ezek a definíciók voltak az új tudománynak, különösen az aritmetikának az alapjai. A „hypothesis" szó tehát, amely általában „kiindulásul választott és be-nem-bizonyított feltevést" jelentett, jelenthetett természetszerűleg definíciót is mind a dialektikában, mind pedig a matematikában.

(Beérkezett: 1960. VI. 5.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

[78] „Parmenides" 135 B—C.

A CENTRÁLIS HATÁRELOSZLÁSTÉTEL LOKÁLIS ALAKJÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

Írta: GYÍRES BÉLA

1. Legyenek a csak egészértékeket felvevő, egymástól független $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak, nulla várható értékkel és $\sigma > 0$ szórással, azaz legyen

(1) $$P(\xi_\nu = k) = A_k \geqq 0 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \nu = 1, 2, \ldots),$$

ahol

(2) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k = 1, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} kA_k = 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 A_k = \sigma^2 > 0.$$

Ha még

(3) $$P(\xi_1 + \cdots + \xi_n = k) = A_k^{(n)},$$

(4) $$B_n = \sigma\sqrt{n}, \quad z = \frac{k}{B_n},$$

akkor — amint az közismert — a valószínűségszámítás centrális határeloszlástételének lokális alakja szerint ([1], 237) ahhoz, hogy a $-\infty < k < \infty$ intervallumban k-ban egyenletesen érvényes legyen a

$$B_n A_k^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \to 0, \ n \to \infty$$

összefüggés, szükséges és elegendő, hogy ξ_ν ama különböző értékei különbségének legnagyobb közös osztója, amelyeket pozitív valószínűséggel vesz fel, egyenlő legyen 1-gyel.

Ha most az (1) számokkal, mint elemekkel képezzük az

(5) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \cdot \\ \cdot & A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdot \\ \cdot & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & \cdot \\ \cdot & A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & \cdot \\ \cdot & A_{-4} & A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} =$$

$$= L(\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \ldots)$$

Toeplitz-féle *L*-matrixot, amely az (1)-re és (2)-re való tekintettel sztochasztikus matrix és tekintetbe vesszük, hogy (3) alapján

$$(6)\qquad A_k^{(n)}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_\nu^{(n-1)}A_{k-\nu}\qquad (n=2,3,\ldots;\ A_\nu^{(1)}=A_\nu),$$

akkor az *L*-matrixok szorzási szabálya értelmében

$$(7)\qquad \mathbf{A}^n=L(\ldots,A_{-2}^{(n)},\ A_{-1}^{(n)},\ A_0^{(n)},\ A_1^{(n)},\ A_2^{(n)},\ldots)$$

és így a valószínűségszámítás központi lokális határeloszlástétele egyben a (7) matrixnak $n\to\infty$ mellett vett aszimptotikus viselkedésére is feleletet ad.

A lokális központi határeloszlástételének most már ezen az úton való legmesszebbmenő általánosítását adná egy tetszés szerinti négy irányban végtelen sztochasztikus matrix hatványai aszimptotikus viselkedésének felderítése. E kérdést — tudomásunk szerint — ilyen általánosságban még nem oldották meg. Mi sem vállalkozunk erre, hanem csak a következő speciálisabb jellegű általánosításra:

Legyen most **A** hasonló felépítésű sztochasztikus matrix, mint az (5), azzal a különbséggel, hogy az A_k elemek helyébe a négyzetes

$$(8)\qquad \mathbf{A}_k=\begin{pmatrix}a_{11}^{(k)}\cdots a_{1p}^{(k)}\\ \cdot\ \cdots\ \cdot\\ a_{p1}^{(k)}\cdots a_{pp}^{(k)}\end{pmatrix}\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

matrixok lépnek.

Elégítsék ki ezek a

$$(9)\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}k\sum_{l=1}^{p}a_{jl}^{(k)}=0\qquad (j=1,\ldots,p)$$

és a

$$(10)\qquad \mathbf{S}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{A}_k>0$$

feltételeket. A (10) feltétel mellett az $\mathbf{S}-\mathbf{E}$ matrix *k*-adik sorának és oszlopának elhagyásával kapott D_k főminorára fennáll a $(-1)^{p-1}D_k>0$ egyenlőtlenség ([2], 316). Kívánjuk meg még, hogy

$$(11)\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2\sum_{l=1}^{p}a_{jl}^{(k)}=\sigma_j^2\qquad (j=1,\ldots,p)$$

véges és

$$(12)\qquad \sigma^2=\frac{D_1\sigma_1^2+\cdots+D_p\sigma_p^2}{D_1+\cdots+D_p}>0$$

legyen. Ha mint az előbb, $\mathbf{A}^n$-et a (7) jelöli, amikor is a (6) jobb oldalán szereplő összeg tagjait a (8) matrixok segítségével képezzük, akkor a felsorolt feltételek mellett dolgozatunkban a következő tétel kimutatásával foglalkozunk:

TÉTEL:

A $(-\infty<k<\infty)$ intervallumban k-ban egyenletesen érvényes a

$$B_n \mathbf{A}_k^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathbf{P} \to 0, \; n \to \infty \tag{13}$$

összefüggés, ha még minden j-re a

$$\ldots, a_{jl}^{(-2)}, a_{jl}^{(-1)}, a_{jl}^{(0)}, a_{jl}^{(1)}, a_{jl}^{(2)}, \ldots \qquad (l=1,\ldots,p) \tag{14}$$

sorozatok közül legalább egy olyan van, amelyben a nullától különböző elemek felső indexei különbségének legnagyobb közös osztója 1*-gyel egyenlő és ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{S}^n = \mathbf{P}.$$

A valószínűségszámítás lokális központi határeloszlástételének most megfogalmazott tételünkben kifejezett általánosítása csak formális jellegű a valószínűségszámítás szempontjából. Következőkben tételünknek valószínűségszámítási interpretációját adjuk. Ez az interpretáció RÉNYI ALFRÉDtól származik.

Legyenek az egészértékű ϑ_{jn} $(j=1,\ldots,p;\ n=1,2,\ldots)$ valószínűségi változók teljesen függetlenek és a ϑ_{jn} $(n=1,2,\ldots)$ változók egyforma eloszlásúak. Legyen továbbá $\{\eta_n\}$ homogén Markov-lánc, az η_n valószínűségi változók lehetséges értékei legyenek az $1,\ldots,p$ számok. Tegyük fel, hogy a ϑ_{jn} és az η_n változók egymástól függetlenek. A ξ_n valószínűségi változókat értelmezzük a következőképp: legyen $\xi_n=\vartheta_{\eta_n n}$, azaz ξ_n legyen egyenlő ϑ_{1n}-nel, ill. ϑ_{2n}-nel, ..., ill. ϑ_{pn}-nel aszerint, amint $\eta_n=1$, ill. $\eta_n=2$, ill. ..., $\eta_n=p$. Legyen továbbá $\zeta_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$. Feltételeink szerint

$$\begin{aligned} &P(\zeta_{n+1}=k,\ \eta_{n+1}=j\,|\,\eta_0=h)= \\ &=\sum_{r=1}^{p}\sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\zeta_n=l,\ \xi_{n+1}=k-l,\ \eta_{n+1}=j,\ \eta_n=r\,|\,\eta_0=h)= \\ &=\sum_{r=1}^{p}\sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\zeta_n=l,\ \eta_n=r\,|\,\eta_0=h)\cdot \\ &\cdot P(\xi_{n+1}=k-l,\ \eta_{n+1}=j\,|\,\eta_n=r,\ \zeta_n=l,\ \eta_0=h)= \\ &=\sum_{r=1}^{p}\sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\zeta_n=l,\ \eta_n=r\,|\,\eta_0=h)P(\xi_1=k-l,\ \eta_1=j\,|\,\eta_0=r). \end{aligned} \tag{15}$$

Ha most

$$P(\zeta_n=k,\ \eta_n=j\,|\,\eta_0=h)=a_{hj}^{(n)}(k),\ a_{hj}^{(1)}(k)=a_{hj}^{(k)} \tag{16}$$

és

$$\mathbf{A}_k^{(n)} = (a_{hj}^{(n)}(k)), \tag{17}$$

akkor a (15) alapján

$$a_{hj}^{(n+1)}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{r=1}^{p} a_{hr}^{(n)}(l) a_{rj}^{(1)}(k-l), \tag{18}$$

tehát fennáll a (6). Így tételünk a $\frac{\zeta_n}{\sigma\sqrt{n}}$ határeloszlására vonatkozik. E valószínűségszámítási interpretáció egyben azt is igazolja, hogy a (7) matrixok, tehát a (8) matrixokkal generált (5) matrix hatványai léteznek, ami különben triviális, hiszen sztochasztikus matrixok szorzata ismét sztochasztikus matrix.

2. Legyen

$$f_{jl}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jl}^{(k)} e^{ikt}. \tag{19}$$

Ha

$$\mathbf{f}(t) = (f_{jl}(t)), \tag{20}$$

akkor nyilvánvalóan

$$\mathbf{A}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}(t) e^{-i\nu t} dt, \tag{21}$$

azaz a (20) matrix a (8) matrixokkal felépített *Toeplitz*-féle (5) matrixszal kapcsolatban ugyanazt a szerepet viszi, mint az eloszlásokhoz tartozó karakterisztikus függvény. Ezért az (5) matrixhoz rendelt (20) matrixot karakterisztikus függvénymatrixnak nevezhetjük.

Ha a (17) matrixhoz tartozó karakterisztikus függvénymatrixot $\mathbf{f}^{(n)}(t)$-vel jelöljük, könnyű belátni, hogy

$$\mathbf{f}^{(n)}(t) = (\mathbf{f}(t))^n. \tag{22}$$

A (18) és (19) alapján ugyanis

$$f_{jl}^{(n+1)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jl}^{(n+1)}(k) e^{ikt} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{j\alpha}^{(n)}(\nu) e^{i\nu t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{\alpha l}(k-\nu) e^{i(k-\nu)t} \right) = \sum_{\alpha=1}^{p} f_{j\alpha}^{(n)}(t) f_{\alpha l}(t).$$

A következőkben a (20) karakterisztikus függvénymatrixszal foglalkozunk. A (10) alapján

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{S},$$

azaz olyan sztochasztikus matrix, amelynek minden eleme pozitív és a (14) sorozatokra tett feltevés miatt ([1], 65, 2. korollárium)

$$\sum_{l=1}^{p} |f_{jl}(t)| < 1, \quad 0 < |t| < 2\pi. \tag{23}$$

A (20) matrixnak sajátértékeit abszolútértékben minden t-re nem növekvő sorrendben jelöljék

$$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_p(t). \tag{24}$$

A (10) miatt

$$\lambda_1(0) = 1, \quad |\lambda_j(0)| < 1 \qquad (j = 2, \ldots, p). \tag{25}$$

Mivel a (20) matrix elemei folytonos függvények ([1], 50, 1. tétel), a (24) függvények is azok. FROBENIUS ismert tétele értelmében (l. pl. [3], 75)

$$|\lambda_k(t)| \leqq \max_{(j)} \sum_{l=1}^{p} |f_{jl}(t)| \quad 0 < |t| < 2\pi$$

és így tekintettel a (23)-ra

$$|\lambda_j(t)| < 1 \qquad (j = 1, \ldots, p), \quad 0 < |t| < 2\pi. \tag{26}$$

1. SEGÉDTÉTEL:

$$|\lambda_1(t)| \leqq \vartheta < 1, \quad 0 < \delta \leqq |t| \leqq \pi. \tag{27}$$

Ugyanis a (23) miatt $\lambda_1(t)$ a 0-nak bizonyos környezetén kívül, folytonosságára való tekintettel, abszolútértékben nem juthat tetszés szerinti közel az 1-hez.

2. SEGÉDTÉTEL:

$$|\lambda_j(t)| \leqq \vartheta < 1 \qquad (j = 2, 3, \ldots, p). \tag{28}$$

Mert e függvények a (25) és (26) miatt abszolútértékben 1-nél kisebbek és folytonosak és így nem juthatnak tetszés szerinti közel abszolútértékben az 1-hez.

3. SEGÉDTÉTEL:

Van a 0-nak olyan környezete, amelyben $\lambda_1(t)$ karakterisztikus egyenletének egyszeres gyöke.

Mert (25) miatt $\lambda_1(0) = 1$ egyszeres gyök és $\lambda_1(t)$ folytonossága miatt a 0-nak meghatározható olyan környezete, amelyben $|\lambda_1(t)| > \vartheta$, ahol ϑ a (28)-ban értelmezett állandó.

A bizonyításokból kiviláglik, hogy a (14) sorozatokra tett feltevésre azért volt szükség, hogy teljesüljön a (27). Könnyű megadni szükséges feltételt ahhoz, hogy $|\lambda_1(t_0)| = 1$, $t_0 \neq 0$ legyen. Igaz ugyanis a következő tény:

Ahhoz, hogy fennálljon a $\lambda_1(t_0)=e^{i\alpha}(t_0\neq 0)$, szükséges a

$$b_{jl}=e^{i\alpha_{jl}}s_{jl} \tag{29}$$

feltétel teljesülése, ha itt

$$\mathfrak{f}(t_0)=(b_{jl}),\quad (s_{jl})=\mathbf{S}.$$

Legyen ugyanis $x_1,\ldots,x_p$ a

$$b_{1j}x_1+\cdots+b_{pj}x_p=e^{i\alpha}x_j \qquad (j=1,\ldots,p)$$

egyenletrendszernek a triviálistól különböző megoldása. Innen

$$1\leqq\frac{(|b_{11}|+\cdots+|b_{1p}|)|x_1|+\cdots+(|b_{p1}|+\cdots+|b_{pp}|)|x_p|}{|x_1|+\cdots+|x_p|}. \tag{30}$$

Mivel

$$|b_{j1}|+\cdots+|b_{jp}|\leqq 1, \tag{31}$$

a (30)-ban csak egyenlőség állhat fenn és ez is akkor, ha a (31)-ben egyenlőség van, azaz ha teljesül a (29).

Amennyiben a (14) sorozatokra tett feltétel teljesül, (30) nem állhat fenn egyetlen t-re sem, tehát $|\lambda_1(t)|<1$, ha $t\neq 0$.

A (29), amint könnyű erről meggyőződni, még nem jelenti azt, hogy $|\lambda_1(t_0)|=1$. Egy elegendő feltétel ehhez a

$$\alpha_{r_1r_2}+\alpha_{r_2r_3}+\cdots+\alpha_{r_{k-1}r_k}+\alpha_{r_kr_1}=k\alpha$$
$$(1\leqq r_1<r_2<\cdots<r_k\leqq p;\ k=1,\ldots,p)$$

feltételek teljesülése. Ez közvetlenül leolvasható a $\mathrm{Det}(\lambda\mathbf{E}-e^{-i\alpha}\mathfrak{f}(t_0))$ polinomból, ha annak λ hatványai szerint kifejtett alakjában a $\lambda=1$ helyettesítéssel élünk és figyelembe vesszük, hogy $\mathrm{Det}(\mathbf{E}-\mathbf{S})=0$.

4. SEGÉDTÉTEL:

$$\lambda_1(t)=1-\frac{t^2}{2}\sigma^2+o(t^2),\quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}o(t^2)=0, \tag{32}$$

ahol σ^2-et a (12) *értelmezi.*

Tételünk kimutatásához elegendő igazolni azt, hogy $\lambda_1(t)$ a 0 pontban kétszer differenciálható és

$$\lambda_1'(0)=0,\quad \lambda_1''(0)=-\sigma^2. \tag{33}$$

Mert akkor a $\lambda_1(0)=1$ figyelembevételével (32) épp a $\lambda_1(t)$ függvényre alkalmazott *Taylor* tételt jelenti.

Differenciáljuk t szerint formálisan az

$$F(t,\lambda_1)=\mathrm{Det}(\mathfrak{f}(t)-\lambda_1(t)\mathbf{E})\equiv 0 \tag{34}$$

implicit függvényt.

$$
(35) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dt}\equiv 0,\\ &\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2}\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\frac{d^2\lambda_1}{dt^2}\equiv 0. \end{aligned}
$$

Ha mint már előbb, a

$$
(36) \qquad \mathrm{Det}\,(\mathbf{f}(0)-\mathbf{E})=\mathrm{Det}\,(\mathbf{S}-\mathbf{E})=0
$$

determináns k-adik sorához és oszlopához tartozó aldeterminánst D_k-val jelöljük és figyelembe vesszük, hogy a $\lambda=1$ az $\mathbf{S}$-nek egyszeres sajátértéke,

$$
\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\right)_{t=0}=-\sum_{k=1}^{p} D_k \neq 0.
$$

Mivel továbbá az a determináns, amely a (36) determinánsból úgy keletkezik, hogy ennek j-edik sorába rendre a $\left(\frac{d}{dt}f_{jl}(t)\right)_{t=0}$ $(l=1,\dots,p)$ számokat helyettesítjük, a (9) feltételre és arra való tekintettel, hogy $\mathbf{S}$ sztochasztikus matrix, nullával egyenlő, következik, hogy

$$
(37) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=0}=0.
$$

Ugyanis a (37) bal oldala a $j=1,\dots,p$ esetre a most leírt módon kapott determinánsok összege. Így a (35) első azonosságából máris adódik a (33) első egyenlősége.

Tekintsük most a $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)_{t=0}$ kifejezést. A (34) alapján ez p^2 számú olyan determináns összegével egyenlő, amelyek közül az előzőek szerint mindazok nullával egyenlőek, amelyeknek egyes sorait a (36) egyes sorai, illetve a (19) matrix egyes sorainak a $t=0$ pontban vett differenciálhányadosai alkotják. Így tehát nullától csak az a p számú determináns különbözhet, amelyek közül a j-ediknek j-edik sorában a (19) matrix j-edik sorának a $t=0$ helyen vett második differenciálhányadosai foglalnak helyet, a többi sorában pedig a (36) megfelelő elemei vannak. Ha a determináns oszlopait a j-edikhez hozzáadjuk és figyelemmel vagyunk a (11) feltételre, arra jutunk, hogy

$$
\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)_{t=0}=-\sum_{j=1}^{p} D_j\sigma_j^2.
$$

Vegyük most tekintetbe azt, hogy $(-1)^{p-1}D_j>0$ ([2], 316), akkor a (35) második azonosságából a (33) második egyenlőségét kapjuk, ha itt σ^2-et a (12) értelmezi.

Legyen a (20) matrix *Jordan*-féle normálalakja

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{U}(t)\mathit{\Lambda}(t)\mathbf{U}^*(t), \tag{38}$$

ahol

$$\mathit{\Lambda}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & \delta_1(t) & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \delta_2(t) \cdots & 0 \\ . & . & . \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \lambda_p(t) \end{pmatrix} \tag{39}$$

és

$$\delta_j(t) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, p-1),$$

továbbá az

$$\mathbf{U}(t) = (u_{jl}(t)) \tag{40}$$

kielégíti az

$$\mathbf{U}(t)\mathbf{U}^*(t) = \mathbf{E} \tag{41}$$

relációt. Mivel a (40) matrix első oszlopa a (20) matrixnak a $\lambda_1(t)$-hez tartozó sajátvektora és $\lambda_1(t)$ a nullának elegendő kis környezetében egyszeres gyök, ezért ebben a környezetben a (40) első oszlopának elemei folytonos függvények.

Jelöljük azt a matrixot, amelynek első sorának első eleme 1, a többi pedig nulla, $\mathbf{E}_1$-gyel.

Ismeretes, hogy az $\mathbf{S}$ sztochasztikus matrixra tett (10) feltétel mellett $\mathbf{S}^n$, $n \to \infty$ határérték létezik és az előzőek szerint

$$\mathbf{P} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{S}^n = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}^n(0) = \mathbf{U}(0)\mathbf{E}_1\mathbf{U}^*(0) = \lim_{t\to 0} \mathbf{U}(t)\mathbf{E}_1\mathbf{U}^*(t). \tag{42}$$

3. Most bebizonyítjuk az 1 pontban kimondott tételünket. A bizonyítás során azt az utat követjük, amelyet a lokális központi határeloszlástételek bizonyításánál általában követni szoktak (l. pl. [1], 236—239).

A (21) értelmében

$$\mathbf{A}_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}^n(t)e^{-itk}\,dt.$$

Hagyjuk el a (39)-ben az argumentumokat és éljünk a

$$\mathit{\Lambda}^n = (b_{jl}) \tag{43}$$

jelöléssel. A szorzás végrehajtása után

$$b_{jl} = 0, \quad \text{ha} \quad j > l,$$

$$b_{jl} = \delta_j\delta_{j+1}\cdots\delta_{l-1}\sum_{\nu=0}^{n+j-l}\ \sum_{j\leqq\alpha\leqq\beta\leqq l} \lambda_\alpha^\nu \lambda_\beta^{n+j-l-\nu}, \quad \text{ha} \quad j \leqq l. \tag{44}$$

Legyen most $\mathcal{A}_1$ az a matrix, amelynek első sorában rendre a (43) matrix első sorának elemei vannak, míg a többi eleme nulla és $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}^n - \mathcal{A}_1$, akkor a (38) figyelembevételével

$$\mathbf{A}_k^{(n)} = \mathbf{I}_k^{(n)} + \mathbf{J}_k^{(n)}$$

alakban is írható, ahol

$$\mathbf{I}_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{U}(t) \mathcal{A}_1(t) \mathbf{U}^*(t) e^{-ikt} dt, \tag{45}$$

$$\mathbf{J}_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{U}(t) \mathcal{A}_2(t) \mathbf{U}^*(t) e^{-ikt} dt. \tag{46}$$

Mivel (44) szerint $\mathcal{A}_2$ a (24) sajátértékek közül az elsőt nem tartalmazza és mivel ezekre fennáll a (28), ezért a $\mathbf{J}_k^{(n)}$ matrix általános elmélet c_{jl}-val jelölvén és tekintetbe véve a (41) és (44) relációkat,

$$|c_{jl}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\alpha=2}^{p} \sum_{\beta=2}^{p} |b_{\alpha\beta}(t)| dt \leq p\vartheta^n + (p-1)\binom{n}{1}\vartheta^{n-1} + \cdots + \binom{n}{p-2}\vartheta^{n-p+2},$$

ahol a bal oldal és ezzel együtt a (46) matrix minden eleme $n \to \infty$ esetben k-tól függetlenül a nullához tart.

A (45) integrált az $x = tB_n$ helyettesítéssel a

$$2\pi B_n \mathbf{I}_k^{(n)} = \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-ixz} \mathbf{U}\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathcal{A}_1\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathbf{U}^*\left(\frac{x}{B_n}\right) dx$$

alakra hozhatjuk. Az itt szereplő B_n és z mennyiségeket a (4) értelmezi. A közismert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

integrál figyelembevételével tételünk (13) állításának igazolása annak kimutatásából áll, hogy az

$$\mathbf{R}_n = 2\pi \left[B_n \mathbf{I}_k^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathbf{P} \right]$$

különbség a $-\infty < k < \infty$ intervallumban k-ban egyenletesen tart a nullmatrixhoz, ha $n \to \infty$. Ebből a célból $\mathbf{R}_n$-et négy integrál összegeként állítjuk elő;

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4, \tag{47}$$

ahol

$$\mathbf{I}_1=(\alpha_{jl})=\int\limits_{-A}^{A} e^{-izx}\left[\mathbf{U}\left(\frac{x}{B_n}\right)\mathcal{A}_1\left(\frac{x}{B_n}\right)\mathbf{U}^*\left(\frac{x}{B_n}\right)-e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{P}\right]dx,$$

$$\mathbf{I}_2=(\beta_{jl})=\int\limits_{A\leqq|x|<\varepsilon B_n} e^{-izx}\mathbf{U}\left(\frac{x}{B_n}\right)\mathcal{A}_1\left(\frac{x}{B_n}\right)\mathbf{U}^*\left(\frac{x}{B_n}\right)dx,$$

$$\mathbf{I}_3=(\gamma_{jl})=\int\limits_{\varepsilon B_n\leqq|x|\leqq\pi B_n} e^{-izx}\mathbf{U}\left(\frac{x}{B_n}\right)\mathcal{A}_1\left(\frac{x}{B_n}\right)\mathbf{U}^*\left(\frac{x}{B_n}\right)dx,$$

$$\mathbf{I}_4=(\delta_{jl})=\int\limits_{|x|>A} e^{-izx-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\mathbf{P}.$$

A szereplő ε és A pozitív állandók, amelyekről a későbbiek során diszponálunk.

Mivel $\mathbf{P}$ sztochasztikus matrix ([1], 238),

$$|\delta_{jl}|\leqq\frac{2}{A}e^{-\frac{A^2}{2}}.$$

(27) miatt és tekintettel a (44)-re,

$$|\gamma_{jl}|\leqq\int\limits_{\varepsilon B_n\leqq|x|\leqq\pi B_n}\left[\left|b_{11}\left(\frac{x}{B_n}\right)\right|+\cdots+\left|b_{1p}\left(\frac{x}{B_n}\right)\right|\right]dx\leqq$$

$$\leqq 2\pi\sigma\sqrt{n}\left[\vartheta^n+\binom{n}{1}\vartheta^{n-1}+\cdots+\binom{n}{p-1}\vartheta^{n-p+1}\right].$$

Ha ε elég kicsiny, a (32)-ből következik, hogy a $|t|\leqq\varepsilon$ intervallumban ([1], 239)

$$|\lambda_1(t)|\leqq e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

és a 3. segédtétel szerint $\delta_1(t)\equiv 0$. Ezért

$$|\beta_{jl}|\leqq 2\int\limits_{A}^{\varepsilon B_n}\left|u_{j1}\left(\frac{x}{B_n}\right)\bar{u}_{l1}\left(\frac{x}{B_n}\right)\left(\lambda_1\left(\frac{x}{B_n}\right)\right)^n\right|dx\leqq 2\int\limits_{A}^{\varepsilon B_n}e^{-\frac{x^2}{4}}dx<2\int\limits_{A}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4}}dx.$$

Mivel a (32) alapján

$$\left(\lambda_1\left(\frac{x}{B_n}\right)\right)^n\to e^{-\frac{x^2}{2}},\ n\to\infty$$

és mivel a 3. segédtétel szerint, ha B_n elegendő nagy és A állandó, $\delta_1\left(\frac{x}{B_n}\right) \equiv 0$ és végül a (42) alapján

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{U}\left(\frac{x}{B_n}\right)\mathbf{E}_1\mathbf{U}^*\left(\frac{x}{B_n}\right) = \mathbf{P},$$

ezért rögzített A mellett z-ben egyenletesen $\mathbf{I}_1 \to 0$, ha $n\to\infty$.

Ha tehát ε-t elegendő kicsinynek, A-t pedig elegendő nagynak választjuk, $\mathbf{I}_2$ és $\mathbf{I}_4$ tetszőleges kicsinnyé tehetők. Az $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_3$ és $\mathbf{J}_k^{(n)}$ integrálok pedig zérushoz tartanak, ha $n\to\infty$, bármekkorák is legyenek ε és A. Így tehát a (47) összeg tetszés szerinti kicsiny lesz, ha n elegendő nagy. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] B. V. Gnyegyenko—A. N. Kolmogorov: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai,* Budapest 1951.

[2] H. Minkowski: *Zur Theorie der Einheiten in der algebraischer Zahlkörpern.* Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski, Leipzig—Berlin 1911.

[3] E. Bodewig: *Matrix Calculus,* Amsterdam 1959.

(Beérkezett: 1960. VI. 6.)

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem
Matematikai Intézete

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1960. IX. 14. — Terjedelem: 6,5 (A/5) ív, 16 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 60-4023

Ára: 15,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK